В. И. Арнольд, А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, И. М. Кричевер, А. Н. Варченко, Р. Л. Добрушин, А. А. Бармин, С. В. Манаков, В. А. Малышев, Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев, Заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 2, 225–231

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМ. И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 28 сентября 1977 г.

1. В. И. Арнольд «Неравенства Петровского — Олейник и индекс особой точки векторного поля».

Из недавно полученной Д. Эйзенбумом, Г. Левиным и В. Химшиашвили формулы для индекса особой точки векторного поля вытекает следующее обобщение неравенств Петровского — Олейник.

Рассмотрим в действительном пространстве размерности p векторное поле, у которого каждая компонента — однородный многочлен степени k. Тогда индекс особой точки 0 векторного поля не превосходит числа целых точек строго внутри куба $(0, k+1)^p$, лежащих на гиперплоскости, перпендиклярной главной диагонали в центре куба.

Эта оценка содержит неравенства Петровского и Олейник как в случае четного, так и в случае нечетного числа измерений. Из точности неравенства Петровского для кривых следует точность этой оценки в трехмерном пространстве. На плоскости оценка также точна; точна ли она в пространствах четырех и более измерений, неизвестно.

В докладе было рассказано об оценках индекса особой точки векторного поля (в частности, градиентного) и о связях этой задачи с неравенствами Петровского — Олейник, с одной стороны, и со смешанными структурами Ходжа особенностей, введенными П. Делинем и Дж. Стинбринком,— с другой.

Заседание 5 октября 1977 г.

1. А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский «Некоторые математические задачи теории колебаний тонких упругих оболочек».

1°. Свободные колебания тонкой упругой оболочки приводят к задаче на собственные значения следующего вида:

$$h^2 N_{ij} u_j + L_{ij} u_j = \lambda u_i \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$l_1 |_\Gamma = l_2 |_\Gamma = n_1 |_\Gamma = n_2 |_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь L_{ij} — дифференциальные операторы не выше второго порядка, N_{ij} — не выше четвертого. Указанные операторы содержат дифференцирования по двум независимым переменным. Их явный вид можно найти, например, в [1] и [2]. Граничные условия (2) определяются характером закрепления оболочки. h — малый параметр — относительная толщина оболочки. Задача (1), (2) является самосопряженной и приводит к дискретному спектру: $0 \leqslant \lambda_1(h) \leqslant \lambda_2(h) \leqslant \ldots$, уходящему в $+\infty$ при каждом $h \neq 0$. Как доказано в [3] (см. также [2], [4]) для функции распределения $n_h(\lambda)$ собственных значений задачи (1), (2) справедлива при $h \to 0$ следующая формула:

$$n_h(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2 h} \left[\iint\limits_G \left(\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} \sqrt{\lambda - \Omega(\theta, \alpha, \beta)}\, d\theta \right) dS + O(h^\gamma) \right], \tag{3}$$

где $\Omega(\theta, \alpha, \beta)$ — определитель главного символа оператора $L = (L_{ij})$, в (1); $(\xi_1, \xi_2) = |\xi|(\cos\theta, \sin\theta)$. Вопрос о точности O-члена в (3) обсуждается в [2] (стр. 37, 137). Было бы желательно усилить оценку остаточного члена в (3), а в случае разделяющихся переменных найти следующий регулярный член $C(\lambda)\, h^{-1/2}$. Недавно в [5] формулы типа (3) были получены (без оценки остаточного члена) для широкого класса эллиптических задач с тем же характером вырождения.

2°. Показано, что при $h \to 0$ задача (1), (2) вырождается в безмоментную, которая получается, если в (1) и (2) положить $h = 0$ и отбросить последние два граничных условия в (2) (по этому поводу см. [2] и [6]). В последней работе этот факт доказан в общем случае. Вырожденная (безмоментная) задача имеет зоны непрерывного спектра. Они состоят из тех и только тех значений λ, при которых нарушаются условия эллиптичности вырожденной задачи. В этих зонах плотность спектра исходной (моментной) задачи особенно велика. Было бы желательно найти более точные, чем в [2], оценки уклонения вынужденных колебаний, рассчитанных по моментной и безмоментной теориям с учетом внутреннего трения.

3°. Собственные значения $\lambda(h)$ называются сверхнизкими, если $\lambda(h) \to 0$ при $h \to 0$. Исследованию соответствующей важной проблемы посвящены статьи [6] и [7]. Дальнейший анализ сверхнизких частот и соответствующих форм требует значительных усилий.

4°. В случае разделяющихся переменных распределение спектра возникающих одномерных задач проанализировано достаточно полно (см., например, [2], [8]). В этом случае удается найти интересную зависимость числа нулей прогиба от номера собственной формы [9] и исследовать явление внутреннего резонанса в окрестности безмоментного собственного значения [10]. Разложение в обобщенный интеграл Фурье (в эффективной форме) в случае одномерной задачи найдено независимо в [11] и [12]. Аналогичное разложение в случае уравнения Максвелла получено независимо в [13]. Желательно найти эффективное разложение (с описанием структуры собственных функций вырожденной задачи) в двумерном случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, М., «Наука», 1976.

[2] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, Распределение собственных частот тонких упругих оболочек, М., «Наука», 1974.

[3] А. Г. Асланян, В. Н. Туловский, Асимптотическое распределение собственных частот упругих оболочек, ДАН **208**:4 (1973), 801—804.

[4] А. Г. Асланян, З. Н. Кузина, В. Б. Лидский, В. Н. Туловский, Распределение собственных частот тонкой упругой оболочки произвольного очертания, ПММ, **37**:4 (1973), 604—617.

[5] А. Б. Алексеев, М. Ш. Бирман, Асимптотика спектра эллиптических граничных задач с разрешимыми связями, ДАН **230**:3 (1976), 505—507.

[6] А. Г. Асланян, Связь моментной задачи с безмоментной в теории колебаний тонких упругих оболочек, МТТ, № 5 (1977), 118—124.

[7] А. Л. Гольденвейзер, Изгибание поверхностей и сверхнизкие частоты колебаний тонких оболочек, МТТ, № 5 (1977), 106—117.

[8] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, Формула для числа частот осесимметричных колебаний оболочек вращения, Дифф. уравн. **8**:8 (1977), 1355—1365.

[9] Д. Г. Васильев, О нулях прогиба в теории оболочек вращения, ДАН **237**:4 (1977).

[10] А. Е. Даин, Н. В. Харькова, С. А. Луковенко, К проблеме внутренних резонансов в теории колебаний тонких оболочек, Препринт № 97, Институт проблем механики АН СССР, М., 1977, 1—52.

[11] Г. Г. Тарпошян, Разложение по собственным функциям безмоментной задачи в случае осесимметричных колебаний тонкой оболочки, Функц. анализ **11**:1 (1977), 83—84.

[12] П. Е. Товстик, М. И. Улитин, О разложении вектор-функций в зоне непрерывного спектра безмоментных уравнений осесимметричных колебаний оболочек вращения, Вестн. ЛГУ, № 1 (1977), 114—119.

[13] А. Л. Крылов, Е. Н. Фёдоров, О собственных колебаниях ограниченного объема замагниченной холодной плазмы, ДАН 231:1 (1976), 68—70.

Заседание 12 октября 1977 г.

1. И. М. Кричевер «Рациональные решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили».

В докладе излагается процедура интегрирования уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\right)=0$$

в классе рациональных по переменной x функций $u(x, y, t)$, убывающих при $x\to\infty$

Это уравнение относится к классу так называемых уравнений Захарова—Шабата, т. е. уравнений на коэффициенты операторов $L_1=\sum_{i=0}^{n} u_i(x, y, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$, $L_2=\sum_{i=0}^{m} v_i(x, y, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$, эквивалентных операторному уравнению $\left[L_1-\frac{\partial}{\partial y}, L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0$. В частности, если $L_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x, y, t)$, а $L_2=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+\omega(x, y, t)$, то эти уравнения имеют вид $\frac{3}{2}(u_y+u_{xx})=2\omega_x$, $\omega_y-u_t=\omega_{xx}-\frac{3}{2}uu_x-u_{xxx}$. Исключая из этой системы ω, получаем для u уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП

Теорема 1. *Функция $u(x, y, t)$ является рациональным по x решением уравнения КП, убывающим при $x\to\infty$, тогда и только тогда, когда $u=-2\sum_{j=1}^{N}(x-x_j(y, t))^{-2}$ и найдется функция*

$$\psi(x, y, t, k)=\left(1+\sum_{j=1}^{N}a_j(k, y, t)(x-x_j(y, t))^{-1}\right)e^{kx+k^2y+k^3t} \tag{1}$$

такая, что для приведенных выше операторов выполняются равенства $\left(L_1-\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi=\left(L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=0$, где

$$\omega(x, y, t)=\sum_{j=1}^{N}\left[3(x-x_j(y, t))^{-3}+\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}x_j(y, t)(x-x_j(y, t))^{-2}\right].$$

Условие существования у нестационарного уравнения Шрёдингера решений вида (1) эквивалентно утверждению

Следствие 1. *Динамика полюсов $x_j(y, t)$ рациональных решений уравнения КП по переменной y совпадает с динамикой мозеровской системы частиц с гамильтонианом*

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}p_j^2+2\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{-2}.$$

В работе [1] была показана полная интегрируемость этой гамильтоновой системы, т. е. был найден набор N интегралов H_k в инволюции $H_2=H$.

Следствие 2. *Динамика полюсов по переменной t совпадает с гамильтоновым потоком, соответствующим интегралу H_3.*

Таким образом, уравнения на полюса $x_j(y, t)$ рациональных решений уравнения КП эквивалентны уравнениям двух коммутирующих гамильтоновых потоков. Решения с N полюсами, где N — любое, задаются точками фазового пространства $x_j(0, 0)$ и $\frac{\partial}{\partial y} x_j(0, 0)$. Мы укажем другой набор $2N$ параметров, через которые $u(x, y, t)$ выражаются явно.

Впервые связь движения полюсов рациональных решений уравнения КдФ и движения гамильтоновой системы частиц была обнаружена в работе [2].

Функция $\psi(x, y, t, k)$, существование которой утверждает теорема 1, может быть преобразована к виду

$$\psi(x, y, t, k) = \left(1 + \frac{q(x, y, t, k)}{q_1(k)}\right) e^{kx+k^2y+k^3t},$$

где $q_1(k)$ и $q(x, y, t, k)$ — полиномы по k степеней N и не выше $N-1$ соответственно.

Л е м м а. *Для почти всех решений $u(x, y, t)$ найдутся N различных точек $\varkappa_s$ таких, что* $\frac{\partial}{\partial k} \psi(x,y,t, k)|_{k=\varkappa_s} = 0$.

Полином $q_1(k)$ и набор точек однозначно определяют функцию $\psi(x, y, t, k)$ и позволяют однозначно восстановить $u(x, y, t)$.

Т е о р е м а 2. *Почти все рациональные решения $u(x, y, t)$ уравнения КП, убывающие при $x \to \infty$, даются формулой $u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \theta$, где матричные элементы равны*

$$\theta_{si} = (x + 2\varkappa_s y + 3\varkappa_s^2 t)\, \varkappa_s^i + i\varkappa_s^{i-1} - \varkappa_s^i \left(\frac{\partial}{\partial k} \ln q_1(k)\, |_{k=\varkappa_s}\right).$$

Здесь «почти все» означает, что найдено $2N$-мерное многообразие решений, из которого выкинуты точки, соответствующие совпадающим: $\varkappa_i = \varkappa_j$, $i \neq j$.

Аналогично, если заменить в показателе экспоненты у ψ k^2 и k^3 на произвольные полиномы $Q(k)$ и $R(k)$, то получаются рациональные решения общих уравнений Захарова — Шабата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. M o s e r, Three integrable hamiltonian systems connected with isospectrum deformations, Adv. Math. 16 (1976), 354.

[2] H. A i r a u l t, H. M c K e a n, J. M o s e r, Rational and elliptic solutions of the Korteweg de Vries equation and a related many body problem, preprint of Kurant ins. 1976.

Заседание 19 октября 1977 г.

1. А. Н. В а р ч е н к о «Асимптотики осциллирующих интегралов».

В докладе был дан обзор результатов о связи асимптотического поведения интегралов вида

$$\int e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\, dx$$

при $\tau \to \infty$ с различными алгебраическими характеристиками критических точек функции $f(x)$.

Заседание 26 октября 1977 г.

1. Р. Л. Д о б р у ш и н «Динамика бесконечных систем механических частиц».

Предметом статистической механики является исследование систем из очень большого числа взаимодействующих частиц. При математическом описании этой ситуации удобно переходить к рассмотрению бесконечных систем частиц. В равновесной статистической механике оправдал себя подход, при котором состояние системы описывается вероятностной мерой в пространстве локально-конечных (т. е. имеющих конечное пересечение с любым ограниченным множеством) конфигураций одинаковых неразличимых частиц.

В последние годы аналогичный подход начинает интенсивно разрабатываться и в применении к неравновесной статистической механике. Первой естественной задачей является построение динамической системы в фазовом пространстве, образуемом «достаточно широкой» совокупностью локально-конечных конфигураций частиц, для каждой из которых указана ее скорость. Эта динамика должна задаваться как (слабый) предел обычных гамильтоновых динамик конечных систем частиц. Такая предельная динамика была впервые построена для частиц в одномерном пространстве и в предположении о гладкости потенциала Ланфордом. Недавно докладчику совместно с Й. Фритцем (Венгрия) удалось распространить эти результаты на случай физически более реалистичных потенциалов с сильным отталкиванием близких частиц, а также на случай частиц в двумерном пространстве. Никаких результатов для физически реального трехмерного случая пока нет.

После задания динамики бесконечной системы можно определить и индуцируемую ей эволюцию вероятностных мер P_t, $-\infty < t < \infty$, на фазовом пространстве. Эту эволюцию можно описать при помощи системы слабых уравнений Лиувилля, описывающих дифференциальное изменение по t средних значений $\int \varphi(x)\, P_t(dx)$, где φ — гладкие финитные функции на фазовом пространстве. Существование решения этой системы уравнений следует из существования динамики. Единственность (в некотором естественном классе мер) может быть выведена из того факта, что динамика задает в некотором смысле характеристики системы уравнений Лиувилля в той же ситуации, когда доказано существование динамики (докладчик и Ю. М. Сухов). В статистической физике обычно описывают эволюцию меры P_t в терминах ее моментных характеристик, называемых корреляционными функциями. При этом уравнения Лиувилля оказываются эквивалентными рассматриваемой в статистической физике цепочке уравнений Боголюбова (или ББГКИ-цепочке — в другой терминологии). Из описанных выше фактов следует существование и единственность решения уравнения Боголюбова в слабом смысле. Вопрос о существовании решения в сильном смысле сводится к вопросу о том, сохраняется ли в ходе эволюции существование корреляционных функций. Это удается доказать (докладчик и Ю. М. Сухов) при дополнительных предположениях о начальной мере P_0.

Заседание 2 ноября 1977 г.

1. А. А. Бармин «Ионизующие ударные волны в электромагнитном поле».

В докладе на примере ионизующих ударных волн в электромагнитном поле рассмотрен новый тип сильных разрывов, для которых процессы перед и за разрывом описываются различными системами дифференциальных уравнений. При этом число основных граничных условий на поверхности разрыва, следующих из интегральных законов сохранения, не совпадает с числом дифференциальных уравнений, и возможны типы разрывов, для эволюционности которых основных граничных условий недостаточно. Полную систему граничных условий, обеспечивающих эволюционность таких разрывов, предлагается получать из условий существования решения задачи о структуре разрыва, т. е. существования решения более полной системы уравнений, описывающего изменения величин в «размытом» скачке. Это решение ищется в виде бегущей волны, т. е. $u_i = f_i(\xi)$, где $\xi = x - Ut$, x — координата, нормальная к поверхности разрыва, t — время. При $\xi \to \pm\infty$ величины u_i стремятся к различным постоянным значениям, соответствующим граничным значениям на разрыве для начальной системы.

По определению перед ионизующей ударной волной процессы описываются системой идеальных уравнений газовой динамики и уравнениями Максвелла, за волной — идеальными уравнениями магнитной гидродинамики с бесконечной электропроводностью. В зависимости от соотношений между скоростью разрыва и скоростями малых возмущений возможны 8 типов ионизующих ударных волн. Для их эволюционности, кроме основных граничных условий, следует выставлять от 0 до 4 дополнительных условий в зависимости от типа волны.

Задача о структуре ионизующих ударных волн рассмотрена на основании одномерной стационарной системы уравнений магнитной гидродинамики с конечными вязкостями, теплопроводностью и электропроводностью σ (динамическая система шести уравнений первого порядка). При этом считается, что функция $\sigma = \sigma(\rho, T)$ такая, что $\sigma = 0$ в некоторой области значений плотности (ρ) и температуры (T).

Доказано, что для шести типов волн число соотношений, вытекающих из условия существования единственного решения задачи о структуре, совпадает с числом уравнений, требуемых эволюционностью разрыва. Для двух типов волн решение задачи о структуре не существует. В предельном случае большой магнитной вязкости по сравнению с другими диссипативными коэффициентами дополнительные соотношения получены в явном виде.

В отличие от газовой динамики, где ударные волны характеризуются одним параметром, ионизующие ударные волны различных типов характеризуются различным числом параметров. При этом возможны двух- и трехпараметрические волны, которые естественно рассматривать как слившиеся однопараметрические. В рассмотренной автомодельной нестационарной задаче о поршне наблюдается слияние и расщепление поверхностей разрывов при изменении определяющих параметров задачи, при этом суммарное число параметров, характеризующих разрывы, сохраняется. Возможны также волны с «отрицательным» числом параметров, когда, например, состояние перед разрывом не может быть произвольным, а в силу граничных условий на разрыве оказывается связанным некоторыми соотношениями. В решении рассмотренной задачи такое соотношение выполняется за счет газодинамической ударной волны, распространяющейся перед разрывом.

Заседание 16 ноября 1977 г.

1. С. В. Манаков «Интегрируемые типы многоволновых систем и уравнения Эйлера для n-мерного твердого тела».

Заседание 23 ноября 1977 г.

1. В. А. Малышев, Р. А. Минлос «Изучение спектра стохастических операторов для гиббсовских случайных полей».

В статистической физике и конструктивной квантовой теории поля в настоящее время развиваются методы, которые для некоторого класса моделей дадут, по-видимому, возможность понять на математическом уровне структуру объектов, изучение которых ранее велось на уровне, близком к эвристическому. Эти объекты (частицы в квантовой теории поля, квазичастицы в статистической физике и их рассеяние определяются через изучение структуры спектра гамильтониана соответствующей модели. Такое изучение в настоящее время возможно только в рамках евклидова подхода (если отвлечься от явно решаемых моделей), причем для моделей с малым взаимодействием любой объект в спектре допускает вычисление с помощью абсолютно сходящихся рядов, члены которых вычисляются с помощью простых рекуррентных процедур. В работах Глимма, Джаффе, Спенсера, Цирилли, Димока, Экмана довольно полно изучена структура спектра гамильтониана для $P(\varphi)_2$-моделей квантовой теории поля в одно- и двух частичной области.

Пусть ξ_t ($t = (x, \tau)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $\tau \in T = \mathbb{Z}^1$)-стационарное случайное поле, принимающее два значения в каждой точке (равные, например, ± 1). Обозначим через L_2 гильбертово пространство случайных величин, зависящих от значений поля ξ_t, а через $\mathscr{H}_\tau \subset L_2$, $\tau \in T$, подпространство случайных величин, зависящих от значений поля $\xi_{(x,\tau)}$, $x \in \mathbb{Z}^d$, в «момент времени» τ. Обозначим через U_t унитарное отображение L_2 в себя, порожденное сдвигом поля $\xi_{t'} \to \xi_{t'+t}$ на вектор t. Трансфер-матрицей называется семейство операторов $F_\tau : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$, $\tau \in T$, определяемое формулой $F_\tau f = P_0 U_{(0,\tau)} f$, $f \in \mathscr{H}_0$, где P_0 — ортогональный проектор в L_2 на подпространство $\mathscr{H}_0$.

Если ξ_t является гиббсовским полем с взаимодействием ближайших соседей, то F_τ является полугруппой самосопряженных операторов (требуется инвариантность ξ_t относительно «отражения времени»).

Теорема. *Для любого целого положительного N существует такое $\beta_0 > 0$ (обратная температура), что при $|\beta| < \beta_0$ пространство $\mathscr{H}_0$ разбивается в прямую сумму инвариантных относительно $U_{(x,0)}$ и F_τ подпространств*

$$\mathscr{H}_0 = \mathscr{L}^{(0)} \oplus \mathscr{L}^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}^{(N+1)},$$

где —$L^{(0)}$ — пространство констант, $\mathscr{L}^{(1)}$ циклично относительно группы $U_{(x,0)}$ (одночастичное подпространство, т. е. «частица» в данной модели).

Далее, спектр $F_1^{(k)} \equiv F_1|_{\mathscr{L}^{(k)}}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, заключен в отрезке $[(c_1\beta)^k, (c_2\beta)^k]$, где константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от β и k. Спектр $F_1^{(N+1)}$ расположен в $(c_2\beta)^{N+1}$-окрестности нуля.

Этот результат о спектре гамильтониана в N-частичной области подтверждает ожидаемую асимптотическую полноту теории рассеяния Хаага — Рюэлля для настоящей модели или для модели с непрерывным временам, т. е. где $T = \mathbb{R}^1$.

Доказательства основаны на полном кластерном разложении для данного гиббсовского поля.

Заседания 30 ноября 1977 г.

1. Л. Д. Фаддеев «Теория киральных полей».