П. Дутта, Д. Гошал, p-Артонная модель параболических модулярных форм,
ТМФ, 2021, том 209, номер 1, 101–124

https://www.mathnet.ru/tmf10108

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 209, № 1
октябрь, 2021

П. Дутта*, **Д. Гошал**†

p-АРТОННАЯ МОДЕЛЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

Предлагается сопоставить модулярной форме (бесконечный) набор комплекснозначных функций на множестве p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, по одной функции для каждого простого p. Проведен подробный анализ этого соответствия и вытекающие из него свойства преобразования Меллина и L-функции, ассоциированной с модулярной формой. Далее обсуждается произведение L-функций Дирихле и их преобразований Меллина, которые являются произведениями ϑ-рядов. Последние загадочным образом оказываются похожими на неголоморфные формы Мааса с нулевым весом, что подсказывают их коэффициенты Фурье.

Ключевые слова: параболические модулярные формы, p-адические вейвлеты, тета-функции, L-функции.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10108

1. ВВЕДЕНИЕ

Модулярная группа $SL(2,\mathbb{Z})$ и ее подгруппы, которые являются предметом внимания математиков вследствие их бесчисленных приложений, играют важную роль и в моделях статистической механики, где они связаны со статистической суммой, рассматриваемой как функция от комплекснозначной температуры и других внешних параметров. Голоморфные модулярные формы с определенными трансформационными свойствами относительно действия подгруппы модулярной группы – это важные компоненты конформно-инвариантных двумерных квантовых теорий поля и, более конкретно, теории струн и физики черных дыр, где возникают как голоморфные, так и неголоморфные модулярные формы (см., например, работы [1], [2] и ссылки в них). Обычные голоморфные модулярные формы определяются как

Д. Гошал частично поддержан Mathematical Research Impact Centric Support (MATRICS) of the Science and Engineering Research Board, Department of Science and Technology, Government of India (грант № MTR/2020/000481).

*Asutosh College, Kolkata, India. E-mail: parikshitdutta@yahoo.co.in

†School of Physical Sciences, Jawaharlal Nehru University, New Delhi, India.
E-mail: d.ghoshal@gmail.com, dghoshal@jnu.ac.in

ряды по q, в которых коэффициенты удовлетворяют определенным мультипликативным свойствам. Коэффициенты параболической модулярной формы определяют соответствующие L-ряды, причем модулярные формы и L-ряды связаны преобразованием Меллина. Благодаря мультипликативным свойствам своих коэффициентов L-ряд может быть представлен как произведение Эйлера по простым числам.

Еще один класс L-рядов – это семейство L-рядов Дирихле, из которых наиболее известным представителем является дзета-функция Римана [3], ассоциированная с мультипликативными характерами Дирихле. Каждый из L-рядов Дирихле также допускает представление в виде произведения Эйлера по простым числам. При этом можно связать отдельные сомножители в этом произведении Эйлера (мы называем их локальными множителями) с функциями на поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Недавно мы построили [4] псевдодифференциальные операторы (как обобщение производной Владимирова [5]), собственные значения которых включают характеры Дирихле, и показали, что L-ряд можно выразить как след некоторого оператора в соответствующем векторном пространстве. Эти операторы действуют на классе Брюа–Шварца локально постоянных комплекснозначных функций на $\mathbb{Q}_p$ с интегрируемым квадратом. Следы этих операторов корректно определены после сужения на множество операторов, которые действуют на подпространстве $\mathcal{H}_- \subset L^2(p^{-1}\mathbb{Z}_p)$, натянутом на вейвлеты (всплески) Козырева [6], являющиеся локально постоянными функциями с компактным носителем в $p^{-1}\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$.

В нашей с соавторами работе [7] мы начали исследование проблемы построения ансамбля унитарных случайных матриц, отвечающего множителю в произведении по простым числам для дзета-функции Римана, а затем объединили эти ансамбли, чтобы получить унитарную матричную модель для дзета-функции Римана. Мы обнаружили, что статистическая сумма этой матричной модели может быть записана как след производной Владимирова, ограниченной на $\mathcal{H}_-$. В этом подходе дзета-функция Римана по существу является статистической суммой в смысле статистической механики (см. также работы [8]–[12] для “физических моделей” L-функций). Ключевое отличие нашего подхода заключается в том, что мы используем ортонормированный базис в $\mathbb{Q}_p$, составленный из вейвлетов Козырева. В работе [4] мы показали, что вейвлеты Козырева, которые, как известно, являются собственными функциями производной Владимирова, образуют множество общих собственных функций всех псевдодифференциальных операторов, соответствующих L-рядам параболических модулярных форм.

Цель настоящей статьи – ввести связь между параболической модулярной формой и комплекснозначными функциями в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, по одной функции для каждого простого p, которые мы называем p-артонами. Точнее, мы устанавливаем соответствие между разложениями Фурье параболических форм и функциями на $\mathbb{Q}_p$. Другими словами, мы утверждаем, что параболическая форма эквивалентна вектору в $\otimes_p L^2(\mathbb{Q}_p)$. Это представление схоже с *партонной* моделью адронов, что и дало нам основание ввести термин “p-артон”. Мы показываем, что объединение p-адических преобразований Меллина этих векторов по всем простым числам связано с L-рядом, соответствующим параболической форме. Мы также обсуждаем операторы Гекке в терминах повышающих и понижающих операторов в вейвлет-базисе. Для этого необходимо определить соответствующее скалярное произведение p-артонов. Мы обсуждаем два варианта скалярного произведения и изучаем их свойства. Для более точного их понимания мы рассмариваем класс модельных L-функций (взяв произведение двух L-функций Дирихле), которые с точки зрения произведения Эйлера можно считать имитацией L-функций, связанных с модулярными формами. В качестве приятного сюрприза выясняется, что связанные с ними объекты имеют интригующее сходство с неаналитическими формами Мааса [13]. Вполне вероятно, что это действительно модельные примеры форм типа Мааса, однако мы смогли проверить их поведение только при преобразовании $\operatorname{Im} z \to -1/\operatorname{Im} z$ модулярной группы.

Далее мы приводим некоторые существенные факты, касающиеся голоморфных параболических форм модулярных групп, связанных с $SL(2,\mathbb{Z})$ (раздел 2), и вейвлетов на множестве p-адических чисел (раздел 3), а также вводим используемые обозначения. В разделе 4 мы устанавливаем связь между параболическими формами и p-артонами и обсуждаем их преобразования Меллина. Реализация с помощью операторов Гекке в рамках этого описания рассматривается в разделе 5, где мы предлагаем возможные скалярные произведения на пространствах p-артонов и их преобразований Меллина. Наконец, в разделе 6 мы изучаем модулярные объекты, ассоциированные с произведениями двух L-функций Дирихле, и отмечаем их связь с неаналитическими формами Мааса. Мы завершаем работу разделом 7, содержащим краткие выводы и комментарии о голографической природе соответствия, предложенного в нашей статье.

2. МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ L-ФУНКЦИИ

Дискретная подгруппа специальной линейной группы[1)] $SL(2,\mathbb{R})$, заданная как

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1\right\},$$

есть группа симметрий решеток Λ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ [14]–[17]. Ее иногда называют полной модулярной группой, и она имеет следующие *конгруэнц-подгруппы* конечного индекса:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(N) &= \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N\}, \\ \Gamma_1(N) &= \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid a,d \equiv 1 \text{ и } c \equiv 0 \mod N\}, \\ \Gamma(N) &= \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid a,d \equiv 1 \text{ и } b,c \equiv 0 \mod N\} \end{aligned} \tag{1}$$

(поскольку при $N=1$ заданные условия несущественны, $\Gamma(1)$ – это полная модулярная группа $SL(2,\mathbb{Z})$). Эти подгруппы упорядочены: $\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \Gamma(1)$. Среди них подгруппа $\Gamma(N)$, которая называется основной конгруэнц-подгруппой, является ядром гомоморфизма $SL(2,\mathbb{Z}) \to SL(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Если Γ – дискретная подгруппа, такая что $\Gamma(N) \subset \Gamma \subset \Gamma(1)$, где N – наименьшее из таких целых чисел, то Γ называется конгруэнц-подгруппой уровня N. Естественное действие группы $SL(2,\mathbb{R})$ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H} = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, ограниченное до действия группы Γ, приводит к разбиению ее на классы эквивалентности. *Фундаментальная область* $\mathcal{F}$ – это подмножество в $\mathbb{H}$, составленное

[1)] Точнее говоря, существенными в этом плане группами являются проективные специальные линейные группы $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R}/\{\pm I\})$ и $PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$.

из представителей Γ-эквивалентных классов. Например, фундаментальная область полной модулярной группы $\Gamma(1)$ есть множество $\{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1/2,\ |z| \geqslant 1\}$ (если игнорировать возможность дважды включить в него точки на границе).

Модулярная форма [15] $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *веса* $k \in \mathbb{N}$ и *уровня* $N \in \mathbb{Z}$, ассоциированная с характером Дирихле[2)] χ_N по модулю N, есть голоморфная форма, заданная на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, которая под действием дискретной подгруппы Γ, такой что $\Gamma(N) \subset \Gamma \subset \Gamma(1)$, преобразуется как

$$f(\gamma z) \equiv f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi_N(d)(cz+d)^k f(z), \qquad \gamma \in \Gamma \subset SL(2,\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Модулярная форма тождественно равна нулю, если k не является четным целым числом.

Используя в (2) замену $z \to z+1$, мы видим что модулярная форма полной модулярной группы $\Gamma(1)$ (т.е. уровня 1) является периодической по z функцией, следовательно, она имеет следующее разложение Фурье (q-разложение по $q = e^{2\pi i z}$):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z} = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n. \tag{3}$$

Модулярная форма называется *параболической*, если она стремится к нулю при $\operatorname{Im} z \to i\infty$ или, эквивалентно, равна нулю при $q = 0$. Поэтому для параболической формы $a(0) = 0$. Традиционно и часто удобно нормировать первый коэффициент параболической формы как $a(1) = 1$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Эквивалентным образом можно описать модулярные формы в терминах масштабирующих функций на $\mathbb{C}/\Lambda$, где Λ – решетка, инвариантная относительно левого действия подгруппы модулярной группы.

Модулярные формы веса k образуют *конечномерное* комплексное векторное пространство $M_k(\Gamma(1))$, при этом подмножество параболических форм образует подпространство $S_k(\Gamma(1))$. Аналогичные понятия можно ввести для модулярных форм конгруэнц-подгрупп $\Gamma \subset \Gamma(1)$ уровня N. При этом в дополнение к стремлению к нулю при $z \to i\infty$ (при $q = 0$) параболическая форма конгруэнц-подгруппы Γ должна стремиться к нулю, когда z стремится к определенным рациональным точкам на $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ (эквивалентно, в определенной точке единичного круга $|q| = 1$). Эти дополнительные точки фундаментальной области являются образами точек с $\operatorname{Im} z \to i\infty$.

Ряд Дирихле для параболической формы $f = \sum_n a(n) q^n$ определяется коэффициентами ее q-разложения:

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = 1 + \frac{a(2)}{2^s} + \frac{a(3)}{3^s} + \frac{a(4)}{4^s} + \cdots, \tag{4}$$

где мы учли нормировку $a(1) = 1$. Этот ряд сходится равномерно к голоморфной функции от s в полуплоскости справа от прямой $\operatorname{Re} s = \sigma + 1$, если коэффициенты $|a(n)|$ ограничены некоторой степенью n^σ. Соответствующая L-функция, связанная

[2)] Характер Дирихле (по модулю N) – это групповой гомоморфизм $\chi_N \in \operatorname{Hom}(G(N), \mathbb{C}^*)$ из мультипликативной группы $G(N) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ обратимых элементов в $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}^*$. Он является мультипликативным характером. Как правило, его поднимают на множество всех целых чисел, задавая $\chi_N(m) = 0$ для всех целых m, имеющих общие делители с N [14].

с параболической формой f, тогда определяется как аналитическое продолжение сумммы ряда на всю комплексную плоскость переменной s. Для параболической формы веса k приведенный выше ряд сходится в области $\operatorname{Re} s > (k+1)/2$. Имеется также следующая связь между рядом и параболической формой:

$$L(s,f) = \mathcal{M}[f](s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dy\, y^{s-1} f(iy); \tag{5}$$

другими словами, эта связь задается как преобразование Меллина функции $f(iy)$.

Примером параболической формы веса 12 (и уровня 1) полной модулярной группы является дискриминантная функция

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}, \qquad q = e^{2\pi i z}. \tag{6}$$

Рамануджан заметил, что коэффициенты ее q-разложения

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n \tag{7}$$

удовлетворяют следующим свойствам:

- $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$, если наибольший общий делитель $(m,n) = 1$;
- $\tau(p^{m+1}) = \tau(p)\tau(p^m) - p^{11}\tau(p^{m-1})$ для простого p и $m > 0$;
- $|\tau(p) \leqslant 2p^{11/2}$.

Функция $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ известна как τ-функция Рамануджана. Первые два ее свойства были доказаны Морделлом, а третья оценка была дана Делинем. Коэффициенты $a(n)$ модулярной формы веса k и уровня N удовлетворяют более общим условиям

$$\begin{gathered} a(mn) = a(m)a(n), \text{ если наибольший общий делитель } (m,n) = 1; \\ a(p^{m+1}) = a(p)a(p^m) - \chi(p)p^{k-1}a(p^{m-1}) \text{ для простого } p \text{ и } m > 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Коэффициентная функция $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ определяет мультипликативный характер [14]. Сходимость ряда также налагает ограничение на скрость роста коэффициентов, для параболической формы $|a(p)| \leqslant Cp^{(k-1)/2}$ при C порядка 1. Вследствие вышеуказанных свойств своих коэффициентов L-функция параболической формы f (4) также может быть записана как произведение Эйлера

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \frac{1}{1 - a(p)p^{-s} + \chi(p)p^{k-1}p^{-2s}}. \tag{9}$$

Эта функция аналогична L-функции Дирихле (см. выражение (48) ниже), однако, в отличие от нее, в функции $L(s,f)$ каждый локальный множитель

$$L_p(s,f) = (1 - a(p)p^{-s} + \chi(p)p^{k-1}p^{-2s})^{-1}$$

квадратично зависит от p^{-s}.

3. ВЕЙВЛЕТ-БАЗИС ПРОСТРАНСТВА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА $\mathbb{Q}_p$

Каждому локальному множителю с данным простым p в произведении Эйлера для L-функции Дирихле (48), а также для L-функции, ассоциированной с параболический формой, можно поставить в соответствие комплекснозначную функцию на p-адическом пространстве $\mathbb{Q}_p$. Используя ультраметрическую p-адическую норму, которая сама по себе является примером комплекснозначной функции $|\cdot|_p\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$, можно записать множитель $(1-p^{-s})^{-1}$ в дзета-функции Римана как

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \equiv \zeta_p(s) = \frac{p}{p-1}\int_{\mathbb{Z}_p} dx\,|x|_p^{s-1}, \qquad \operatorname{Re} s > 0, \tag{10}$$

где dx – (комплекснозначная) трансляционно-инвариантная мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$. Его также можно представить в виде

$$\frac{p}{p-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} d^\times x\,|x|_p^{s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0, \tag{11}$$

где интеграл берется по множеству ненулевых элементов в $\mathbb{Z}_p$ по мультипликативной (масштабно-инвариантной) мере $d^\times x = dx/|x|_p$ на пространстве $\mathbb{Q}_p^\times$, которое рассматривается как мультпликативная группа. При этом подынтегральная функция $|x|_p^s$, являющаяся мультипликативным характером на $\mathbb{Q}_p$, есть еще одна комплекснозначная функция.

Введем две функции

$$\chi_p(x) = e^{2\pi i x}, \qquad \Omega_p(x,x_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x-x_0|_p \leqslant 1, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad x, x_0 \in \mathbb{Q}_p. \tag{12}$$

Первая из них является аддитивным характером, а вторая – индикаторной функцией единичного шара с центром в x_0 [5], [18]. Аддитивный характер определяет преобразование Фурье $\mathcal{F}[f]$ функции $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}[f](k) = \int_{\mathbb{Q}_p} dx\,\chi_p(kx) f(x),$$

и его обратное $\mathcal{F}^{-1}$. Индикаторная функция $\Omega_p(x)$ сохраняет свой вид при преобразовании Фурье, $\mathcal{F}[\Omega_p](k) = \Omega_p(k)$. В этом смысле она представляет собой аналог гауссиана $e^{-\pi x^2}$ на $\mathbb{R}$. Эти функции являются составными частями ортонормированных функций на $\mathbb{Q}_p$, введенных в работе [6]:

$$\begin{gathered} \psi^{(p)}_{n,m,j}(x) = p^{-n/2} e^{\frac{2\pi i}{p} j p^n x}\,\Omega_p(p^n x - m), \\ \int_{\mathbb{Q}_p} dx\,\psi^{(p)}_{n,m,j}(x)\psi^{(p)}_{n',m',j'}(x) = \delta_{nn'}\delta_{mm'}\delta_{jj'}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $j = 1, \ldots, p-1$. Функции (13), которые мы называем *вейвлетами Козырева*, образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$ квадратично интегрируемых функций Брюа–Щварца (локально постоянных) на $\mathbb{Q}_p$, и их можно рассматривать как аналоги (обобщенных) вейвлетов Хаара на $\mathbb{R}$. Любой из этих вейвлетов получается из *материнского вейвлета* $\psi_{0,0,j}(x)$ действием аффинной группы преобразований "$ax+b$" при подходящем выборе a и b.

Обычное определение производной функции в нашем случае не работает из-за полностью несвязной топологии пространства $\mathbb{Q}_p$. Однако можно задать псевдодифференциальный оператор, называемый обобщенной производной Владимирова, с помощью интегрального преобразования:

$$D^{\alpha}_{(p)} f(x) = \frac{1}{\Gamma_{(p)}(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^{\times}} dx' \, \frac{f(x') - f(x)}{|x'-x|_p^{\alpha+1}}, \qquad \Gamma_{(p)}(-\alpha) = \int_{\mathbb{Q}_p^{\times}} \frac{dx}{|x|_p} \, e^{2\pi i x} |x|_p^{-\alpha}, \quad (14)$$

где α лежит в подходящей полуплоскости в $\mathbb{C}$, а для прочих α мы используем аналитическое продолжение, когда это необходимо. Оператор $\log_p D_{(p)}$ задается как предел при $\alpha \to 0$,

$$\log_p D_{(p)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{D^{\alpha}_{(p)} - 1}{\alpha \ln p}, \quad (15)$$

так что $\log_p D_{(p)} \psi^{(p)}_{n,m,j}(x) = (1-n)\psi^{(p)}_{n,m,j}(x)$. Вейвлеты Козырева являются собственными функциями оператора производной Владимирова,

$$D^{\alpha}_{(p)} \psi^{(p)}_{n,m,j}(x) = p^{\alpha(1-n)} \psi^{(p)}_{n,m,j}(x), \quad (16)$$

отвечающими собственным значениям $p^{\alpha(1-n)}$. Эти вейвлеты также являются общими собственными функциями для расширенного класса производных Владимирова, скрученных мультипликативным характером [4].

Поскольку нас интересуют собственные значения, которые зависят только от квантового числа n, связанного с масштабированием (а не от m и j, связанных с трансляцией и фазой), ограничим наше внимание набором собственных функций

$$\psi^{(p)}_{n,0,1}(x) = p^{-n/2} \chi_p(p^{n-1}x) \, \Omega_p(p^n x) \quad \longleftrightarrow \quad |1-n\rangle_{(p)}, \quad (17)$$

где мы использовали альтернативное обозначение кет-вектора, индексированного собственным значением вейвлета.

Определим понижающие и повышающие операторы $a^{(p)}_+$ и $a^{(p)}_-$, которые меняют отвечающее за масштаб квантовое число на единицу:

$$a^{(p)}_{\pm} \psi^{(p)}_{n,0,1}(x) = \psi^{(p)}_{n\pm1,0,1}(x) \quad \longleftrightarrow \quad a^{(p)}_{\pm} |n\rangle_{(p)} = |n \mp 1\rangle_{(p)}. \quad (18)$$

С помощью $a^{(p)}_{\pm}$ и $\log_p D_{(p)}$ задаются операторы $J^{(p)}_{\pm} = a^{(p)}_{\pm} \log_p D_{(p)}$ и $J^{(p)}_3 = \log_p D_{(p)}$, алгебра коммутаторов которых порождает $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-симметрию вейвлетов [20].

Определим подпространство $\mathcal{H}_-^{(p)} \subset L^2(p^{-1}\mathbb{Z}_p)$, представляющее собой оболочку следующих вейвлетов:

$$\{|m\rangle_{(p)} \mid m = 0, 1, 2, \ldots\} \overset{n=1-m}{\longleftrightarrow} \{\psi_{n,0,1}^{(p)}(x) \mid n = 1, 0, -1, -2, \ldots\}. \tag{19}$$

Оно состоит из вейвлетов с носителем в компактном подмножестве $p^{-1}\mathbb{Z}_p$, и отвечающие этим базисным функциям собственные значения оператора $D_{(p)}$ суть $\{1, p, p^2, \ldots\}$, т. е. неотрицательные целые степени числа p. Потребуем, чтобы после сужения на это подпространство понижающий оператор $a_+^{(p)}$ давал ноль при действии на материнский вейвлет, соответствующий наименьшему собственному значению производной Владимирова[3)]:

$$a_+^{(p)}|0\rangle_{(p)} = 0 \;\longleftrightarrow\; a_+^{(p)}\psi_{1,0,1}^{(p)}(x) = 0. \tag{20}$$

Тогда $\psi_{1,0,1}^{(p)}(x)$ можно назвать "основным состоянием" или "состоянием наименьшего веса" в этом подпространстве, а остальные вейвлеты получаются кратным действием на него повышающего оператора $a_-^{(p)}$, а именно $|n\rangle = (a_-^{(p)})^n|0\rangle_{(p)}$.

4. ВЕКТОРЫ, ОТВЕЧАЮЩИЕ (ПАРАБОЛИЧЕСКИМ) МОДУЛЯРНЫМ ФОРМАМ

Теперь мы готовы установить связь между параболической модулярной формой и функциями на $\otimes_p\mathbb{Q}_p$, точнее на $\otimes\mathcal{H}_-^{(p)}$, т. е. теми, которые принадлежат оболочке вейвлетов из (19). Для определенности мы обсудим эту взаимосвязь для параболических форм основной конгруэнц-подгруппы $\Gamma(N)$ модулярной группы.

Чтобы связать число $n \in \mathbb{N}$ с вейвлетом из подпространства $\otimes\mathcal{H}_-^{(p)} \subset \otimes_p\mathbb{Q}_p$, сначала рассмотрим разложение этого числа на простые множители:

$$n = \prod_{p \text{ простое}} p^{n_p} \;\longmapsto\; \bigotimes_p |n_p\rangle_{(p)} = |n_2\rangle_{(2)} \otimes |n_3\rangle_{(3)} \otimes |n_5\rangle_{(5)} \otimes \cdots. \tag{21}$$

Поскольку все показатели n_p, кроме конечного их числа, равны нулю, соответствующий вейвлет для данного простого p имеет наименьший вес или является основным состоянием $|0\rangle_{(p)}$, отвечающим вейвлету $\psi_{0,0,1}^{(p)}(x)$. Поэтому в данном соответствии только конечное число вейвлетов нетривиально. Аналогичная связь между натуральными числами как векторами в гильбертовом пространстве фиктивных квантовых систем, основанная на разложении на простые множители (модель арифметического или примонного газа), была установлена в работах [8]–[11]. Наше предложение относится к математически четко определенному пространству функций, но при этом не имеет какого-либо видимого физического смысла. С другой стороны, мы применяем это соответствие к значительно более широкому набору модулярных форм и L-функций.

Напомним разложение (3), (4) для параболической формы (с нормировкой ведущего коэффициента $a(1)$ на единицу) и сопоставим этой параболической форме

[3)] Несколько злоупотребляя обозначениями, мы используем тот же символ для сужений повышающих и понижающих операторов на $\mathcal{H}_-^{(p)}$. Поскольку именно подпространство $\mathcal{H}_-^{(p)}$ представляет для нас основной интерес, мы надеемся, что это не должно вызывать путаницы.

вектор из $\otimes_p \mathcal{H}_-^{(p)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n = \sum_{n_p=0}^{\infty} \Big(\prod_p a(p^{n_p})\Big) q^{\prod p^{n_p}} \longmapsto \\ \longmapsto |\mathfrak{f}\,\rangle = \sum_{n_p=0}^{\infty} \bigotimes_p a(p^{n_p}) |n_p\rangle_{(p)} = \\ = \sum_{n_2,n_3,n_5,\ldots=0}^{\infty} a(2^{n_2})|n_2\rangle_{(2)} \otimes a(3^{n_3})|n_3\rangle_{(3)} \otimes a(5^{n_5})|n_5\rangle_{(5)} \otimes \cdots = \\ = \sum_{n_p=0}^{\infty} \bigotimes_p a(p^{n_p}) a_-^{n_p} |0\rangle_{(p)}, \end{aligned} \tag{22}$$

где мы использовали мультипликативное свойство коэффициентов (8) для взаимно простых аргументов. Понятно, что при $n_p = 0$ коэффициенты $a(1) = 1$ для всех p. Отметим, что и в приведенном выше выражении большинство членов “тривиальны”, т. е. большинство векторов отвечает основному состоянию $|0\rangle_{(p)} = |n_p = 0\rangle \in \mathcal{H}_-^{(p)}$. В последней строке (22) мы использовали тот факт, что кет-векторы с более высоким *числом заполнения* $n_p \geqslant 1$ можно получить из основного состояния, действуя на него повышающим оператором (18), $|n_p\rangle = a_-^{n_p}|0\rangle_{(p)}$.

Вектор $|\mathfrak{f}\,\rangle \in \otimes_p \mathcal{H}_-^{(p)}$ является достаточно сложным и по-настоящему *запутанным*. Однако благодаря мультипликативному свойству коэффициентов (8) его можно упростить и представить в виде произведения:

$$|\mathfrak{f}\,\rangle = \sum_{n_p=0}^{\infty} \bigotimes_p a(p^{n_p}) a_-^{n_p} |0\rangle_{(p)} = (1 - a(p)a_- + p^{k-1}\chi(p)a_-^2)^{-1}|0\rangle_{(p)} \equiv \bigotimes_p |\mathfrak{f}_{(p)}\rangle. \tag{23}$$

Это можно увидеть, развернув правую часть и сравнив ее с левой. Для данного простого p мы называем вектор $|\mathfrak{f}_{(p)}\rangle \in \mathcal{H}_-^{(p)}$ p-артоном, т. е. отвечающей p “партией в ансамбле” параболической формы f. Интересно отметить, что оператор, который действует на “основное состояние”, генерируя p-артон, напоминает локальный множитель L-функции (9). Именно это является ключом к поиску приведенной выше факторизации.

Полученные векторы можно эквивалентным образом выразить в терминах комплекснозначных вейвлет-функций, если ввести известный в квантовой механике *координатный базис*, который состоит из обобщенных кет-векторов $\{|x_{(p)}\rangle, x_{(p)} \in \mathbb{Q}_p\}$, удовлетворяющих *условию ортогональности*

$$\langle x_{(p)} | x'_{(p')}\rangle = \delta_{pp'}\,\delta(x_{(p)} - x'_{(p)}),$$

где $\delta(x_{(p)} - x'_{(p)})$ – дельта-функция Дирака. В этом базисе компоненты $\langle x_{(p)}|\mathfrak{f}_{(p)}\rangle$ вектора $|\mathfrak{f}_{(p)}\rangle$ (также называемые *волновыми функциями*) задаются как

$$f_{(p)}(x_{(p)}) \equiv \langle x_{(p)}|\mathfrak{f}_{(p)}\rangle = \sum_{n_p=0}^{\infty} a(p^{n_p}) \langle x_{(p)}|n_p\rangle = \sum_{n_p=0}^{\infty} a(p^{n_p}) \psi_{1-n_p,0,1}^{(p)}(x_{(p)}), \tag{24}$$

т. е. как линейные комбинации вейвлетов с компактным носителем $p^{-1}\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$.

Резюме. *Согласно введенному соответствию параболическая форма* $f\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C}$ *эквивалентна бесконечному множеству функций* $f_{(p)}\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$, *содержащему по одной функции для каждого* p, *в том смысле, что, зная* f, *можно получить все* $(f_{(2)}, f_{(3)}, f_{(5)}, \dots)$, *и наоборот.*

Покажем далее, что соответствие, заданное соотношениями (22)–(24), можно рассматривать с другой точки зрения. Для этого введем преобразование Меллина для вейвлетов. Имеются различные определения p-адических преобразований Меллина (см., например, монографии [18], [21]), однако во всех случаях подынтегральные функции на $\mathbb{Q}_p$ содержат мультипликативные характеры. По аналогии с книгой [21] определим следующее преобразование[4)]:

$$\tilde g_\omega(s) \equiv \mathcal{M}_{(p,\omega)}[g](s) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\, e^{\frac{2\pi i\ell}{p}x|x|_p}|x|_p^s g(x), \qquad s\in\mathbb{C}, \quad \ell = 0,1,\dots,p-1, \tag{25}$$

где $d^\times x = dx/|x|_p$ есть масштабно-инвариантная мера, а ядро содержит унитарный характер $\omega_\ell(x) = e^{\frac{2\pi i\ell}{p}x|x|_p}$. Отметим, что характер, который определяет фазу, зависящую от p-адического “разряда” числа x, упоминался в книге [5]. Преобразование (25) аналогично преобразованию Меллина удовлетворяет масштабирующему свойству

$$\mathcal{M}_{(p,\omega)}[g(\alpha x)](s) = |\alpha|_p^{-s}\mathcal{M}_{(p,\omega)}[g(x)](s).$$

При этом $\omega_\ell \to \omega_{\ell\alpha|\alpha|_p}$, где правая часть является примитивным p-м корнем из единицы, если таковым является ω_ℓ. В частности, при $\alpha = p^n$ унитарный характер не меняется, следовательно, можно использовать равенство

$$\mathcal{M}_{(p,\omega)}[g(p^n x)](s) = p^{ns}\mathcal{M}_{(p,\omega)}[g(x)](s),$$

чтобы ввести преобразование Меллина для вейвлетов. Обратное преобразование Меллина

$$\mathcal{M}^{-1}_{(p,\omega)}[\tilde g_\omega](x) = \sum_{\ell=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i\ell}{p}x|x|_p}\,\frac{\ln p}{2\pi}\int_0^{2\pi/\ln p} dt\, |x|_p^{-it}\tilde g_\omega(it) \tag{26}$$

содержит дискретное преобразование Фурье характера ω, а контур интегрирования идет от 0 до $2\pi i/\ln p$ вдоль мнимой оси на комплексной плоскости переменой s.

С учетом этих определений преобразование Меллина вейвлета Козырева $\psi_{n,0,1}(x)$ задается как

$$\mathcal{M}_{(p,\omega)}[\psi_{n,1,0}](s) = -\biggl(\frac{1}{p(1-p^{-s})} - \frac{1}{p^s-1}\delta_{\ell,0} - \delta_{\ell,p-1}\biggr)p^{n(s-1/2)}. \tag{27}$$

С помощью явных вычислений можно проверить, что обратное к этому преобразование дает вейвлет Козырева. Уместно отметить, что, хотя вклад последнего слагаемого в обратное преобразование равен нулю и только вклады первых двух слагаемых воспроизводят вейвлет-функцию, дискретное преобразование Фурье, включающее

[4)] В книге [18] мультипликативный характер в ядре преобразования считается унитарным, что выполнено, если в нашем определении (25) переменная s является чисто мнимой. В книге [21] (см. определения 2.8.4 и 2.8.5) используется нормированный унитарный характер ω с кондуктором p^N, для которого в этом случае $N = 1$.

характер ω, безусловно важно для того, чтобы обратное преобразование работало. Попутно интересно отметить, что преобразование Меллина вейвлета Козырева связано с собственным значением обобщенной производной Владимирова D^{-s}.

Из (24) и (27) получаем

$$\mathcal{M}_{(p,\omega)}[\mathfrak{f}_{(p)}(x_{(p)})](s) = c_p(\ell, s) \sum_{n_p=0}^{\infty} a(p^{n_p}) p^{(1-n_p)(s-1/2)}, \tag{28}$$

где

$$c_p(\ell, s) = -\frac{1}{p(1-p^{-s})} + \frac{\delta_{\ell,0}}{p^s - 1} + \delta_{\ell,p-1} = \begin{cases} -p^{-s}\Gamma_p(s), & \ell = 0, \\ \ p^{-1}\zeta_p(s), & \ell = 1, \dots, p-2, \\ \ p^{-1}\zeta_p(s) - 1, & \ell = p-1, \end{cases} \tag{29}$$

есть не зависящий от n_p множитель в скобках в (27).

Теперь соберем результаты для всех простых p и получим, что преобразование Меллина “волновой функции” (24) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(p,\omega)}[\langle(\xi_{(2)}, \xi_{(3)}, \xi_{(5)}, \dots)|\mathfrak{f}\,\rangle](s) &= \prod_p \mathcal{M}_{(p,\omega)}[\mathfrak{f}_{(p)}(\xi_{(p)})](s) = \\ &= \prod_p c_p(\ell, s) \sum_{n_p=0}^{\infty} a(p^{n_p}) p^{(1-n_p)(s-1/2)} = \\ &= \prod_p c_p(\ell, s) p^{s-1/2} \cdot L\left(s - \frac{1}{2}, f\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Интересно, что L-функция, которую мы таким образом получили, имеет аргумент, сдвинутый от s к $s-1/2$. Бесконечное произведение, стоящее первым сомножителем в правой части, также зависит от ℓ, которое, в свою очередь, зависит от p.

5. ПОВЫШАЮЩИЕ, ПОНИЖАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ И ОПЕРАТОРЫ ГЕККЕ

Было бы интересно понять смысл предлагаемого разложения модулярной формы по p-адическим вейвлетам в контексте теории Гекке модулярных форм. Однако это выходит за рамки нашего нынешнего понимания, поскольку нам нужно знать, как расширить определение вейвлетов Козырева, которые заданы на $\mathbb{Q}_p$, до вейвлетов на проективном пространстве $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_p) \sim \mathbb{Q}_p \cup \{\infty\}$, чтобы можно было рассмотреть их преобразование под действием полной группы $GL(2, \mathbb{Q}_p)$. На данный момент мы ставим более скромную цель – понять, как устроены операторы Гекке $T(m)$, $m \in \mathbb{N}$, и их алгебраические свойства.

Напомним, что операторы Гекке $T(m)$, $m \in \mathbb{N}$, образуют множество коммутирующих операторов, действие которых на модулярную форму $f(z) = \sum a(n)e^{2\pi i n z}$ сводится к умножению на коэффициент $a(m)$ [14]–[17], [21]:

$$T(m)f(z) = a(m)f(z); \tag{31}$$

другими словами, модулярная форма – это собственный вектор оператора Гекке с собственным значением, равным коэффициенту в q-разложении. Они удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} T(m)T(n) &= T(mn) \quad \text{при} \quad m \nmid n, \\ T(p)T(p^\ell) &= T(p^{\ell+1}) + \chi(p)p^{k-1}T(p^{\ell-1}). \end{aligned} \tag{32}$$

Альтернативным образом действие оператора $T(m)$ на решетке можно понимать как сумму по подрешетке индекса m:

$$T(m)\Lambda = \sum_{[\Lambda:\Lambda']=m} \Lambda'.$$

Оператор Гекке $T(m)$ можно представить [14], [15] как сумму двух операторов, первый из которых $V(m)$ дает новый ряд, где q^n в f заменено на q^{mn},

$$(V(m)f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi imnz} = f(mz), \tag{33}$$

а в результате действия второго оператора $U(m)$ получается ряд, где сохраняются только q^n, которые делятся на m,

$$(U(m)f)(z) = \sum_{\substack{n=1\\(m|n)}}^{\infty} a(n)q^{n/m} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f\left(\frac{z+j}{m}\right). \tag{34}$$

Заметим, что $U(m)V(m) = \mathbf{1}$, но, поскольку $V(m)U(m)$ уничтожает члены в (3), не делящиеся на m, мы имеем $V(m)U(m) \neq \mathbf{1}$. Оператор Гекке с простым аргументом можно записать как

$$T(p) = U(p) + \chi(p)p^{k-1}V(p). \tag{35}$$

Таким образом, если $(T(p)f)(z) = \sum b(n)q^n$, то $b(n) = a(pn) + \chi(p)p^{k-1}a(n/p)$.

Действие операторов U и V напоминает действие повышающих и понижающих операторов (18) на вейвлеты:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a(p^n)|n\rangle \xrightarrow{a_-} \sum_{n=0}^{\infty} a(p^n)|n+1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a(p^{n-1})|n\rangle, \\ &\sum_{n=0}^{\infty} a(p^n)|n\rangle \xrightarrow{a_+} \sum_{n=1}^{\infty} a(p^n)|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a(p^{n+1})|n\rangle = \\ &\qquad\qquad = a(p)\sum_{n=0}^{\infty} a(p^n)|n\rangle - \chi(p)p^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty} a(p^{n-1})|n\rangle. \end{aligned}$$

На основании этого мы предлагаем записать операторы Гекке от простого аргумента как

$$T(p) = a_+ + \chi(p)p^{k-1}a_-, \tag{36}$$

чтобы получить

$$T(p)|\mathfrak{f}_{(p)}\rangle = a(p)|\mathfrak{f}_{(p)}\rangle.$$

Нетрудно видеть, что это приводит к правильным собственным значениям в (31).

5.1. Первое скалярное произведение. В векторном пространстве (параболических) модулярных форм веса k определено скалярное произведение Петерсона

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathcal{F}} d^2 z\,(\operatorname{Im} z)^{k-2} f^*(z) g(z), \tag{37}$$

которое инвариантно относительно действия модулярной группы. Операторы Гекке в общем случае не являются эрмитовыми, а удовлетворяют условию

$$T^\dagger(p) = \chi^*(p) T(p),$$

где эрмитово сопряжение определяется через скалярное произведение (37). Другими словами, эрмитовым является оператор $(\chi^*)^{1/2} T$.

Поставим вопрос: как оператор $T(p)$, заданный в (36) и действующий на пространстве векторов $\{|\mathfrak{f}_{(p)}\rangle\}$, ведет себя при сопряжении?

Прежде всего, нужно определить скалярное произведение для таких векторов. На данный момент у нас нет понимания трансформационных свойств вейвлетов под действием локальной модулярной группы $GL(2,\mathbb{Q}_p)$, поэтому мы не знаем, как определить $GL(2,\mathbb{Q}_p)$-инвариантное скалярное произведение, аналогичное (37). Рассмотрим два скалярных произведения, которые кажутся естественными.

Первое из них определяется по аналогии с приведенным выше скалярным произведением Петерсона, однако с использованием только подгруппы преобразований масштаба:

$$\langle \mathfrak{f}_{(p)}|\mathfrak{g}_{(p)}\rangle = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\,|x|^{k-1} \mathfrak{f}^*_{(p)}(x) \mathfrak{g}_{(p)}(x). \tag{38}$$

Напомним, что действие операторов $a_\pm$ на вейвлеты заключается в изменении масштаба переменной x с коэффициентом $p^{\pm 1}$ (а также в изменении общей нормировки, таком что повышенные/пониженные вейвлет-функции остаются ортонормированными). С помощью замены переменной интегрирования в скалярном произведении (38) легко проверить, что

$$a_+^\dagger = p^{k-1} a_-, \qquad a_-^\dagger = p^{1-k} a_+.$$

Следовательно, $T^\dagger(p) = \chi^*(p)T(p)$ и при этом

$$(a_{\mathfrak{g}}(p) - \chi(p) a^*_{\mathfrak{f}}(p))\langle \mathfrak{f}_{(p)}|\mathfrak{g}_{(p)}\rangle = 0.$$

В результате либо $\mathfrak{f}_{(p)} = \mathfrak{g}_{(p)}$, и тогда выражение в скобках исчезает, тем самым мы получаем эрмитовость оператора $T(p)$, либо два вектора, связанные с различными параболическими формами, ортогональны, $\langle \mathfrak{f}_{(p)}|\mathfrak{g}_{(p)}\rangle = 0$.

Хотелось бы сразу добавить, что приведенные выше аргументы (и, следовательно, выводы) являются формальными. Это связано с тем, что манипуляции с масштабом и переопределение переменной интегрирования работают только для функций из $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Однако нам требуется ограничение на подпространство $L^2(p^{-1}\mathbb{Z}_p)$, в котором масштабирование не является симметрией, поскольку оно может выводить из этого подпространства. Следовательно, соответствующие операторы должны быть спроецированы обратно на интересующее нас подпространство. Не очевидно, что сопряжение будет коммутировать с проецированием. Аргументы в следующем п. 5.2, основанные на другом способе задания скалярного произведения, не опираются на масштабирование.

Представим интересное наблюдение, анализ последствий которого мы оставим на будущее. В скалярном произведении (38), следуя книге [21], запишем функцию $\mathfrak{g}_{(p)}(x)$ как обратное (обобщенное) преобразование Меллина ее (обобщенного) преобразования Меллина и получим

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{f}_{(p)}|\mathfrak{g}_{(p)}\rangle &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\,|x|^{(k-1)/2}\mathfrak{f}^*_{(p)}(x)\,\mathcal{M}_\omega^{-1}[\mathcal{M}_\omega[\,|x|^{(k-1)/2}\mathfrak{g}_{(p)}]](x) = \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\,|x|^{(k-1)/2}\mathfrak{f}^*_{(p)}(x)\,\times \\ &\qquad \times \sum_{\omega\ (\mathrm{mod}\, p^N)} \frac{\ln p}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\ln p}} dt\,|x|_p^{-it}\omega^*(x)\mathcal{M}_\omega[\,|x|^{(k-1)/2}\mathfrak{g}_{(p)}](it) = \\ &= \sum_{\omega\ (\mathrm{mod}\, p^N)} \frac{\ln p}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\ln p}} dt\Big(\mathcal{M}_\omega[\mathfrak{f}_{(p)}]\Big(\frac{k-1}{2}+it\Big)\Big)^*\mathcal{M}_\omega[\mathfrak{g}_{(p)}]\Big(\frac{k-1}{2}+it\Big),\end{aligned} \tag{39}$$

т. е. что-то типа равенства Парсеваля. Любопытно, что аргумент преобразования Меллина в последней строке равен $k/2-1/2+it$, и он сдвинут на $1/2$ относительно предполагаемого положения нулей L-функции (4), которые расположены на прямой $\operatorname{Re} s = k/2+it$. Однако полюсы локального множителя в L-функции (9), вероятно, лежат на прямой $\operatorname{Re} s = (k-1)/2+it$. Это можно проверить в случае тривиального характера χ, например для $L(s,\Delta)$, коэффициенты которой являются τ-функциями Рамануджана.

5.2. Второе скалярное произведение. Обсудим другое скалярное произведение и его приложения. Чтобы определить множество, ортонормированное относительно масштабно-инвариантной меры $d^\times x$ на $\mathbb{Q}_p^\times$, оказывается удобным модифицировать вейвлеты Козырева (13) как $\mathbf{\Psi}^{(p)}_{n,m,j}(x) = |x|_p^{1/2}\psi^{(p)}_{n,m,j}(x)$ (см. приложение). Также переопределим p-артонные модулярные формы (24) путем изменения коэффициентов в некоторое число раз, зависящее от веса:

$$\mathbf{f}_{(p)}(x_{(p)}) = \sum_{n_p=0}^{\infty} p^{-\frac{k-1}{2}n_p} a(p^{n_p})\mathbf{\Psi}^{(p)}_{1-n_p,0,1}(x_{(p)}). \tag{40}$$

Такое масштабирование мотивировано ограничением на скорость роста коэффициентов параболической формы. Определим скалярное произведение как простой интеграл от произведения модифицированных p-артонных волновых функций:

$$(\mathbf{f}_{(p)}|\mathbf{g}_{(p)}) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\,\mathbf{f}^*_{(p)}(x)\mathbf{g}_{(p)}(x). \tag{41}$$

Применим условие ортонормированности (П.2), чтобы выразить действие понижающих и повышающих операторов (см. формулы (18), (20)) на функцию (40), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_+\mathbf{f}_{(p)}(x) &= \sum_{n_p=1}^{\infty}\int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times y\, \mathbf{\Psi}^{(p)}_{2-n_p,0,1}(x)\mathbf{\Psi}^{(p)*}_{1-n_p,0,1}(y)\mathbf{f}_{(p)}(y), \\ \mathbf{a}_-\mathbf{f}_{(p)}(x) &= \sum_{n_p=0}^{\infty}\int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times y\, \mathbf{\Psi}^{(p)}_{-n_p,0,1}(x)\mathbf{\Psi}^{(p)*}_{1-n_p,0,1}(y)\mathbf{f}_{(p)}(y). \end{aligned} \tag{42}$$

Нетрудно проверить, что тогда $\mathbf{a}^\dagger_\pm = \mathbf{a}_\mp$ относительно заданного выше скалярного произведения (41). Кроме того, используя те же соотношения, имеем

$$\mathbf{a}_+\mathbf{f}_{(p)}(x_{(p)}) = p^{-\frac{k-1}{2}}a(p)\mathbf{\Psi}^{(p)}_{1,0,1}(x_{(p)}) + p^{-\frac{k-1}{2}}\sum_{n_p=1}^{\infty}p^{-\frac{k-1}{2}n_p}a(p^{n_p+1})\mathbf{\Psi}^{(p)}_{1-n_p,0,1}(x_{(p)}),$$

$$\mathbf{a}_-\mathbf{f}_{(p)}(x_{(p)}) = p^{\frac{k-1}{2}}\sum_{n_p=1}^{\infty}p^{-\frac{k-1}{2}n_p}a(p^{n_p-1})\mathbf{\Psi}^{(p)}_{1-n_p,0,1}(x_{(p)}).$$

Следовательно операторы $\mathbf{T}(p)$, заданные формулами

$$\mathbf{T}(p)\mathbf{f}_{(p)} \equiv (\mathbf{a}^{(p)}_+ + \chi(p)\mathbf{a}^{(p)}_-)\mathbf{f}_{(p)} = p^{-(k-1)/2}a(p)\mathbf{f}_{(p)}, \qquad \mathbf{T}^\dagger(p) = \chi^*(p)\mathbf{T}(p), \tag{43}$$

ведут себя так же, как операторы Гекке $T(p)$ (см. соотношение (31) и п. 5.1). В силу этих уравнений из равенства

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\, \mathbf{g}^*_{(p)}(x)(\mathbf{T}(p) - \chi(p)\mathbf{T}^\dagger(p))\mathbf{f}_{(p)}(x) = 0$$

вытекает, что

$$p^{-(k-1)/2}(a_{\mathbf{f}}(p) - \chi(p)a^*_{\mathbf{g}}(p))\int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\, \mathbf{g}^*_{(p)}(x)\mathbf{f}_{(p)}(x) = 0. \tag{44}$$

Отсюда мы заключаем, что $\mathbf{f}(p)$ и $\mathbf{g}(p)$ ортогональны (относительно скалярного произведения (41)) и функция $(\chi^*)^{1/2}(p)a_{\mathbf{f}}(p)$ вещественная.

Делая те же шаги, что и при выводе равенства (39), получаем соответствующее тождество типа равенства Парсеваля для второго скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_{(p)}|\mathbf{g}_{(p)}) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\, \mathbf{f}^*_{(p)}(x)\,\mathcal{M}^{-1}_\omega[\mathcal{M}_\omega[\mathbf{g}_{(p)}]](x) = \\ &= \sum_{\omega\ (\mathrm{mod}\, p^N)}\frac{\ln p}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\ln p}} dt\,\mathcal{M}^*_\omega[\mathbf{f}_{(p)}](it)\mathcal{M}_\omega[\mathbf{g}_{(p)}](it) = \\ &= \frac{\ln p}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\ln p}} dt\, L^*_{\mathbf{f}(p)}\Big(\frac{k-1}{2}+it\Big)L_{\mathbf{g}(p)}\Big(\frac{k-1}{2}+it\Big). \end{aligned} \tag{45}$$

При этом на последнем шаге мы использовали следующий факт. В преобразовании Меллина

$$\mathcal{M}_\omega[\mathbf{f}_{(p)}](it) = \mathbf{c}_p(\ell, it)p^{it}L_{\mathbf{f}(p)}\Big(\frac{k-1}{2}+it\Big)$$

только первый множитель зависит от $\omega(\ell)$, следовательно, сумма дискретных преобразований Фурье дает 1, когда аргумент $s = it$ (см. приложение), и интеграл по t

приводит к дельта-символу Кронекера, с учетом чего сумма находится тривиальным образом. Таким образом, и левая, и правая части равенства (45) сводятся к

$$\sum_{n_p} p^{-(k-1)n_p} a^*_{\mathbf{f}}(p^n) a_{\mathbf{g}}(p^n).$$

Левая часть равна нулю, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ происходят из различных модулярных форм. Тогда мы имеем условие ортогональности соответствующих модулярных L-функций. Это условие хорошо было бы проверить прямыми вычислениями, что мы, к сожалению, не смогли сделать. Вместо этого мы предлагаем следующий косвенный аргумент.

Параметризуем "корни" знаменателя в локальном множителе $L_p(s,f)$ в (9) как $a_1(p) = p^{(k-1)/2} e^{i\alpha_1(p)}$ и $a_2(p) = p^{(k-1)/2} e^{-i\alpha_2(p)}$, тогда

$$a(p) = p^{(k-1)/2}(e^{i\alpha_1(p)} + e^{i\alpha_2(p)}) = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) p^{(k-1)/2} e^{\frac{i}{2}(\alpha_1-\alpha_2)},$$
$$\chi(p) = e^{i(\alpha_1(p)-\alpha_2(p))}.$$

Заметим, что это согласуется с условием на рост коэффициентов $a(p)$. При этом функция $L_p(s,f)$ является производящей функцией полиномов Чебышёва второго рода, которые мы обозначаем как $U_n(x)$:

$$\frac{1}{1-2t\cos\theta+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\cos\theta) t^n, \tag{46}$$

где $\theta = (\alpha_1+\alpha_2)/2$ и $t = p^{(k-1)/2-s} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2}$. Эти полиномы Чебышёва удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$U_{n+1}(\xi) = 2\xi\, U_n(\xi) - U_{n-1}(\xi), \qquad U_0(\xi) = 1, \quad U_1(\xi) = 2\xi. \tag{47}$$

В терминах тригонометрических функций $U_n(\cos\theta) = \sin((n+1)\theta)/\sin\theta$. Кроме того, благодаря рекуррентному соотношению эти полиномы удовлетворяют мультипликативному свойству (8). Ортогональность функций $L_p(s,f)$ и, следовательно, произведения $L(s,f)$ тогда получается как следствие ортогональности полиномов Чебышёва. Появление в этом контексте полиномов Чебышёва второго рода было замечено[5)] в работах [22], [23]. В следующем разделе мы изучим более простой класс функций, для которых данные свойства будут проявляться по построению.

6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ И ИХ СВЯЗЬ С ФОРМАМИ ТИПА МААСА

Поскольку модулярные формы и связанные с ними L-функции являются весьма сложными объектами, рассмотрим вместо них семейство функций, связанных с L-функцией Дирихле (соответствующей характеру Дирихле ν)

$$L(s,\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s} = \prod_{p\ \text{простое}} \frac{1}{1-\nu(p)p^{-s}}, \tag{48}$$

[5)] Мы узнали об этих результатах после отправки версии настоящей статьи в arXiv.

которые, как мы увидим далее, являются более простыми. Мы не можем использовать L-функции (48) напрямую, потому что, в отличие от L-функций (9), связанных с параболической модулярной формой, в которых локальные множители $(1-a(p)p^{-s}+\chi(p)p^{k-1}p^{-2s})^{-1}$ являются квадратичными функциями от p^{-s}, здесь локальные множители $L_p(s,\nu)=(1-\nu(p)p^{-s})^{-1}$ являются линейными. Поэтому, чтобы имитировать свойства модулярной L-функции, рассмотрим произведение двух L-функций Дирихле:

$$
\begin{aligned}
{}_2\mathsf{L}(s,\nu)=L(s,\nu)L(s,\nu^*)&=\prod_p\frac{1}{(1-\nu(p)p^{-s})(1-\nu^*(p)p^{-s})}=\\
&=\prod_p\frac{1}{1-2\cos(\arg\nu_p)p^{-s}+p^{-2s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},
\end{aligned}
\tag{49}
$$

где ν^* – характер, комплексно сопряженный ν (далее мы предполагаем, что ν не является главным характером), и коэффициент

$$
a(n)=\sum_{d|n}\nu(d)\nu^*(n/d)
$$

есть свертка характеров [24]. Заметим, что ${}_2\mathsf{L}(s,\nu)$ остается мероморфной функцией от s. Формально она имеет тот же вид, что и (9), с

$$
a(p)=\nu(p)+\nu^*(p)=2\cos(\arg\nu_p),
$$

$k=1$ и $\chi=1$ (тривиальный характер).

Можно увидеть, что локальный множитель ${}_2\mathsf{L}_p(s,\nu)$ для простого p представляет собой производящую функцию (46), следовательно,

$$
{}_2\mathsf{L}_p(s,\nu)=\frac{1}{1-2\cos(\arg\nu_p)p^{-s}+p^{-2s}}=\sum_{n_p=0}^{\infty}U_{n_p}(\cos\xi)p^{-sn_p},
\tag{50}
$$

где $U_{n_p}(\xi)$ – полином Чебышёва второго рода степени n_p от переменной $\xi=\arg\nu_p$. При этом второе условие в (8) для коэффициентов L-ряда (49) – это рекуррентное соотношение (47) для полиномов Чебышёва. Наконец, из двух приведенных выше соотношений получаем коэффциенты:

$$
a(n)=\sum_{d|n}\nu(d)\,\nu^*(n/d)=\prod_{p:\ n=\prod p^{n_p}}U_{n_p}(\cos(\arg\nu_p)).
\tag{51}
$$

Прежде чем мы продолжим обсуждение функции ${}_2\mathsf{L}(s,\nu)$, заметим, что можно определить несколько другое общее произведение

$$
{}_2\mathsf{L}(s,\nu_1,\nu_2^*)=L(s,\nu_1)L(s,\nu_2^*)=\prod_p\left(1-2e^{\frac{i}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\,p^{-s}+\chi(p)p^{-2s}\right)^{-1},
$$

где $\alpha_1=\arg\nu_1(p)$, $\alpha_2=\arg\nu_2(p)$, $\chi(p)=\nu_1(p)\nu_2^*(p)=e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$, а коэффициенты

$$
a(p)=e^{\frac{i}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}U_1\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)
$$

удовлетворяют мультипликативному свойству $a(p)a(p^r) = a(p^{r+1}) + \chi(p)p^{k-1}a(p^{r-1})$ при $k = 1$. Этот частный случай параметризации обсуждался в конце п. 5.2.

L-функция Дирихле (48) связана с ϑ-рядом

$$\vartheta(z,\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu(n)n^{\epsilon}e^{i\pi n^2 z/N}, \tag{52}$$

где ν – примитивный характер Дирихле по модулю N и $\epsilon = (1-\nu(-1))/2$ принимает значения 0 и 1, когда ν четный или нечетный соответственно. Этот ряд задает модулярную форму веса $1/2+\epsilon$ и уровня $4N^2$ с характером $\nu(d)\left(-\frac{1}{d}\right)^{\epsilon}$, где $\left(-\frac{1}{d}\right)$ – символ Лежандра, который определяет фазу. Преобразование Меллина L-функции (48) имеет вид

$$L(s,\nu) = \frac{(\pi/N)^{(s+\epsilon)/2}}{2\Gamma(\frac{s+\epsilon}{2})}\int_0^{\infty}\frac{dy}{y}\,y^{(s+\epsilon)/2}\,\vartheta(iy,\nu). \tag{53}$$

Поставим его в (49) и получим

$$\begin{aligned}
{}_2\mathsf{L}(s,\nu) &= \frac{(\pi/N)^{s+\epsilon}}{4\Gamma^2(\frac{s+\epsilon}{2})}\int_0^{\infty}dy_1\int_0^{\infty}dy_2\,(y_1y_2)^{\frac{s+\epsilon}{2}-1}\,\vartheta(iy_1,\nu)\vartheta(iy_2,\nu^*) = \\
&= \frac{2(\pi/N)^{s+\epsilon}}{\Gamma^2(\frac{s+\epsilon}{2})}\sum_{n_1=1}^{\infty}\nu(n_1)n_1^{\epsilon}\sum_{n_2=1}^{\infty}\nu^*(n_2)n_2^{\epsilon}\int_0^{\infty}\frac{dy}{y}\,y^{s+\epsilon}\int_0^{\infty}\frac{dy'}{y'}\,e^{-\frac{\pi n_1^2 yy'}{N}-\frac{\pi n_2^2 y}{Ny'}} = \\
&= \frac{4(\pi/N)^{s+\epsilon}}{\Gamma^2(\frac{s+\epsilon}{2})}\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{\epsilon}\int_0^{\infty}\frac{dy}{y}\,y^{s+\epsilon}K_0\left(\frac{2\pi n}{N}y\right).
\end{aligned} \tag{54}$$

При получении этих соотношений мы преобразовали интегралы для L-функций как произведение интегралов от двух ϑ-рядов и переопределили немые переменные интегрирования и суммирования как $y^2 = y_1y_2$, $y'^2 = y_1/y_2$, $n = n_1n_2$, $d = n_1$, а далее применили формулу (51) для коэффициентов. Интеграл по y' можно взять из обычных справочников (например, из [25]) или заметить, что он совпадает с интегральным представлением модифицированной функции Бесселя K_0. Наконец, интеграл по y в (54), будучи преобразованием Меллина модифицированной функции Бесселя, известен. Взятие этого интеграла, конечно, возвращает нас к (49), как и ожидалось.

Этот результат означает, что с точностью до множителя $4(\pi/N)^{s+\epsilon}/\Gamma^2(\frac{s+\epsilon}{2})$ функция ${}_2\mathsf{L}(s,\nu)$ является преобразованием Меллина свертки двух ϑ-рядов

$$(\vartheta(\nu)\star\vartheta(\nu^*))(iy) = \int_0^{\infty}\frac{dy'}{y'}\,\vartheta(iyy',\nu)\vartheta\left(\frac{iy}{y'},\nu^*\right) = \int_0^{\infty}\frac{dy'}{y'}\,\vartheta\left(\frac{iy}{y'},\nu\right)\vartheta(iyy',\nu^*), \tag{55}$$

где последнее равенство получается заменой переменных $y' \to 1/y'$ в интеграле. Мы имеем свертку характера Дирихле и его комплексно сопряженного (обозначенного звездочкой), а также свертку Меллина для мнимой части их аргументов, которая показана явно. Мы знаем, что ϑ-ряд обладает модулярным свойством; в частности, при замене $y \to 1/y$ (S-преобразование $z \to -1/z$ модулярной группы, ограниченной на мнимую часть) получаем

$$\vartheta(i/y,\nu) = \frac{y^{1/2+\epsilon}}{i^{\epsilon}\sqrt{N}}\,\tau(\nu)\vartheta(iy,\nu^*), \qquad \tau(\nu) = \sum_{m=0}^{N-1}\nu(m)e^{2\pi i m/N}, \tag{56}$$

где $\tau(\nu)$ – сумма Гаусса. Отсюда

$$\int_0^\infty \frac{dy'}{y'}\,\vartheta\left(\frac{i}{yy'},\nu\right)\vartheta\left(\frac{iy'}{y},\nu^*\right) = y^{1+2\epsilon}\int_0^\infty \frac{dy'}{y'}\,\vartheta\left(\frac{iy}{y'},\nu\right)\vartheta(iyy',\nu^*), \tag{57}$$

где мы использовали равенство $\tau(\nu)\tau(\nu^*) = \nu(-1)N$. Таким образом, обратное преобразование Меллина для ${}_2\mathsf{L}(s,\nu)$, а именно свертка (55) двух ϑ-рядов, является (квази)модулярным с весом $1+2\epsilon$ относительно преобразования $y \to 1/y$.

Интересно отметить, что указанное свойство, а также явное выражение в правой части формулы (54) вызывают аналогии с гармонической волновой формой Мааса [13]

$$\mathsf{M}_{\lambda,N}(x+iy) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (ny)^\epsilon \sqrt{y}\,K_\lambda\left(\frac{2\pi n}{N}y\right)e^{2\pi i n x/N} \tag{58}$$

веса $\lambda = 0$ для чисто мнимого аргумента. Волновая форма Мааса $\mathsf{M}_{\lambda,N}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ представляет собой неголоморфную “модулярную функцию”, заданную в верхней полуплоскости, которая является квадратично интегрируемой собственной функцией гиперболического $\Gamma(1)$-инвариантного лапласиана, соответствующей собственному значению $1/4 - \lambda^2$. Поскольку в нашем случае $a_0 = 0$, на самом деле это параболическая форма Мааса. Может показаться, что возникает противоречие, поскольку волновая форма Мааса $\mathsf{M}_{0,N}$ имеет нулевой модулярный вес, в то время как ϑ-ряды, связанные с каждой из L-функций (53), имеют вес $1/2+\epsilon$, следовательно, их произведение должно иметь вес $1+2\epsilon$. Это верно, однако это компенсируется множителем $y^{1/2+\epsilon}$, который является неголоморфной формой веса $-1-2\epsilon$. Множитель $\sqrt{y}$ возникает в результате сдвига аргумента в преобразовании Меллина. Можно также отметить, что мы теряем аналитичность результата, если преобразование Меллина выполняется только для мнимой части аргумента ϑ-ряда.

Отождествим модулярный объект, ассоциированный с рядом ${}_2\mathsf{L}(s,\nu)$, и форму Мааса указанного выше вида:

$$\sqrt{y}\,\mathbf{f}(x+iy,\nu) \to \mathsf{M}^{(\nu)}_{0,N}(x+iy) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)(ny)^\epsilon \sqrt{y}\,K_0\left(\frac{2\pi n y}{N}\right)e^{2\pi i n x/N}, \tag{59}$$

где коэффициент $a(n)$ связан с характером Дирихле ν формулой (51). Мы должны предостеречь, что это отождествление носит предварительный характер, поскольку нам пока не удалось показать трансформационное свойство функции (55) относительно действия полной модулярной группы. Хотя мы рассмотрели всего лишь частный случай веса $\lambda = 0$, кроме того, “редуцированный” по построению, полученное модельное представление волновых (квази)форм Мааса через произведение L-рядов Дирихле может оказаться полезным для понимания аспектов предлагаемого соответствия. Следующие рассуждения проводятся в этом духе.

Далее для определенности ограничимся четным характером $\nu(1) = \nu(-1)$. Случай нечетных характеров анализируется аналогично. Рассмотрим p-артонные модулярные формы, соответствующие (49)–(51):

$$\mathbf{f}_{(p)}(\nu,x) = \sum_{n_p=0}^{\infty} a(p^{n_p})\boldsymbol{\Psi}^{(p)}_{1-n_p,0,1}(x) = \sum_{n_p=0}^{\infty} U_{n_p}\cos(\arg\nu_p))\boldsymbol{\Psi}^{(p)}_{1-n_p,0,1}(x). \tag{60}$$

Хотя эти векторы корректно определены в $\mathcal{H}_-^{(p)}$, соответствие тензорного произведения $\otimes_p \mathbf{f}_{(p)}(\nu, x_{(p)})$ модулярному объекту в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ потребует дальнейшего обоснования. Это связано с тем, что волновая форма Мааса (58), не являясь мероморфной функцией, не допускает разложения в ряд по q, которое мы использовали для соответствия (22) в разделе 4. Однако зависимость как голоморфных, так и неголоморфных модулярных форм (3) и (59) от переменной x имеет одинаковый вид. Поэтому предложенное соответствие следует рассматривать как соответствие между коэффициентами разложения в ряды Фурье (по x) соответствующих модулярных объектов. L-функции, связанные с модулярными объектами, также определяются с помощью этих коэффициентов Фурье. Тем не менее было бы желательно провести различие между голоморфными и неголоморфными формами на уровне предложенных p-артонов.

Как бы то ни было, скалярное произведение[6)] (41) двух таких функций $\mathbf{f}_{(p)}(\nu_\mathbf{f})$ и $\mathbf{g}_{(p)}(\nu_\mathbf{g})$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}_{(p)}(\nu_\mathbf{f})|\mathbf{g}_{(p)}(\nu_\mathbf{g})) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} d^\times x\, \mathbf{f}^*_{(p)}(\nu_\mathbf{f}, x)\mathbf{g}_{(p)}(\nu_\mathbf{g}, x) = \\ &= \sum_{n_p=0}^{\infty} U_{n_p}(\cos(\arg \nu^*_{\mathbf{f},p}))U_{n_p}(\cos(\arg \nu_{\mathbf{g},p})) = \delta_{\nu_\mathbf{f},\nu_\mathbf{g}}, \end{aligned} \tag{61}$$

что является следствием полноты системы полиномов Чебышёва. Следовательно, их тензорные произведения $\mathbf{f}(\nu_\mathbf{f})$ и $\mathbf{g}(\nu_\mathbf{g})$ также ортогональны:

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}(\nu_\mathbf{f})|\mathbf{g}(\nu_\mathbf{g})) &= \prod_p (\mathbf{f}_{(p)}(\nu_\mathbf{f})|\mathbf{g}_{(p)}(\nu_\mathbf{g})) = \\ &= \prod_p \sum_{n_p=0}^{\infty} a^*_\mathbf{f}(p^{n_p})a_\mathbf{g}(p^{n_p}) = \sum_{n=1}^{\infty} a^*_\mathbf{f}(n)a_\mathbf{g}(n) = 0.\end{aligned} \tag{62}$$

Рассмотрим скалярное произведение (37) двух форм Мааса $\mathsf{M}_\mathbf{f} = \sqrt{y}\,\mathbf{f}(x+iy, \nu_\mathbf{f})$ и $\mathsf{M}_\mathbf{g} = \sqrt{y}\,\mathbf{g}(x+iy, \nu_\mathbf{g})$:

$$\langle \mathbf{f}(\nu_\mathbf{f})|\mathbf{g}(\nu_\mathbf{g})\rangle = \iint\limits_{\substack{-N/2<|x|\leqslant N/2,\\ |x+iy|>0}} \frac{dx\,dy}{y^2}(\sqrt{y}\,\mathbf{f}(x+iy,\nu_\mathbf{f}))^*\sqrt{y}\,\mathbf{g}(x+iy,\nu_\mathbf{g}).$$

К сожалению, мы не можем взять интегралы по фундаментальной области. Однако мы можем вычислить их в прямоугольнике $\{-N/2 < |x| \leqslant N/2,\ y > 0\}$, который содержит бесконечное число копий фундаментальной области $\mathcal{F}$. В силу модулярных свойств подынтегрального выражения и меры интегрирования все копии идентичны, поэтому мы должны получить исходный интеграл, умноженный на бесконечный коэффициент. Именно его мы и будем искать. Интеграл по x в

$$\langle \mathbf{f}(\nu_\mathbf{f})|\mathbf{g}(\nu_\mathbf{g})\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} a^*_\mathbf{f}(m)a_\mathbf{g}(n)\int_{-N/2}^{N/2} dx\, e^{2\pi i(n-m)x/N}\int_0^\infty \frac{dy}{y}K_0\left(\frac{2\pi my}{N}\right)K_0\left(\frac{2\pi ny}{N}\right)$$

[6)] Для модулярных форм веса $k=1$ скалярные произведения (38) и (41) совпадают.

равен нулю, если $m \neq n$, что дает δ_{mn}, в результате две различные формы Мааса ортогональны. Для интеграла по y используем выражение [25]

$$\int_0^\infty dy\, y^{-\mu} K_\alpha(ay) K_\beta(by) = \frac{a^{\mu-1-\beta} b^\beta}{2^{\mu+2}\Gamma(1-\mu)} \Gamma\left(\frac{1-\mu+\alpha+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu-\alpha+\beta}{2}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1-\mu+\alpha-\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu-\alpha-\beta}{2}\right) \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1-\mu+\alpha+\beta}{2}, \frac{1-\mu-\alpha+\beta}{2}, 1-\mu; 1-\frac{b^2}{a^2}\right),$$

верное при $\mathrm{Re}(a+b) > 0$, $\mathrm{Re}\,\mu < 1 - |\,\mathrm{Re}\,\alpha| - |\,\mathrm{Re}\,\beta|$. Искомый интеграл вычисляется в точности на границе условия для μ; аргументы всех Γ-функций действительно равны нулю, что дает расходящийся коэффициент. Таким образом, с точностью до бесконечного нормировочного коэффициента, возникающего из расходящихся Γ-функций, модулярные объекты, связанные с произведением L-функций ${}_2\mathsf{L}(s,\nu)$, являются ортогональными неаналитическими волновыми формами Мааса с нулевым модулярным весом. Это соответствует ортогональности (62), полученной из вейвлет-разложения.

Выражение для скалярного произведения в (62) можно соотнести со скалярным произведением соответствующего произведения L-функций (49), используя тождество

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt\, \frac{e^{it(\ln m - \ln n)}}{\sqrt{mn}} = \frac{\delta(\ln n - \ln m)}{\sqrt{mn}} = \delta_{mn}.$$

Следует отметить, что в этом тождестве, если в знаменателе стоит $m^\alpha n^{1-\alpha}$ с любым показателем $0 < \alpha < 1$, мы также имеем в результате δ_{mn}, однако только при $\alpha = 1/2$ это приводит к необходимым нам ниже свойствам скалярного произведения. Таким образом,

$$\langle \mathbf{f}(\nu_\mathbf{f}) | \mathbf{g}(\nu_\mathbf{g}) \rangle = \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_\mathbf{f}^*(n)\, a_\mathbf{g}(m) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \sum_{n=1}^\infty \frac{a_\mathbf{f}^*(n)}{m^{1/2-it}} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_\mathbf{g}(n)}{n^{1/2+it}} = \\ = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt\, {}_2\mathsf{L}_\mathbf{f}^*\left(\frac{1}{2} - it, \nu_\mathbf{f}\right) {}_2\mathsf{L}_\mathbf{g}\left(\frac{1}{2} + it, \nu_\mathbf{g}\right),$$

где в последней строке мы использовали аналитическое продолжение степенного ряда. Окончательное выражение можно понимать как скалярное произведение $\langle {}_2\mathsf{L}_\mathbf{f} | {}_2\mathsf{L}_\mathbf{g} \rangle$ L-функций, связанных с формами Мааса. Это тождество типа равенства Парсеваля, подобное (39) и (45). В итоге семейство произведений L-функций, заданных в (50), видимо, образует ортогональный набор функций (для фиксированного простого значения N). Тем не менее, хотя явный вид L-функций известен, проверить их ортогональность непросто. Можно показать (путем построения графиков в пакете `Mathematica`), что мнимая часть подынтегрального выражения нечетная, поэтому интеграл обращается в нуль при $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, однако его вещественная часть осциллирует с увеличивающейся амплитудой, что затрудняет численный расчет интеграла.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В представленной статье мы использовали ортонормированные базисы пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$, образованные вейвлетами из работы [6], для установления соответствия между комплекснозначными функциями (по одной функции для каждого простого числа p) и параболическими формами конгруэнц-подгруппы модулярной группы $SL(2,\mathbb{Z})$. Мы изучили получающиеся в результате разложения локальные функции (которые удобно назвать p-артонами, заимствуя термин из физики сильных взаимодействий), их преобразования Меллина и связанные с ними L-функции. Мы оставляем на будущее анализ действия группы $GL(2,\mathbb{Q}_p)$ на эти p-артоны. Кроме того, взяв произведение двух L-функций Дирихле, связанных с характером Дирихле и его комплексно сопряженным, мы определили функции, аналогичные этим модулярным L-функциям. Весьма удивительно, что они ведут себя так же, как неаналитические волновые формы Мааса с нулевым весом. Будучи по построению не совсем общими, такие функции, возможно, не представляют особого математического интереса, однако они могут послужить полезными модельными объектами для дальнейшего изучения соответствия, поскольку их исследование значительно проще.

Завершим статью следующим замечанием. Взаимно однозначное соответствие между параболической формой (комплекснозначной функцией в верхней половине комплексной плоскости) и вектором в (подпространстве пространства) $\otimes_p L^2(\mathbb{Q}_p)$ напоминает голографическое соответствие, которое в последние десятилетия занимает лидирующие позиции в теоретической физике. Конформная граница верхней полуплоскости $\mathbb{H} = SL(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ – это вещественная прямая $\mathbb{R}$. Она тесно связана с пространством $\mathbb{Q}_p$, которое можно рассматривать как конформную границу дерева Брюа–Титса, а оно, в свою очередь, является смежным классом группы $GL(2,\mathbb{Q}_p)$ по своей максимальной компактной подгруппе $GL(2,\mathbb{Z}_p)$. Связь между модулярной формой $f\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C}$ и произведениями $\otimes_p\mathfrak{f}_{(p)}$ (где $\mathfrak{f}_{(p)}\colon \mathbb{Q}_p\to\mathbb{C}$ есть комплекснозначная функция на $\mathbb{Q}_p$ для простого p) наводит на мысль о наличии соответствия типа балк–граница в голографии. Это так, поскольку данные для функции, действующей в “балке” верхней половины комплексной плоскости, лежат на “границе” $\otimes_p\mathbb{Q}_p$, которая, в свою очередь, связана с $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$. В этом контексте предлагаемое соответствие можно даже назвать *голографической p-артонной моделью* модулярных форм. Было бы интересно исследовать, существуют ли конформные теории поля (и их дуальные для балка), связанные с p-артонными объектами, а также неаналитическими волновыми формами Мааса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вейвлеты в пространстве $\mathbb{Q}_p^\times$

Определим модифицированные вейвлеты Козырева

$$\mathbf{\Psi}^{(p)}_{n,m,j}(x) = |x|_p^{1/2}\psi^{(p)}_{n,m,j}(x), \tag{П.1}$$

которые естественно считать заданными на $\mathbb{Q}_p^\times$, поскольку они ортонормированы относительно масштабно-инвариантной мультипликативной меры Хаара $d^\times x$:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\frac{dx}{|x|_p}\mathbf{\Psi}^{(p)}_{n,0,1}(x)\mathbf{\Psi}^{(p)}_{n',0,1}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} dx\,\psi^{(p)}_{n,0,1}(x)\psi^{(p)}_{n',0,1}(x) = \delta_{nn'}. \tag{П.2}$$

Заметим, что эти функции отличаются от вейвлетов Козырева (13) на зависящий от координаты множитель, поэтому они не равны константе $p^{-n/2}$ при $|x|_p < p^n$, хотя и являются локально постоянными функциями на $\mathbb{Q}_p$. Повышающие и понижающие операторы (18), (20) на них действуют так же, как $a_\pm^{(p)}$,

$$\mathbf{a}_\pm^{(p)}\boldsymbol{\Psi}_{n,0,1}^{(p)}(x) = \boldsymbol{\Psi}_{n\pm 1,0,1}^{(p)}(x), \qquad \mathbf{a}_+^{(p)}\boldsymbol{\Psi}_{1,0,1}^{(p)}(x) = 0,$$

однако мы предпочитаем использовать для этих операторов другие обозначения, чтобы подчеркнуть тот факт, что они действуют в другом функциональном пространстве. Преобразование Меллина (25) этих модифицированных вейвлетов,

$$\mathcal{M}_{(p,\omega)}[\boldsymbol{\Psi}_{n,0,1}^{(p)}](s) = \mathbf{c}_p(\ell,s)p^{ns} = -\biggl(\frac{1}{p(1-p^{-s-1/2})} - \frac{1}{p^{s+1/2}-1}\,\delta_{\ell,0} - \delta_{\ell,p-1}\biggr)p^{ns},$$

тоже несколько отличается от (27). Заметим, что

$$\sum_\ell |\mathbf{c}_p(\ell,s)|^2 = 1 + \frac{1-|p^s|^2}{|p^{s+1/2}-1|^2},$$

таким образом, если аргумент s чисто мнимый, сумма равна 1.

Благодарности. Д. Гошал представил предварительные результаты настоящей статьи (а также препринта [4]) на конференции “National String Meeting”, проводившейся в Indian Institute of Science Education and Research, Бхопал, Индия, 22–27 декабря 2019 г. Он хотел бы выразить свою благодарность Чандану Сингху Далавату и Виджаю Патанкару за полезные обсуждения. Мы особенно благодарны Кришнану Раджкумару за его многочисленные объяснения и ценные комментарии к рукописи.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] A. Dabholkar, *Ramanujan and quantum black holes*, arXiv: 1905.04060.

[2] A. Dabholkar, S. Nampuri, “Quantum black holes”, *Strings and Fundamental Physics* (Munich/Garching, Germany, July 25 – August 6, 2010), Lecture Notes in Physics, **851**, eds. M. Baumgartl, I. Brunner, M. Haack, Springer, Berlin, 2012, 165–232, arXiv: 1208.4814.

[3] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover, Mineola, NY, 2001.

[4] P. Dutta, D. Ghoshal, “Pseudodifferential operators on $\mathbf{Q}_p$ and L-series”, accepted for publication in *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, arXiv: 2003.00901.

[5] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.

[6] С. В. Козырев, “Теория всплесков как как p-адический спектральный анализ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158, arXiv: math-ph/0012019.

[7] A. Chattopadhyay, P. Dutta, S. Dutta, D. Ghoshal, “Matrix model for Riemann zeta via its local factors”, *Nucl. Phys. B*, **954** (2020), 37, 114996, arXiv: 1807.07342.

[8] D. Spector, “Supersymmetry and the Möbius inversion function”, *Commun. Math. Phys.*, **127**:2 (1990), 239–252.

[9] B. Julia, “Statistical theory of numbers”, *Number Theory and Physics*, Proceedings of the Winter School (Les Houches, France, August 7–16, 1989), Springer Proceedings in Physics, **47**, eds. J.-M. Luck, P. Moussa, M. Waldschmidt, Springer, Berlin, 1990, 276–293.

[10] I. Bakas, M. Bowick, "Curiosities of arithmetic gases", *J. Math. Phys.*, **32**:7 (1991), 1881–1884.

[11] B. L. Julia, "Thermodynamic limit in number theory: Riemann–Beurling gases", *Phys. A*, **203**:3–4 (1994), 425–436.

[12] P. Dutta, D. Ghoshal, "Phase operator on $L^2(\mathbb{Q}_p)$ and the zeroes of Fisher and Riemann", *Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications. The p-adic Methodology in STEAM-H*, STEAM-H: Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics & Health, eds. W. Zúñiga-Galindo, Bourama Toni, Springer, Cham, Switzerland, 2021, arXiv: 2102.13445.

[13] J. Lewis, D. Zagier, "Period functions for Maass wave forms. I", *Ann. Math.*, **153**:1 (2001), 191–258.

[14] Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972.

[15] Н. Коблиц, *Введение в эллиптические кривые и модулярные формы*, ИО НФМИ, Новокузнецк, 2000.

[16] E. J. Warner, *Modular forms and L-functions: a crash course*, https://www.math.columbia.edu/~warner/notes/ClassicalModularForms.pdf.

[17] A. Sutherland, "Modular forms and L-functions". https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/97521/18-783-spring-2013/contents/.

[18] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции*, Обобщенные функции, **6**, Наука, М., 1966.

[19] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, W. A. Zúñiga-Galindo, *Ultrametric Pseudodifferential Equations and Applications*, Encyclopedia Math. Appl., **168**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2018.

[20] P. Dutta, D. Ghoshal, A. Lala, "Enhanced symmetry of the p-adic wavelets", *Phys. Lett. B*, **783** (2018), 421–427, arXiv: 1804.00958.

[21] D. Goldfeld, J. Hundley, *Automorphic Representations and L-Functions for the General Linear Group*, v. 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **129**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[22] J. B. Conrey, W. Duke, D. W. Farmer, "The distribution of the eigenvalues of Hecke operators", *Acta Arith.*, **78**:4 (1997), 405–409, arXiv: math/9609214.

[23] J.-P. Serre, "Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p", *J. Amer. Math. Soc.*, **10**:1 (1997), 75–102.

[24] T. M. Apostol, *Introduction to Analytical Number Theory*, Springer, New York, 1976.

[25] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, рядов и произведений*, БХВ-Петербург, СПб., 2011.

Поступила в редакцию 4.04.2021,
после доработки 4.04.2021,
принята к публикации 10.06.2021