

4. Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1969.
5. Прилепко А. И. // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 5. С. 755—767.
6. Аниконов Д. С. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 5. С. 817—824.
7. Прилепко А. И., Иванков А. Л. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 109—119.
8. Прилепко А. И., Иванков А. Л. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 870—885.
9. Прилепко А. И., Орловский Д. Г. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 694—701.
10. Владимиров В. С. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1961. № 61.
11. Гермогенова Т. А. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1969. Т. 9, № 3. С. 605—625.
12. Шихов С. Б. Вопросы математической теории реакторов / Линейный анализ. М., 1973.
13. Кузнецов Ю. А., Морозов С. Ф. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 9. С. 1639—1648.
14. Султангазин У. М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата, 1979.
15. Iorgens K. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1958. Vol. 11, N 2. P. 219—242.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.

УДК 517.95

А. И. ПРИЛЕПКО, В. В. СОЛОВЬЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕД МЛАДШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

В работе формулируются и доказываются глобальные теоремы существования и единственности для обратных задач определения коэффициента перед младшей производной в уравнении параболического типа.

Общая теория обратных задач изложена в [1, 2], современное состояние теории обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изложено в [3].

Рассматриваемые здесь обратные задачи заключаются в определении пары функции — решения прямой задачи и коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении из условий, составляющих прямую, в данном случае первую краевую задачу, и некоторого дополнительного условия, называемого переопределением. В данной работе рассмотрено два различных типа переопределений — след решения прямой задачи на «верхней крышке» и след решения прямой задачи в некоторой фиксированной пространственной точке внутри области во все моменты времени. Задачи в аналогичной постановке рассматривались в работах [4—11].

Исследование разрешимости обратных задач проводится в пространствах непрерывных функций, производные которых удовлетворяют условию Гёльдера (определения используемых ниже пространств функций, см., например, в [12]). Под нормой без индексов понимается обычная sup-норма.

Работа разделена на две части — в первой части рассмотрена обратная задача с переопределением на «верхней крышке», во второй — с переопределением внутри области.

Пусть $T > 0$, $0 < \alpha < 1$ — фиксированные числа, Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с границей класса $H^{2+\alpha}$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$.

1. Рассмотрим задачу определения пары функций $(u, f) \in H^{2+a, 1+a/2} \times \times (\bar{\Omega}_T) \times \overset{\circ}{H}^a(\bar{\Omega}) = Q$ из условий:

$$u_t(x, t) - (Lu)(x, t) = f(x)u(x, t) + g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad (x, t) \in S_T = \partial\Omega \times [0, T], \quad (3)$$

$$u(x, T) = \chi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (4)$$

Под $\overset{\circ}{H}^a(\bar{\Omega})$ понимается множество функций $f \in H^a(\bar{\Omega})$, $f(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, $f(x) \leq 0$, $x \in \Omega$ в уравнении (1) $(Lu)(x, t) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x, t) +$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}(x, t) + c(x)u(x, t).$$

Будем предполагать, не оговаривая далее, что L — равномерно эллиптический в $\bar{\Omega}$, $c(x) \leq 0$. Пусть $|\chi(x)| \geq \chi_0 > 0$. Будем говорить, что для задачи (1) — (4) выполнены условия согласования нулевого порядка, если $\mu(x, 0) = \varphi(x)$, $\mu(x, T) = \chi(x)$, $x \in \partial\Omega$, первого порядка, если

$$\mu_t(x, T) = (L\chi)(x) + g(x, T), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\mu_t(x, 0) = (L\varphi)(x) + g(x, 0), \quad x \in \partial\Omega.$$

З а м е ч а н и е. В условия согласования значения неизвестной функции f на границе в отличие, например, от работы [5] не вошли, что связано со специальным выбором класса функций, в котором ищется f . Можно искать f в классе функций $H^a(\bar{\Omega}) = \{f; f \in H^a(\bar{\Omega}), f(x) \leq 0, x \in \bar{\Omega}\}$. Тогда значения f при $x \in \partial\Omega$ будут определяться из условия переопределения:

$$f(x) = \eta(x) = (\mu_t(x, T) - (L\chi)(x) - g(x, T)) / \chi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Тогда можно рассмотреть задачу (1) — (4) с другим оператором L

$$Lu + fu = (Lu + \eta u) + (f - \eta)u = (L_1 u) + \tilde{f}u. \quad (5)$$

В (5) $\eta(x)$ продолжена произвольно в $\bar{\Omega}$. Таким образом, определяя условия согласования указанным выше образом, мы предполагаем, что оператор L уже изменен в соответствии с указанной процедурой.

Пусть $d: G \rightarrow \mathbf{R}$ — некоторая вещественнозначная функция, определенная на своей области определения G . Будем далее обозначать $d^+(y) = \max\{0, d(y)\}$, $d^-(y) = \max\{0, -d(y)\}$, $y \in G$. Определим $v^+(f)(x, t)$, $v^-(f)(x, t)$ как решения задач

$$v_t^\pm(f)(x, t) - (Lv^\pm(f))(x, t) = f(x)v^\pm(f)(x, t) + g_t^\pm(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (6)$$

$$v^\pm(f)(x, 0) = ((L\varphi)(x) + g(x, 0))^\pm, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$v^\pm(f)(x, t) = \mu_t^\pm(x, t), \quad (x, t) \in S_T. \quad (8)$$

Функции $w^+(f, q)$, $w^-(f, q)$ определим как решения задач

$$w_t^\pm(f, q)(x, t) - (Lw^\pm(f, q))(x, t) = f(x)w^\pm(f, q)(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (9)$$

$$w^\pm(f, q)(x, 0) = q(x)\varphi^\pm(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (10)$$

$$w^\pm(f, q)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \quad (11)$$

Пусть $\overset{\circ}{C}(\bar{\Omega}) = \{q; q \in C(\bar{\Omega}), q(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Определим операторы $D^+(T)$, $D^-(T): \overset{\circ}{C}(\bar{\Omega}) \rightarrow \overset{\circ}{C}(\bar{\Omega})$ по правилу $D^\pm(T)f = w^\pm(0, f)(\cdot, T)$.

Теорема 1. Пусть $a_{ij}, b_i, c \in H^\alpha(\bar{\Omega})$, $h, h_t, g, g_t \in H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\varphi, \chi \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\mu \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{S}_T)$ и выполнены условия согласования в указанном выше смысле. Пусть $\chi(x) \geq \chi_0 > 0$, $\|D^+(T)\| < \chi_0$, $R = \|v^-(0)(\cdot, T) + (L\chi + g(\cdot, T))\| / (\chi_0 - \|D^+(T)\|)$.

Тогда если $v^+(0)(x, T) + R\|D^-(T)\| - ((L\chi)(x) + g(x, T)) \leq 0$, то существует решение задачи (1)–(4) в указанном классе. Если выполнены условия 1) $\varphi(x) \geq 0$, $\mu(x, t) \geq 0$, $g(x, t) \geq 0$; 2) $(L\varphi)(x) - R\varphi(x) + g(x, 0) \geq 0$, $\mu_t(x, t) \geq 0$, $g_t(x, t) \geq 0$, то не может существовать двух различных решений задачи (1)–(4).

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим задачу определения тройки функций (u, v, f) из условий (1)–(3) и условий

$$v_t(x, t) - (Lv)(x, t) = f(x)v(x, t) + g_t(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (12)$$

$$v(x, 0) = ((L\varphi)(x) + g(x, 0)) + f(x)\varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (13)$$

$$v(x, t) = \mu_t(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \quad (14)$$

$$f(x) = (v(x, T) - ((L\chi)(x) + g(x, T))) / \chi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (15)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $(u, f) \in Q$ — решение задачи (1)–(4). Тогда (u, u_t, f) — решение задачи (1)–(3), (12)–(15). Обратно, если (u, v, f) — решение задачи (1)–(3), (12)–(15), $f \in \dot{H}^\alpha(\bar{\Omega})$, то (u, f) — решение задачи (1)–(4), при этом $v = u_t$.

Доказательство. Так как g дифференцируема по t , то при $t > 0$, $x \in \Omega$ уравнение (1) можно продифференцировать почленно по t . Обозначая $u_t = v$ и определяя $v(x, t)$, $(x, t) \in S_T$ и $v(x, 0)$ из условий (2), (3), получаем (12)–(15). Обратно, пусть (u, v, f) — решение задачи (1)–(3), (12)–(15). Для доказательства леммы 1 достаточно показать $u(x, T) = \chi(x)$. Пусть $u(x, T) = \chi_1(x) \neq \chi(x)$. Тогда из условия (15) получаем

$$u_t(x, T) = (L\chi_1)(x) + f(x)\chi_1(x) + g(x, T), \quad x \in \Omega. \quad (16)$$

Из условий (15) и (16) получаем

$$(L(\chi - \chi_1))(x) + f(x)(\chi - \chi_1)(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

$$(\chi - \chi_1)(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (18)$$

Так как $f \leq 0$, то из (17), (18) следует $\chi = \chi_1$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что достаточно доказать разрешимость задачи (3.12)–(3.15).

Пусть $G(x, t; \xi, \tau)$ — функция Грина задачи (9)–(11). Определим оператор $B_f: C(\bar{\Omega}_T) \rightarrow C(\bar{\Omega}_T)$ по правилу

$$(B_f g)(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} f(\xi) G(x, t; \xi, \tau) g(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

Рассмотрим в $C(\bar{\Omega}_T)$ операторное уравнение второго рода

$$w_f = B_f w_f + B_f(v^{(1)} + v^{(2)}). \quad (19)$$

В (19) $v^{(1)} \in C(\bar{\Omega}_T)$ — решение задачи

$$v_t^{(1)}(x, t) - (Lv^{(1)})(x, t) = g_t(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (20)$$

$$v^{(1)}(x, 0) = ((L\varphi)(x) + g(x, 0)), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (21)$$

$$v^{(1)}(x, t) = \mu_t(x, t), \quad (x, t) \in S_T. \quad (22)$$

Для $v_f^{(2)} \in C(\bar{\Omega}_T)$ считаем выполненной задачу

$$(v_f^{(2)})_{t \rightarrow} (Lv_f^{(2)})(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (23)$$

$$(v_f^{(2)})(x, 0) = f(x)\varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (24)$$

$$(v_f^{(2)})(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \quad (25)$$

Заметим, что при фиксированной функции $f \in \dot{C}(\bar{\Omega})$ уравнение (19) всегда имеет решение ввиду известной оценки (см., например, [12, с. 469], а также [13, с. 26])

$$|G(x, t; \xi, \tau)| \leq C_1(t-\tau)^{-n/2} \exp\{-c_2|x-\xi|^2/(t-\tau)\}.$$

При этом решение уравнения (19) выписывается в виде ряда

$$\omega_f = \sum_{j=1}^{\infty} B_f^j (v_f^{(1)} + v_f^{(2)}). \quad (26)$$

Определим нелинейный оператор $A(f) : \dot{C}(\bar{\Omega}) \rightarrow \dot{C}(\bar{\Omega})$ по правилу

$$(A(f))(x) = ((v_f^{(1)}(x, T) + v_f^{(2)}(x, T) + \sum_{j=1}^{\infty} B_f^j (v_f^{(1)} + v_f^{(2)})) - (L\chi + g(\cdot, T))(x)) / \chi(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Лемма 2. Оператор $A(f)$ вполне непрерывен как оператор из $\dot{C}(\bar{\Omega})$ в $\dot{C}(\bar{\Omega})$, при этом $\|A(f)\|^\alpha \leq c_3(R)$ для любых f , $\|f\| \leq R$.

Доказательство. Покажем, что $A(f)$ непрерывен в любой точке $f \in \dot{C}(\bar{\Omega})$. Заметим, что

$$A(f + \Delta f) = (v_f^{(1)}(\cdot, T) + v_{f+\Delta f}^{(2)}(\cdot, T) + \omega_{f+\Delta f}(\cdot, T) - (L\chi + g(\cdot, T))) / \chi, \quad (27)$$

$$A(f) = (v_f^{(1)}(\cdot, T) + v_f^{(2)}(\cdot, T) + \omega_f(\cdot, T) - (L\chi + g(\cdot, T))) / \chi. \quad (28)$$

Вычитая из равенства (27) равенство (28), получаем $\Delta A(f) = (v_{\Delta f}^{(2)}(\cdot, T) + (\omega_{f+\Delta f} - \omega_f)) / \chi$.

Заметим, что $\Delta \omega_f = \omega_{f+\Delta f} - \omega_f$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_{\Delta f} = B_{\Delta f} \omega_{\Delta f} + B_{\Delta f} \omega_{f+\Delta f} + B_{\Delta f} v_f^{(1)} + B_{f+\Delta f} v_{\Delta f}^{(2)} + B_{\Delta f} v_f^{(2)}. \quad (29)$$

Так как $\|\omega_{f+\Delta f}\| \leq c_3$, $\|B_{\Delta f}\| \leq c_4 \|f\|$, $\|B_{f+\Delta f}\| \leq c_5$ при $\|f + \Delta f\| \leq R$, то из (29) получаем $\|\omega_{\Delta f}\| \leq C \|\Delta f\|$. Отсюда следует непрерывность оператора в любой точке $f \in \dot{C}(\bar{\Omega})$.

Докажем указанную в лемме 2 оценку. Так как $v_f^{(1)}(\cdot, T) \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ и для $v_f^{(2)}(\cdot, T)$ верна оценка $\|v_f^{(2)}(\cdot, T)\| + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}^{(2)}(\cdot, T)\| \leq c_1 \|f\|$, то достаточно доказать, что верна оценка $\|\omega_f\|^\alpha \leq c_2 \|f\|$. Из работы [13] пишем оценку $\|B_f g\|^\alpha \leq c_4 \|g\| \|f\|$. Тогда из (26) получаем $\|\omega_f(\cdot, T)\|^\alpha \leq c_5 R \sum_{j=0}^{\infty} \|B_f^j (v_f^{(1)} + v_f^{(2)})\| \leq c_3(R)$. Отсюда следует полная непрерывность оператора. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим в $\dot{C}(\bar{\Omega})$ множество функций $O_R^- = \{f; f \in \dot{C}(\bar{\Omega}), f(x) \leq 0, x \in \bar{\Omega}, \|f\| \leq R\}$. Заметим, что O_R^- — замкнутое выпуклое множество в $\dot{C}(\bar{\Omega})$. Покажем, что оператор A переводит множество O_R^- в себя. Возь-

мем последовательность многочленов $P_n \rightarrow f$, $\|P_n - f\| \leq 1/2n$. Тогда $P'_n = P_n - 1/2n$ удовлетворяет требованию $\|P'_n - f\| \leq 1/n$, $P' \leq 0$.

Очевидно, $P'_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$. Тогда $A(P_j)(x) = (v(P_j)(x, T) - ((L\chi)(x) + g(x, T))) / \chi(x) = (v^+(P_j)(x, T) - v^-(P_j)(x, T) + \omega^+(P_j, f)(x, T) - \omega^-(P_j, f)(x, T) - ((L\chi)(x) + g(x, T))) / \chi(x)$.

Заметим, что из принципа максимума следует, что

$$v^\pm(P_j)(x, T) \leq v^\pm(0)(x, T), \quad v^\pm(P_j)(x, t) \geq 0, \\ \omega^\pm(P_j, f)(x, T) \geq \omega^\pm(0, f)(x, T), \quad \omega^\pm(P_j, f)(x, t) \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$A(f)(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} A(P_j)(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} (v^+(0)(x, T) + \|D^-(T)\|R - (L\chi + g)) / \chi_0 \leq 0.$$

С другой стороны,

$$(A(f))(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} A(P_j)(x) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} (-v^-(P_j)(x, T) - \omega^+(P_j, -f)(x, T) - ((L\chi)(x) + g(x, T))) / \chi(x).$$

Отсюда получаем

$$-(A(f)(x)) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} (v^-(0)(x, T) + R\|D^+(T)\| + ((L\chi)(x) + g(x, T))) / \chi(x) \leq (\|v^-(0)(\cdot, T) + (L\chi + g(\cdot, T))\| + R\|D^+(T)\|) / \chi_0 \leq R.$$

Таким образом, установили, что вполне непрерывный оператор переводит выпуклое замкнутое множество в себя. Тогда из принципа Шаудера (см., например, [14]) следует, что существует неподвижная точка оператора A :

$$\hat{f} = A(\hat{f}). \quad (30)$$

Из (30), кроме того, следует, что $\hat{f} \in \overset{\circ}{H}^{\alpha}(\bar{\Omega})$.

Докажем единственность неподвижной точки при условиях, указанных в теореме. Пусть существует два решения задачи (1)–(4) (u^2, f^2) и (u^1, f^1) . Тогда пара функций $(\Delta u, \Delta f) = (u^2 - u^1, f^2 - f^1)$ удовлетворяет задаче

$$(\Delta u)_t(x, t) - (L\Delta u)(x, t) - f^2(x)\Delta u(x, t) = \Delta f(x)u^1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ \Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T; \quad \Delta u(x, T) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Тогда, как из условий теоремы 1 следует, что $u^1(x, t) \geq 0$, $u^2_t(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \Omega_T$, из [15] следует, что $(\Delta f)(x) = 0$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Из известной оценки (см., например, [13]) следует, что существуют такие постоянные $A > 0$, $\gamma > 0$, что $\|D^+(T)\| \leq A \exp\{-\gamma T\} \|\varphi^+\|$. Возьмем $g(x, t) = g_0 > 0$, $\mu(x, t) = \mu_0 > 0$, g_0, μ_0 — заданные постоянные. Так как $g_t = 0$, то

$$\|v^+(0)(\cdot, T)\| \leq A \exp\{-\gamma T\} \|L\varphi + g_0\|.$$

Тогда для любых функций χ , удовлетворяющих задаче $-g_0 < L\chi \leq 0$, $\chi(x) = \mu_0$, $x \in \partial\Omega$, и функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих задаче $0 \geq L\varphi - R\varphi \geq -g_0$, $\varphi(x) = \mu_0$, $x \in \partial\Omega$, задача (1)–(4) всегда разрешима при всех $T \geq t^*$. Легко подобрать и другие функции φ , χ , μ , g , удовлетворяющие всем условиям теоремы 1.

2. Рассмотрим задачу определения пары функций $(u, f) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T) \times H^{\alpha/2}([0, T])$ из условий

$$u_t(x, t) - (Lu)(x, t) = \hat{f}(t)u(x, t) + g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (31)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (32)$$

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \quad (33)$$

$$u(x_0, t) = \chi(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in \Omega. \quad (34)$$

В уравнении (31)

$$(Lu)(x, t) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j}(x, t) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i}(x, t) + c(x, t) u(x, t),$$

$$v_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i, j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq v_1 |\xi|^2, \quad v_0, v_1 > 0.$$

Пусть $\varphi(x_0) > 0$. Будем говорить, что для задачи (31) — (34) выполнены условия согласования до первого порядка, если

$$0) \quad \mu(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad \chi(0) = \varphi(x_0);$$

$$1) \quad \mu'(x, 0) = (L\varphi)(x, 0) + f_0 \varphi(x) + g(x, 0), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\text{где } f_0 = (\chi'(0) - (L\varphi)(x_0, 0) - g(x_0, 0)) / \varphi(x_0).$$

Теорема 2. Пусть $a_{ij}, (a_{ij})_{x_k}, b_i, c, g \in H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\varphi \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\mu \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S_T)$, $\chi \in H^{1+\alpha/2}([0, T])$, $\varphi(x_0) > 0$, $g \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$, $\chi(t) \geq \chi_0 > 0$ и выполнены условия согласования до первого порядка, тогда существует единственное решение задачи (31) — (34).

Доказательство. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что $f_0 = 0$, так как в противном случае можно вместо уравнения (31) рассмотреть уравнение

$$u_t(x, t) - (Lu)(x, t) - f_0 u(x, t) = (f(t) - f_0)u(x, t) + g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T.$$

Пользуясь стандартной заменой $u(x, t) = v(x, t) \exp \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = v(x, t) / r(t)$, получаем задачу определения пары функций $(v, r) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T) \times H^{1+\alpha/2}([0, T])$ из условий

$$v_t(x, t) - (Lv)(x, t) = g(x, t)r(t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (35)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (36)$$

$$v(x, t) = \mu(x, t)r(t), \quad (x, t) \in S_T, \quad (37)$$

$$r(t) = v(x_0 t) / \chi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (38)$$

Покажем, что всегда существует пара функций $(v, r) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T) \times H^{1+\alpha/2}([0, T])$, $r(0) = 1$, $r'(0) = 0$, удовлетворяющая (35) — (38). Заметим, что решение задачи (35) — (38) можно представить в виде $(v, r) = (v^{(1)}, r-1) + (v^{(2)}, 1)$, где $(v^{(1)}, r-1) = (v^{(1)}, q)$ удовлетворяет обратной задаче

$$v_t^{(1)}(x, t) - (Lv^{(1)})(x, t) = q(t)g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (39)$$

$$v^{(1)}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (40)$$

$$v^{(1)}(x, t) = q(t)\mu(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \quad (41)$$

$$v^{(1)}(x_0, t) = \chi(t)(r-1) + (\chi(t) - v^{(2)}(x_0, t)). \quad (42)$$

Для $v^{(2)}(x, t)$ выполнена прямая задача $v_t^{(2)}(x, t) - (Lv^{(2)})(x, t) = g(x, t)$,

$$(x, t) \in \Omega_T; \quad v^{(2)}(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad v^{(2)}(x, t) = \mu(x, t), \quad (x, t) \in S_T.$$

Покажем, что существует решение задачи (39) — (42). Определим оператор по правилу $(Aq)(t) = v^{(1)}(x_0, t)$, $A: \overset{\circ}{H}^{\alpha/2}([0, T]) \rightarrow \overset{\circ}{H}^{\alpha/2}([0, T])$, v^1 — решение прямой задачи (39) — (41).

Лемма 2. Для оператора A верна оценка $\|Aq\|^\alpha \leq c \|q\|^{\alpha/2}$. При

этом существует функция $R(t, \tau)$, удовлетворяющая оценке $|R(t, \tau)| \leq \leq c(t-\tau)^{-\alpha/2}$ и такая, что $(Aq)(t) = \int_0^t R(t, \tau)q(\tau)d\tau$.

Доказательство. Пусть $G(x, t; \xi, \tau)$ — функция Грина задачи (39) — (41) и $Z(x, t; \xi, \tau)$ — фундаментальное решение оператора $D_t - L$. Тогда решение (39) — (41) выражается через функцию Грина и тепловые потенциалы двойного слоя по формуле

$$v^{(1)}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G(x, t; \xi, \tau)q(\tau)g(\xi, \tau)d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_S \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau) \frac{\partial Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi_j} n_i(\xi)v(\xi, \tau)ds_{\xi}. \quad (43)$$

В формуле (43) $v(\xi, \tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(\xi, t) = 2 \int_0^t d\tau \int_{\Omega} M(\xi, \eta; t, \tau)v(\eta, \tau)ds_{\eta} - 2q(t)\mu(x, t), \quad (44)$$

где

$$M(\xi, \eta; t, \tau) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau) \frac{\partial Z(\xi, t; \eta, \tau)}{\partial \eta_j} n_i(\eta).$$

Выписывая решение уравнения (44) через резольвенту и подставляя в равенство (43), получаем, пользуясь теоремой Фубини, интегральное представление $v^{(1)}(x_0, t) = \int_0^t q(\tau)K(t, \tau)d\tau$.

Из известных оценок для фундаментального решения и функции Грина (см., например, [12]) следует указанная в лемме 1 оценка для $R(t, \tau) = K(t, \tau)/\chi(t)$. Оценка $\|Af\|^\alpha$ следует из известных оценок решений краевых задач для параболических уравнений (см., например, [12]) и из непрерывной дифференцируемости по t теплового потенциала двойного слоя вне $\partial\Omega$ внутри области Ω . Лемма 1 доказана.

Заметим, что условие (42) можно записать в виде операторного уравнения второго рода в $\dot{H}^{\alpha/2}([0, T])$

$$f = A(f) + g_0, \quad g_0 = 1 - v^{(2)}(x_0, t)/\chi(t). \quad (45)$$

Из леммы 1 следует полная непрерывность оператора A . С другой стороны, из леммы 1 следует, что A — оператор Вольтерра. Отсюда получаем, что существует единственное решение уравнения (45), а значит, и задачи (35) — (38). Для доказательства существования и единственности задачи (31) — (34) достаточно доказать, что в задаче (35) — (38) $r(t) \geq r_0 > 0$. Для этого заметим, что (38) можно записать в виде

$$r(t) = w^{(1)}(x_0, t)/\chi(t) + (Br)(t). \quad (46)$$

В (46) $w^{(1)}(x, t)$ удовлетворяет задаче

$$w_t^{(1)}(x, t) - (Lw^{(1)})(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (47)$$

$$w^{(1)}(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (48)$$

$$w^{(1)}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \quad (49)$$

Оператор $B: C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ определяется по правилу $(Br)(t) = = w^{(2)}(x_0, t)/\chi(t)$, где для $w^{(2)}(x, t)$ выполнена задача

$$w_t^{(2)}(x, t) - (Lw^{(2)})(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (50)$$

$$\omega^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (51)$$

$$\omega^{(2)}(x, t) = r(t)\mu(x, t), \quad (x, t) \in S_T. \quad (52)$$

Из строгого принципа максимума для задач (47)—(49) и (50)—(52) следует, что $\omega^{(1)}(x_0, t) \geq \omega_0^{(1)} > 0$, $B \geq 0$.

Так как решение задачи (46) можно представить в виде сходящегося в $C([0, T])$ ряда

$$r(t) = \sum_{j=0}^{\infty} B^j g_0, \quad g_0(t) = \omega^1(x_0, t)/\chi(t), \quad (53)$$

из формулы (53) следует, что $r(t) \geq r_0 > 0$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Вместо задачи с краевыми уравнениями (33) можно совершенно аналогично рассмотреть другие типы краевых условий.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
2. Иванов В. К., Васин В. П., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шихатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
4. Безнощенко Н. Я., Прилепко А. И. // Проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1977. С. 51—62.
5. Безнощенко Н. Я. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1292—1295.
6. Бухгейм А. Л. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 284, № 1. С. 21—24.
7. Исаков В. М. // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 108—109.
8. Искендеров А. Д. // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178, № 5. С. 999—1002.
9. Узлов А. Е. // Теоретико-функциональные и численные методы исследования физических процессов. М., 1983. С. 70—75.
10. Takashi Suzuki, Reiji Murgayama // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1980. Vol. 56, N 6. P. 259—263.
11. Logenzi A. // Anal. Math. pure ed. appl. 1982. Vol. 131. P. 145—166.
12. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
13. Фридрих А. Уравнения параболического типа. М., 1968.
14. Люстерник А. А., Соболев В. Н. Краткий курс функционального анализа. М., 1982.
15. Исаков В. М. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 6. С. 1296—1299.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.

УДК 517.97

М. РАХИМОВ

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассматриваются управляемые объекты, состояния которых описываются абстрактной задачей Коши для линейного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве, минимизируются квадратичные функционалы. Особенность рассматриваемых в статье задач оптимального управления заключается в том, что исходное уравнение управляемых объектов необязательно является самосопряженным, а минимизируемые функционалы не предполагаются строго выпуклыми. С помощью метода спектрального разложения для изучаемых задач доказано существование оптимальных управлений, получены явные формулы для них, исследованы вопросы управляемости, проведена регуляризация задачи управления с минимальной энергией, получены оценки скорости сходимости для приближенных решений.

2. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство,