Б. Б. Венков, Унимодулярные решетки и сильно регулярные графы, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 129, 30–38

Б.Б.Венков

# УНИМОДУЛЯРНЫЕ РЕШЕТКИ И СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ

В настоящей работе изучается связь теории четных, унимодулярных, евклидовых решеток с теорией сильно регулярных графов. Такая связь найдена для двух случаев, а именно, для решеток размерности 32, имеющих систему корней типа $A_1$, и для экстремальных решеток размерности 48. В обоих случаях по заданной решетке конструируются сильно регулярные графы, которые имеют в первом случае параметры $n=8184, a=7595, c=7042, d=7130$. Такие же параметры имеют сильно регулярные графы, дополнительные к графам возникающим из некоторых систем "шестерок Штейнера". Во втором случае граф имеет параметры $n=2^3\cdot 7^2\cdot 47, a=2^3\cdot 3^2\cdot 23, c=2\cdot 139, d=17$. Первый параграф вспомогательный, во втором рассмотрен случай решеток размерности 32, а в третьем - размерности 48.

## § I. Основные уравнения.

В этом параграфе $\Lambda$ - четная, унимодулярная, евклидова решетка в $\mathbb{R}^{32}$, $Y=(\lambda\in\Lambda\,|\,(\lambda,\lambda)=2)$ - ее система корней. Мы будем предполагать, что она непуста и пусть $\alpha_0\in Y$ фиксированный корень. Введем следующие обозначения

$$Y_t=(\lambda\in Y\,|\,(\lambda,\alpha_0)=t).$$

Ясно, что $Y_t$ непусто только при $t=0,\pm1,\pm2$. Имеем $Y_2=\{\alpha_0\}$, $Y_{-2}=\{-\alpha_0\}$. Также очевидно, что всегда $Y_{-t}=-Y_t$. $Y_0$ есть подсистема корней в системе корней $Y$. Аналогично, обозначим

$$X=(\lambda\in\Lambda\,|\,(\lambda,\lambda)=4),$$

$$X_t=(\lambda\in X\,|\,(\lambda,\alpha_0)=t).$$

Ясно, что $X_t$ непусто только при $t=0,\pm1,\pm2$. Если $x\in X_2$, то $x-\alpha_0\in Y_0$ и наоборот, поэтому

$$X_2=\alpha_0+Y_0.$$

Также ясно, что

$$X_{-t}=-X_t.$$

В дальнейшем мы сосредоточим внимание на множестве $X_1$. Если $x\in X_1$, то $\tau x=\alpha_0-x$ опять принадлежит $X_1$, так что определено отображение

$$\tau : X_1 \longrightarrow X_1 ,$$

являющееся инволюцией без неподвижных точек. В частности, $X_1$, имеет всегда четную мощность. Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\alpha \in \Lambda \otimes R = R^{32}$ – произвольный вектор объемлющего евклидова пространства, ортогональный к $\alpha_0$, $(\alpha, \alpha_0) = 0$, тогда

$$\sum_{x \in X_1} (x,\alpha)^{2k+1} = 0, \quad k \in Z, \tag{I}$$

$$\sum_{x \in X_1} (x,\alpha)^2 = -2^2 \sum_{y \in Y_0} (y,\alpha)^2 + 2^3 \cdot 3 \cdot 19 \sum_{y \in Y_1} (y,\alpha)^2 - 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \sum_{y \in Y} (y,\alpha)^2 + \tag{2}$$
$$+ (-2^2 \cdot 3 \cdot 7 (\beta(\alpha_0) + 2^2) + 2^2 \cdot 3 (u_2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5))(\alpha,\alpha)$$

$$\sum_{x \in X_1} (x,\alpha)^4 = -2^5 3^2 \sum_{y \in Y_1} (y,\alpha)^4 - 2^4 \sum_{y \in Y_0} (y,\alpha)^4 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \sum_{y \in Y} (y,\alpha)^4 + 2^3 3^2 \cdot 5 (\alpha,\alpha) \sum_{y \in Y_1} (y,\alpha)^2 - \tag{3}$$
$$-2^2 3^2 (\alpha,\alpha) \sum_{y \in Y} (y,\alpha)^2 + (\alpha,\alpha) \left[ -2^2 \cdot 3^2 (2^2 + \beta(\alpha_0)) + 2 \cdot 3 u_2 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \right].$$

где $u_2 = |Y|$ – число корней, $\beta(\alpha_0) = \sum_{y \in Y_2 (y,\alpha_0) = 1} 1 = 2h - 4$, где $h$ – число Коксетера неприводимой компоненты системы корней $Y$, в которой лежит $\alpha_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (I) следует из существования инволюции $\tau$. Действительно,

$$\sum_{x \in X_1} (x,\alpha)^{2k+1} = \sum_{x \in X_1} (\tau x,\alpha)^{2k+1} = \sum_{x \in X_1} (-x,\alpha)^{2k+1} = -\sum_{x \in X_1} (x,\alpha)^{2k+1}.$$

Для доказательства формул (2) и (3) нужно воспользоваться результатами предыдущей работы [I], а именно основными уравнениями (формулы (2) и (3) из [I]). Приведем эти уравнения

$$\sum_{x \in X} (x,\alpha')^4 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19 \sum_{y \in Y} (y,\alpha')^4 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 (\alpha',\alpha') \sum_{y \in Y} (y,\alpha')^2 + 2^2 3^2 (\alpha',\alpha')^2 u_2 + \tag{4}$$
$$+ 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 (\alpha',\alpha')^2,$$

$$\sum_{x \in X} (x,\alpha')^6 = -2^5 \cdot 3^2 \sum_{y \in Y} (y,\alpha')^6 + 2^2 3^2 5^2 (\alpha',\alpha') \sum_{y \in Y} (y,\alpha')^4 - 2^2 3^3 5 (\alpha',\alpha')^2 \sum_{y \in Y} (y,\alpha')^2 + \tag{5}$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 5 (\alpha',\alpha')^3 u_2 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 (\alpha',\alpha')^3 .$$

Здесь $\alpha'$ любой вектор из объемлющего евклидова пространства. Пусть $\xi$ и $\eta$ числовые переменные. Возьмем в качестве $\alpha'$ вектор

$$\alpha' = \xi \alpha_0 + \eta \alpha$$

и рассмотрим для него уравнения (4), (5). При фиксированных $\alpha_0$ и $\alpha$ и переменных $\xi, \eta$ мы имеем полиномиальные тождества, в которых мы можем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $\xi^i \eta^j$. Например, приравняем коэффициенты при $\xi^2\eta^2$. Мы имеем

$$(\alpha,\alpha) = 2\xi^2 + (\alpha', \alpha')\eta^2 ,$$

поэтому в правой части равенства (4) мы получим

$$2^3\cdot 3\cdot 19\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\sum_{y\in Y}(y,\alpha_0)^2(y,\alpha)^2 - 2^4\cdot 3^2\cdot 7(\beta(\alpha_0)+2^2)(\alpha,\alpha) - 2^4\cdot 3^2\cdot 7\sum_{y\in Y}(y,\alpha)^2 +$$
$$+ 2^2\cdot 3^2(u_2 + 2\cdot 3^2\cdot 5)4(\alpha,\alpha).$$

В левой же части равенства (4) коэффициент при $\xi^2\eta^2$ будет

$$\frac{4\cdot 3}{2}\sum_{x\in X}(x,\alpha_0)^2(x,\alpha)^2 = 4\cdot 3\sum_{x\in X_1}(x,\alpha)^2 + 4\cdot 3\cdot 2^2\sum_{y\in Y_0}(y,\alpha)^2 .$$

Это и дает формулу (2). Формула (3) доказывается аналогично, приравниванием коэффициентов при $\xi^4\eta^2$ в (5).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть система корней решетки $\Lambda$ есть $A_1$, т.е. $Y = \{\pm\alpha_0\}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}^{32}$, ортогонального к $\alpha_0$, имеем

$$\sum_{x\in X_1}(x,\alpha)^2 = 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11(\alpha,\alpha), \tag{6}$$

$$\sum_{x\in X_1}(x,\alpha)^4 = 2^2\cdot 3\cdot 7^2(\alpha,\alpha)^2 . \tag{7}$$

## § 2. Построение сильно регулярного графа.

Пусть $\Lambda\subset\mathbb{R}^{32}$ – четная, унимодулярная, евклидова решетка в $\mathbb{R}^{32}$, система корней которой есть $A_1$, т.е. состоит из двух корней $\pm\alpha_0$. Обозначим, как и прежде, через $X_1$ множество таких $x\in\Lambda$, что

$$(x,x) = 4$$

и

$$(x,\alpha_0) = 1 .$$

ЛЕММА I. Множество $X_1$ состоит из $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 31 = 16368$ элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим простейшее из основных уравнений работы [I] (формула (I) из [I]). Оно имеет вид

$$\sum_{x\in X}(x,\alpha')^2 = -2^4\cdot 3\cdot 11\sum_{y\in Y}(y,\alpha')^2 + 2^2\cdot 3\cdot 5(\alpha',\alpha')u_2 +$$

$$+2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 17(\alpha',\alpha'),$$

где $\alpha'$ - любой вектор из $\mathbb{R}^{32}$. В нашем случае $Y$ состоит из двух элементов $\pm\alpha_0$, $u_2=2$. Возьмем $\alpha'=\alpha_0$, тогда получим

$$2\sum_{x\in X_1}1 = -2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 2 + 2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 17\cdot 2,$$

т.е. $|X_1| = 16368$. Лемма доказана.

Если $x\in X_1$, то

$$\tau x = \alpha_0 - x$$

также принадлежит $X_1$; таким образом, на $X_1$ действует инволюция $\tau$, которая, очевидно, не имеет неподвижных точек. Обозначим через $\overline{X}_1$ пространство орбит относительно этого действия, т.е. элементом $\overline{X}_1$ является пара $(x,\tau x)$, где $x\in X_1$. Ясно, что $\overline{X}_1$ состоит из $8184$ элементов.

ЛЕММА 2. Если $x_1,x_2\in X_1$, то скалярное произведение $(x_1,x_2)$ может принимать только следующие значения $4,2,1,0,-1,-3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $x_1, x_2\in X$, то $(x_1,x_2)$ может равняться только $0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4$. Мы должны исключить случаи, когда $(x_1,x_2)=-4,+3,-2$. Пусть $(x_1,x_2)=-4$, тогда $x_2=-x_1$ и $(x_2,\alpha_0)=-(x_1,\alpha_0)=-1$, что невозможно. Если $(x_1,x_2)=-2$, то рассмотрим $y=x_1+x_2-\alpha_0$. Имеем $(y,y)=(x_1+x_2-\alpha_0,x_1+x_2-\alpha_0)=2$, т.е. $y$ есть корень решетки $\Lambda$, поэтому $y=\pm\alpha_0$. Если $y=\alpha_0$, то $x_1+x_2=2\alpha_0$, что невозможно, так как $(x_1+x_2,x_1+x_2)=4$, а $(2\alpha_0,2\alpha_0)=8$. Если же $y=-\alpha_0$, то $x_1+x_2=0$ что также невозможно. Наконец, если $(x_1,x_2)=3$, то $y=x_1-x_2$ есть снова корень решетки $\Lambda$, ортогональный к $\alpha_0$, что невозможно. Лемма доказана.

Заметим, что случай $(x_1,x_2)=-3$ возможен и реализуется тогда и только тогда, когда $x_2=\tau x_1$, т.е. когда $x_1$ и $x_2$ определяют один и тот же элемент из $\overline{X}_1$. Заметим еще, что

$$(\tau x_1,\tau x_2) = (x_1,x_2),$$

$$(x_1,\tau x_2) = (\tau x_1,x_2) = 1-(x_1,x_2).$$

Введем на множестве $\overline{X}_1$ следующую структуру графа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два элемента $\overline{x}_1,\overline{x}_2\in\overline{X}_1$ назовем смежными, если

$$(x_1,x_2)=0 \qquad \text{или } 1$$

для любых представителей $x_1$ (соотв. $x_2$ ) из класса $\overline{x}_1$ (соотв. $\overline{x}_2$ ). Полученный граф будем обозначать через $G(\Lambda)$ . Вышесказанное показывает корректность этого определения.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Граф $G(\Lambda)$ сильно регулярен и имеет следующие параметры $n=8184,\ a=7595,\ c=7042,\ d=7130$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем сначала обозначения из теории графов. Мы рассматриваем только конечные неориентируемые графы без петель. Такой граф задается множеством вершин и множеством ребер, соединяющих пары смежных вершин. Граф называется регулярным, если число вершин смежных с фиксированной вершиной $p$ не зависит от $p$ , это число называется валентностью однородного графа. Граф называется сильно регулярным, если он регулярен и обладает тем свойством, что число вершин, смежных вершинам $p_1$ и $p_2$ зависит лишь от того, смежны эти вершины или нет. Параметрами сильно регулярного графа являются $(n, a, c, d)$ , где $n$ - число вершин графа, $a$ - валентность, $c$ - число вершин, смежных с $p_1$ и $p_2$ , если $p_1$ и $p_2$ смежны, т.е. число треугольников с заданным ребром, наконец, $d$ есть число вершин смежных с $p_1$ и $p_2$ , если $p_1$ и $p_2$ несмежны. Граф задается своей матрицей смежности: строки и столбцы матрицы $A$ занумерованы вершинами графа и $a_{p_1,p_2}=1$ , если $p_1$ и $p_2$ смежны и $a_{p_1,p_2}=0$ в противном случае. Условие регулярности графа эквивалентно равенству

$$AF=aF\ , \tag{8}$$

где $F$ - матрица, состоящая из единиц, а $a$ - валентность. Условие сильной регулярности эквивалентно (8) и следующему равенству

$$A^2=aE+cA+d(F-E-A)\ ,$$

где $c$ и $d$ были определены выше, а $E$ - единичная матрица. В частности матрица смежности сильно регулярного графа имеет не более трех различных собственных значений: $a$ с кратностью I и два корня уравнения

$$\rho^2=(a-d)+(c-d)\rho\ .$$

Кратности этих двух собственных значений вычисляются через параметры сильно регулярного графа по формулам

$$f_1, f_2=\frac{1}{2}\left[n-1\pm\frac{(n-1)(d-c)-2a}{\sqrt{(d-c)^2+4(a-d)}}\right].$$

Так как они должны быть целыми неотрицательными числами, то это накладывает сильные ограничения на параметры сильно регулярных графов. По поводу всего этого см. [3] и указанную там литературу.

Вернемся к доказательству теоремы. Приведем сначала более удобное описание для графа $G(\Lambda)$. Для этого перенесем $X_1$ на вектор $-\frac{1}{2}\alpha_0$, т.е. каждому $x \in X_1$ сопоставим $\ell(x) = x - \frac{1}{2}\alpha_0$. Так как $(\ell(x), \alpha_0) = 0$, то множество $\ell(X_1)$ будет лежать в гиперплоскости, ортогональной к $\alpha_0$. Множество $\ell(X_1)$ оказывается центрально-симметричным и инволюция $\tau$ на $X_1$ переходит в умножение на $-1$ в $\ell(X_1)$. Кроме того имеем

$$(\ell(x_1), \ell(x_2)) = (x_1, x_2) - \frac{1}{2}.$$

Обозначим $\ell(X_1)$ через $L$. Таким образом, $L$ состоит из $16368$ элементов, $L$ - центрально-симметрично, каждый элемент из $L$ имеет норму $(\ell, \ell) = \frac{7}{2}$, и скалярное произведение $(\ell_1, \ell_2)$ для $\ell_1, \ell_2 \in L$ принимает значения $\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$. Вершины графа $G(\Lambda)$ можно отождествить с парами $\pm\ell$, $\ell \in L$ и две вершины $\pm\ell$ и $\pm\ell_2$ смежны тогда и только тогда, когда

$$(\ell_1, \ell_2) = \pm\frac{1}{2}.$$

Множество вершин в $G(\Lambda)$ будем обозначать через $\frac{1}{2}L$ - это элементы $L$ рассматриваемые с точностью до знака. Обозначим через $A$ матрицу смежности графа $G(\Lambda)$ : $\ell_1, \ell_2 \in \frac{1}{2}L$, то

$$a_{\ell_1,\ell_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } (\ell_1, \ell_2) = \pm\frac{1}{2} \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Обозначим через $V$ следующую матрицу

$$V_{\ell_1,\ell_2} = (\ell_1, \ell_2)^2.$$

Ясно, что матрица $V$ следующим образом выражается через матрицу смежности $A$ :

$$V = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 A + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 E + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 (F - E - A) = \qquad (9)$$

$$= -2A + 10E + \frac{9}{4}F.$$

Здесь $E$ - единичная матрица, $F$ матрица все элементы которой равны $1$. Применим теперь основные равенства (6) и (7):

$$\sum_{x \in X_1} (x, \alpha)^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 (\alpha, \alpha) \qquad (10)$$

$$\sum_{x \in X_1} (x, \alpha)^4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 (\alpha, \alpha)^2. \qquad (11)$$

Здесь $\alpha$ - произвольный вектор, ортогональный к $\alpha_0$. Из равенства (II) обычной симметризацией получаем также равенство

$$\sum_{x\in X_1}(\alpha',x)^2(x,\alpha'')^2 = 2\cdot 7^2(2(\alpha',\alpha'')^2+(\alpha',\alpha')(\alpha'',\alpha'')) \qquad (12)$$

где $\alpha',\alpha''$ - произвольные векторы, ортогональные к $\alpha_0$. Из (10) и (12) следует, что

$$\sum_{\ell\in L}(\ell,\alpha)^2 = 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11(\alpha,\alpha)$$

$$\sum_{\ell\in L}(\alpha',\ell)^2(\ell,\alpha'')^2 = 2\cdot 7^2(2(\alpha',\alpha'')+(\alpha',\alpha')(\alpha'',\alpha'')),$$

а также

$$\sum_{\ell\in\frac{1}{2}L}(\ell,\alpha)^2 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11(\alpha,\alpha)$$

$$\sum_{\ell\in\frac{1}{2}L}(\alpha',\ell)^2(\ell,\alpha'')^2 = 7^2(2(\alpha',\alpha'')+(\alpha',\alpha')(\alpha'',\alpha'')).$$

Положим в этих равенствах $\alpha=\ell_0,\ \alpha'=\ell_1,\ \alpha''=\ell_2\in\frac{1}{2}L$ (это можно сделать, так как $L$ ортогонально к $\alpha_0$). Тогда получим

$$\sum_{\ell\in\frac{1}{2}L}(\ell,\ell_0) = 2\cdot 3\cdot 7^2\cdot 11$$

$$\sum_{\ell\in\frac{1}{2}L}(\ell_1,\ell)^2(\ell,\ell_2)^2 = \frac{7^4}{4}+2\cdot 7^2(\ell_1,\ell_2)^2$$

для любых $\ell_0,\ell_1,\ell_2\in L$. На матричном языке эти равенства означают

$$V\cdot F = 2\cdot 3\cdot 7^2\cdot 11F,$$

$$V^2 = \frac{7^4}{4}F + 2\cdot 7^2 V.$$

Подставляя в эти формулы выражения для $V$ из (9) и пользуясь тем, что $F^2=8184F$, получим

$$AF = FA = 5\cdot 7^2\cdot 31F \qquad (13)$$

$$A^2 + 2^3\cdot 11A - 3\cdot 5\cdot 31E - 2\cdot 5\cdot 7\cdot 13F = 0. \qquad (14)$$

Равенство (13) показывает, что $G(\Lambda)$ - регулярный граф валентности $5\cdot 7^2\cdot 31$, а (13) и (14) показывают, что $G(\Lambda)$ - сильно регулярный граф с параметрами указанными в теореме. Теорема доказана. Заметим, что собственными значениями матрицы смежности графа являются $5\cdot 7^2\cdot 31, +5, -93$. Дополнительный граф к графу $G(\Lambda)$

также сильно регулярен. Он имеет следующие параметры $n'=8184$, $a'=588$, $c'=122$, $d'=36$.

Из известных примеров сильно регулярных графов в такие же параметры как у дополнительного графа к $G(\Lambda)$ имеют сильно регулярные графы, получающиеся из некоторых геометрий Штейнера. Напомним, что конечная геометрия, т.е. множество точек и множество прямых называется геометрией Штейнера, или системой Штейнера, если через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая и любые две прямые состоят из одинакового числа точек. Заметим, что не требуется, чтобы две прямые всегда пересекались. Наиболее известные системы Штейнера это "тройки Штейнера", когда каждая прямая состоит из трех точек. С любой геометрией Штейнера можно ассоциировать граф следующим образом: вершины графа-прямые, две вершины смежны, если соответствующие прямые пересекаются. Получающийся граф всегда сильно регулярен и его параметры легко вычисляются через параметры геометрии (см [3] ). Рассмотрим следующую систему "шестерок Штейнера" - геометрию Штейнера со следующими параметрами: число точек $496$, число точек на прямой $6$, число прямых проходящих через заданную точку $99$. Граф ассоциированный с такой геометрией, является сильно регулярным графом с такими же параметрами, как у графа, дополнительного к $G(\Lambda)$, а именно $n=8184$, $a=588$, $c=122$, $d=36$. Таким образом, возникает естественный вопрос, который мы не будем обсуждать в настоящей работе: для решетки рассматриваемого типа (т.е. с $u_2=2$ ) не существует ли геометрии "шестерок Штейнера" на 496 точках такой, чтобы граф этой геометрии был изоморфен графу дополнительному к $G(\Lambda)$ ?

## § 3. Случай экстремальных решеток размерности 48.

Существуют и другие случаи, когда четной унимодулярной решетке можно сопоставить сильно регулярные графы. Наиболее интересным из них является случай экстремальных решеток размерности 48. Пусть $\Lambda$ такая решетка. Это означает, что $\Lambda$ - четная, унимодулярная, евклидова решетка в $R^{48}$, для которой $(\lambda,\lambda)\geqslant 6$ для всех $\lambda\in\Lambda$, $\lambda\neq 0$. Это наиболее интересные унимодулярные решетки размерности 48. Обозначим через $\Lambda_6$ множество кратчайших векторов решетки $\Lambda$ :

$$\Lambda_6 = (\lambda\in\Lambda \mid (\lambda,\lambda)=6).$$

Зафиксируем два элемента $\alpha$, $\beta\in\Lambda_6$ таких, что $(\alpha,\beta)=3$. Обозначим через $E^{p,q}$ множество тех $\lambda\in\Lambda_6$ для которых

$$(\lambda, \alpha) = p$$

$$(\lambda, \beta) = q$$

и рассмотрим следующее множество

$$M_{\alpha,\beta} = E^{3,3} \cup E^{3,2} \cup E^{3,6}$$

(последнее множество $E^{3,6}$, очевидно, состоит только из $\beta$ ). Введем в это множество структуру графа. Множество вершин есть $M_{\alpha,\beta}$ и две вершины $x$ и $y$ смежны, если $(x,y) = 2$ или $1$ .

ТЕОРЕМА. Граф $M_{\alpha,\beta}$ сильно регулярен и имеет параметры $n = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 47$, $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 23$, $c = 2 \cdot 139$, $d = 17$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы с той разницей, что нужно воспользоваться основными уравнениями, выведенными в работе [2] . Мы опустим подробности.

## Литература


1. В е н к о в Б.Б. О четных унимодулярных евклидовых решетках размерности 32. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1982, т.116, с.44-55.
2. В е н к о в Б.Б. О четных унимодулярных экстремальных решетках. - Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1983, т.165, с.33-47
3. К а м е р о н П., В а н Л и н т Дж. Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М., 1980, 139 с.



Venkov B.B. Unimodular lattices and strongly regular graphs.

New connections are found between unimodular even lattices and strongly regular graphs. Two cases are considered: the case of lattices of dimension 32 with root sistem of type $A_1$ and the case of extremal lattice of dimension 48. In both cases strongly regular graphs are constructed from a given lattice. In the first case these graphs have the same parameters as the graphs arising from some Steiner geomerties.