B. A. Tureshbaev, V. N. Chubarikov, On Dirichlet $L$-functions modulo a power of a prime number, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2001, Number 4, 18–24

УДК 511

# О $L$-ФУНКЦИЯХ ДИРИХЛЕ ПО МОДУЛЮ, РАВНОМУ СТЕПЕНИ ПРОСТОГО ЧИСЛА

**Б. А. Турешбаев, В. Н. Чубариков**

В 1955 г. А.Г. Постников [1] впервые получил принципиально новую оценку сумм характеров Дирихле по модулю, равному степени простого числа, и установил более точные границы нулей $L$-функций Дирихле, чем имеющиеся для произвольного модуля. Далее исследования были продолжены рядом авторов [2–5]. В настоящей работе находятся оценки $L$-функций Дирихле в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = 1$ и границы их нулей.

**Лемма 1.** *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad q \geqslant 3, \quad (a,q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

*и пусть существуют $\varepsilon$ и $\delta$ с условием*

$$0 < \varepsilon < \delta < 2, \qquad P^{\varepsilon} \leqslant q \leqslant P^{\delta}.$$

*Тогда при любом $\beta$ справедлива следующая оценка:*

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(P, \frac{1}{\|\alpha x + \beta\|}\right) \leqslant \frac{300}{2-\delta} P^{\tau},$$

*где $\tau = \max\left(2-\varepsilon, 1+\frac{\delta}{2}\right)$.*

**Доказательство** непосредственно следует из леммы 2 [6, гл IV].

**Лемма 2.** *Пусть $f(xy) = \alpha_1 xy + \ldots + \alpha_m (xy)^m$ — многочлен с вещественными коэффициентами, зависящими от $P$ следующим образом: существуют абсолютные постоянные $\varepsilon$, $\delta$ и $\beta$: $0 < \beta < 1$, $0 < \varepsilon < \delta < 2$, такие, что количество коэффициентов $\alpha_r$ многочлена $f(xy)$, которые можно представить в виде*

$$\alpha_r = \frac{a_r}{q_r} + \frac{\theta_r}{q_r^2}, \qquad (a_r, q_r) = 1, \qquad |\theta_r| \leqslant 1, \qquad q_r \geqslant 3$$

*так, чтобы при этом выполнялось неравенство $P^{\varepsilon r} \leqslant q_r \leqslant P^{\delta r}$, не меньше, чем $\beta m \geqslant \varrho > 1$.*

*Тогда справедлива оценка*

$$S = \sum_{x=1}^{P} \left| \sum_{y=1}^{P} e^{2\pi i f(xy)} \right| \leqslant c P^{2-\gamma/m^2},$$

*где*

$$c = \frac{c_0}{(2-\delta)}, \qquad \gamma = \frac{(2-\tau)(\varrho-1)^2\beta^2}{64\varrho^2 \log^2 \frac{4\varrho^2}{(2-\tau)(\varrho-1)^2\beta^2}},$$

$$\tau = \max\left(2-\varepsilon, 1+\frac{\delta}{2}\right), \quad c_0 \text{ — абсолютная постоянная.}$$

**Доказательство** проводится стандартным методом с помощью двойного применения теоремы о среднем значении и леммы 1 (см., например, [1; 4; 6, гл. IV]).

**Теорема 1.** *Пусть $\chi$ — примитивный характер по модулю $D = p^k$, $p \leqslant e^{Ak^2}$ — нечетное простое число, $A > 0$, $N = p^u \leqslant D^2$, $u$ — вещественное число. Тогда при $|t| \leqslant 2D$ существуют постоянная $c = c(A) > 0$ и абсолютная постоянная $\gamma > 0$, такие, что для суммы $S = \sum_{n=1}^{N} \chi(n) n^{it}$ справедлива оценка*

$$|S| \leqslant c N e^{-\gamma \frac{\log^3 N}{\log^2 D}}, \qquad c = c_0 e^{(40)^3 A\gamma}.$$

**Доказательство.** Предположим сначала, что $u > 40$. Выберем некоторое целое число $\alpha$ из условия $\frac{1}{40}u \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{20}u$. Пусть $1 \leqslant x, y \leqslant p^\alpha$, тогда

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} \chi(n + p^\alpha xy)(n + p^\alpha xy)^{it} \right| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{p^\alpha xy} \chi(n) n^{it} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{N+p^\alpha xy} \chi(n) n^{it} \right| \leqslant 2p^{3\alpha}.$$

Отсюда

$$|S| \leqslant p^{-2\alpha} \sum_{n=1}^{N} |S(n)| + 2p^{3\alpha} \leqslant 3N^{\frac{1}{2}} + p^{-2\alpha} \sum_{N^{\frac{1}{2}} < n \leqslant N} |S(n)|,$$

где

$$S(n) = \sum_{x=1}^{p^\alpha} \sum_{y=1}^{p^\alpha} \chi(n + p^\alpha xy) e^{it \log(n + p^\alpha xy)}.$$

Займемся оценкой величины $|S(n)|$ при $n > N^{\frac{1}{2}}$. Будем считать, что $(n, p) = 1$ (в противном случае $S(n) = 0$). Тогда

$$|S(n)| \leqslant \sum_{x=1}^{p^\alpha} \left| \sum_{y=1}^{p^\alpha} \chi(1 + n^* p^\alpha xy) e^{it \log(1 + p^\alpha xy/n)} \right|,$$

где $nn^* \equiv 1 \pmod{p^k}$. Так как

$$\left| e^{i\varphi} - 1 \right| = 2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \leqslant |\varphi| \quad \text{и} \quad \frac{p^\alpha xy}{n} \leqslant \frac{p^{3\alpha}}{p^{10\alpha}} \leqslant p^{-7\alpha},$$

то при $l \geqslant 1$

$$\left| e^{it(1 + p^\alpha xy/n)} - e^{2\pi i g(xy)} \right| \leqslant |t| \left( \frac{p^{3\alpha}}{n} \right)^l \leqslant |t| p^{-7\alpha l},$$

где

$$g(xy) = \sum_{r=1}^{l} b_r (xy)^r, \qquad b_r = \frac{(-1)^{r+1}}{2\pi r} \left( \frac{p^\alpha}{n} \right)^r t.$$

Выберем некоторое целое $l$ из условия $\frac{1}{5}\frac{k}{\alpha} \leqslant l < \frac{2}{5}\frac{k}{\alpha}$, тогда $|t| p^{-7\alpha l} \leqslant |t| p^{-\frac{7}{5}k} \leqslant 2p^{-\frac{2}{5}k} \leqslant 2p^{-4\alpha}$. Следовательно,

$$|S(n)| \leqslant \sum_{x=1}^{p^\alpha} \left| \sum_{y=1}^{p^\alpha} \chi(1 + n^* p^\alpha xy) e^{2\pi i g(xy)} \right| + 2p^{-2\alpha}.$$

По формуле А. Г. Постникова [2] $\chi(1 + n^* p^\alpha xy) = e^{2\pi i f(xy)}$, где

$$f(xy) = \sum_{r=1}^{m} a_r (xy)^r, \quad a_r = \frac{\beta_r r^{-1}}{p^{k - r\alpha}}, \quad (\beta_r, p) = 1, \quad k \leqslant m\alpha < k + \alpha.$$

Тогда

$$|S(n)| \leqslant \sum_{x=1}^{p^\alpha} \left| \sum_{y=1}^{p^\alpha} e^{2\pi i (f(xy) + g(xy))} \right| + p^{-2\alpha},$$

причем коэффициенты многочлена $f(xy) + g(xy)$ при степенях $r \geqslant \frac{2}{5}\frac{k}{\alpha}$ равны коэффициентам многочлена $f(xy)$ при тех же степенях.

Легко видеть, что при $\frac{2}{5}\frac{k}{\alpha} \leqslant r \leqslant \frac{2}{3}\frac{k}{\alpha}$ выполняется неравенство $p^{\frac{1}{2}\alpha r} \leqslant p^{k - r\alpha} \leqslant p^{\frac{3}{2}\alpha r}$, а количество таких $r$ при условии $(r, p) = 1$ не меньше, чем $\frac{2}{15}\frac{k}{\alpha}$.

Таким образом, выполняется условие леммы 2 с параметрами $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{3}{25}$, $\varrho = \frac{6}{5}$. Поэтому существуют такие постоянные $c_1$ и $\gamma_1$, что для любых $n$ $(N^{\frac{1}{2}} < n \leqslant N)$ верна оценка $|S(n)| \leqslant c_1 p^{\alpha(2-\gamma_1/m^2)}$. Отсюда находим, что при $\gamma = \gamma_1/40$

$$|S| \leqslant cN^{1-\gamma\frac{\log^2 N}{\log^2 D}} = cNe^{-\gamma\frac{\log^3 N}{\log^2 D}},$$

где $c$ — абсолютная постоянная.

Если $u \leqslant 40$, то, воспользовавшись тривиальной оценкой, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $\chi$ — примитивный характер по модулю $D = p^k$, $k \geqslant 2$, $p$ — нечетное простое число, $p \leqslant \exp\left\{A\log^{\frac{2}{3}}|t|\right\}$, $A > 0$, $N = p^u \leqslant |t|^2$, $u$ — вещественное число. Тогда при $|t| \geqslant D$ существуют постоянная $c = c(A) > 0$ и абсолютная постоянная $\gamma > 0$, такие, что для суммы $S = \sum_{n=1}^N \chi(n)n^{it}$ верна оценка*

$$|S| \leqslant cNe^{-\gamma\frac{\log^3 N}{\log^2|t|}}, \qquad c = c_0 e^{(400A)^3\gamma}.$$

**Доказательство.** Предположим сначала, что $u \geqslant 400$. Выберем целое число $\alpha$ из условий $\alpha \leqslant \frac{33}{100}u$, $\alpha + 1 > \frac{33}{100}u$. Пусть $1 \leqslant x, y \leqslant p^\alpha$, тогда

$$\left|S - \sum_{n=1}^{N} \chi(n + p^\alpha xy)(n + p^\alpha xy)^{it}\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{p^\alpha xy} \chi(n)n^{it}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{N+p^\alpha xy} \chi(n)n^{it}\right| \leqslant 2p^{3\alpha}.$$

Отсюда

$$|S| \leqslant p^{-2\alpha}\sum_{n=1}^{N}|S(n)| + 2p^{3\alpha} \leqslant 3N^{\frac{199}{200}} + p^{-2\alpha}\sum_{N^{\frac{199}{200}} < n \leqslant N}|S(n)|,$$

где

$$S(n) = \sum_{x=1}^{p^\alpha}\sum_{y=1}^{p^\alpha} \chi(n + p^\alpha xy)\, e^{it\log(n+p^\alpha xy)}.$$

Оценим величину $|S(n)|$ при $n > N^{\frac{199}{200}}$, $(n,p) = 1$. Имеем

$$|S(n)| \leqslant \sum_{x=1}^{p^\alpha}\left|\sum_{y=1}^{p^\alpha} \chi(1 + n^* p^\alpha xy)\, e^{it\log(1+p^\alpha xy/n)}\right|.$$

Так как

$$\frac{p^\alpha xy}{n} \leqslant \frac{p^{3\alpha}}{N^{\frac{199}{200}}} \leqslant N^{-\frac{1}{200}},$$

то при $m \geqslant 1$

$$\left|e^{it(1+p^\alpha xy/n)} - e^{2\pi i f(xy)}\right| \leqslant |t|\left(\frac{p^{3\alpha}}{n}\right)^m \leqslant |t|\, N^{-\frac{m}{200}},$$

где

$$f(xy) = \sum_{r=1}^{m} a_r (xy)^r, \qquad a_r = \frac{(-1)^{r+1}}{2\pi r}\left(\frac{p^\alpha}{n}\right)^r t, \qquad m = \left[300\frac{\log|t|}{\log N}\right].$$

Далее,

$$|t|\, N^{-\frac{m}{200}} \leqslant N^{\frac{1}{200}}|t|^{-\frac{1}{2}} \leqslant |t|^{-\frac{49}{100}} \leqslant p^{-\frac{49}{200}u} \leqslant p^{-\frac{49}{66}\alpha}.$$

Тогда

$$|S(n)| \leqslant \sum_{x=1}^{p^\alpha}\left|\sum_{y=1}^{p^\alpha} \chi(1 + n^* p^\alpha xy)\, e^{2\pi i f(xy)}\right| + p^{\frac{83}{66}\alpha}.$$

По формуле А. Г. Постникова [2]

$$|S(n)| \leqslant \sum_{x=1}^{p^\alpha} \left| \sum_{y=1}^{p^\alpha} e^{2\pi i (f(xy)+g(xy))} \right| + p^{\frac{83}{66}\alpha},$$

где $g(xy)$ — многочлен степени $l$ с рациональными коэффициентами, $l < 1 + k/\alpha$ при $\alpha < k$ и $l = 0$ при $\alpha \geqslant k$. Покажем, что $l < 20\frac{\log |t|}{\log N}$. Действительно,

$$l \leqslant 2\frac{k}{\alpha} \leqslant 2\frac{k}{\frac{33}{100}u - 1} \leqslant \frac{7k}{u-4}.$$

С другой стороны, так как $p^k \leqslant |t|$, то $k \log p \leqslant \log |t|$, отсюда

$$20\frac{\log |t|}{\log N} = 20\frac{\log |t|}{u \log p} \geqslant 20\frac{k \log p}{u \log p} = 20\frac{k}{u} > \frac{7k}{u-4}.$$

Поэтому коэффициенты многочлена $f(xy) + g(xy)$ при степенях $r \geqslant 20\frac{\log |t|}{\log N}$ равны коэффициентам многочлена $f(xy)$ при этих же степенях.

Докажем, что коэффициенты $a_r$ многочлена $f(xy)$ при

$$20\frac{\log |t|}{\log N} \leqslant r \leqslant 40\frac{\log |t|}{\log N}$$

можно представить в виде

$$a_r = \frac{b_r}{q_r} + \frac{\theta_r}{q_r^2}, \qquad (b_r, q_r) = 1, \qquad |\theta_r| \leqslant 1, \qquad p^{\frac{1}{100}\alpha r} \leqslant q_r \leqslant p^{\frac{99}{50}\alpha r}.$$

Поскольку

$$|a_r| \leqslant \left(\frac{p^\alpha}{n}\right)^r |t| \leqslant \left(\frac{p^{\frac{33}{100}u}}{N^{\frac{199}{200}}}\right)^r |t| \leqslant N^{-\frac{133}{200}r}|t| \leqslant |t|^{-10} < 1,$$

имеем

$$a_r = \frac{b_r}{q_r} + \frac{\theta_r}{q_r^2}, \qquad b_r = (-1)^{r+1}, \qquad q_r = \left[\frac{2\pi r}{|t|}\left(\frac{n}{p^\alpha}\right)^r\right], \qquad |\theta_r| \leqslant 1.$$

Далее, из условия $r \geqslant 20\frac{\log |t|}{\log N}$ получаем

$$\frac{q_r}{p^{\frac{1}{100}\alpha r}} \geqslant \frac{1}{|t|}\left(\frac{n}{p^\alpha}\right)^r p^{-\frac{1}{100}\alpha r} \geqslant \frac{1}{|t|}\left(N^{\frac{199}{200}} p^{-\frac{101}{100}\alpha}\right)^r \geqslant \frac{1}{|t|} N^{\frac{3}{5}r} \geqslant |t|^{11} > 1,$$

следовательно, $p^{\frac{1}{100}\alpha r} \leqslant q_r$. Так как $r \leqslant 40\frac{\log |t|}{\log N}$ и $u \geqslant 400$, то

$$\frac{q_r}{p^{\frac{99}{50}\alpha r}} \leqslant \frac{2\pi r}{|t|}\left(\frac{n}{p^\alpha}\right)^r p^{-\frac{99}{50}\alpha r} \leqslant \frac{2\pi r}{|t|} N^r p^{-\frac{149}{50}\alpha r} \leqslant \frac{2\pi r}{|t|} N^{\frac{83}{5000}r} p^{\frac{149}{50}r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{80\pi}{|t|}\frac{\log |t|}{u \log p}|t|^{\frac{83}{125}}|t|^{\frac{596}{5u}} \leqslant \frac{\pi \log |t|}{5 \log p}|t|^{-\frac{19}{500}} < 1,$$

значит, $q_r \leqslant p^{\frac{99}{50}\alpha r}$. Таким образом, выполняются условия леммы 2 с параметрами $\varepsilon = 1/100$, $\delta = 99/50$, $\beta = 1/15$, $\varrho = 10$. Поэтому существуют такие постоянные $c_1$ и $\gamma_1$, что для любых $n$ ($N^{\frac{199}{200}} < n \leqslant N$) справедлива оценка $|S(n)| \leqslant c_1 p^{\alpha(2-\gamma_1/m^2)}$. Отсюда при $\gamma = \gamma_1/4$ находим, что $|S| \leqslant cN^{1-\gamma\frac{\log^2 N}{\log^2 |t|}} = cNe^{-\gamma\frac{\log^3 N}{\log^2 |t|}}$, где $c$ — абсолютная постоянная.

В случае $u \leqslant 400$ воспользуемся тривиальной оценкой. Теорема доказана.

**Лемма 3.** *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha < 3\beta$, $f(x) = \alpha x - \beta x^3$. *Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\int_0^1 e^{f(x)}dx \leqslant \frac{c\exp\left\{a\alpha^{3/2}\beta^{-1/2}\right\}}{1+(3\alpha\beta)^{1/4}+\beta^{1/3}},$$

*где* $c = 600e, a = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

**Доказательство** проводится по схеме, использованной в работе [7].

**Теорема 3.** *Пусть* $\chi$ — *примитивный характер по модулю* $D = p^k$, $p$ — *нечетное простое число,* $p \leqslant e^{Ak^2}$, $A > 0$, $\gamma$ — *постоянная из теоремы* 1. *Тогда при* $1 - 4\gamma \leqslant \sigma \leqslant 1$ *и* $|t| \leqslant 2D$ *выполняется оценка*

$$|L(s,\chi)| \leqslant C\frac{D^{b(1-\sigma)^{3/2}}\log^{2/3}D}{(1-\sigma)^{1/4}\log^{1/6}D+1},$$

*где* $C = C(A) = C_0e^{(40)^3A\gamma}$, $b = \frac{2}{3\sqrt{3\gamma}}$.

**Доказательство.** Имеем

$$L(s,\chi) = \sum_{1\leqslant n\leqslant D^2}\frac{\chi(n)}{n^s} + \sum_{n>D^2}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Из оценки Виноградова–Пойа с учетом формулы суммирования Абеля ($c_n = \chi(n), f(x) = x^{-s}$) получаем

$$\left|\sum_{D^2<n\leqslant M}\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant \left|\sum_{D^2<n\leqslant M}\chi(n)\right|\frac{1}{M^\sigma} + |s|\int_{D^2}^{M}\left|\sum_{D^2<n\leqslant x}\chi(n)\right|\frac{dx}{x^{\sigma+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{D}\log D}{M^\sigma} + \frac{\sqrt{\sigma^2+t^2}}{\sigma}\sqrt{D}\log D\left(\frac{1}{D^{2\sigma}} - \frac{1}{M^\sigma}\right) \ll D^{\frac{3}{2}-2\sigma}\log D \ll D^{-\frac{1}{2}+8\gamma}\log D \ll 1$$

при $M \to \infty$. Следовательно,

$$L(s,\chi) = \sum_{1\leqslant n\leqslant D^2}\frac{\chi(n)}{n^s} + O(1).$$

Еще раз применяя формулу суммирования Абеля, находим

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant D^2}\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant \sigma\int_1^{D^2}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n^{it}}\right|\frac{dx}{x^{\sigma+1}} + \left|\sum_{1\leqslant n\leqslant D^2}\frac{\chi(n)}{n^{it}}\right|\frac{1}{D^{2\sigma}} = S_1 + S_2.$$

Из теоремы 1 получаем

$$S_2 \leqslant cD^{2-8\gamma-2\sigma} \leqslant c, \qquad c = c(A),$$

$$S_1 \leqslant c\sigma\int_1^{D^2}\exp\left\{-\sigma\log x - \gamma\frac{\log^3 x}{\log^2 D}\right\}dx = c\sigma\int_0^{2\log D}\exp\left\{(1-\sigma)y - \gamma\frac{y^3}{\log^2 D}\right\}dy =$$

$$= 2c\sigma\log D\int_0^1\exp\left\{2(1-\sigma)z\log D - 8\gamma z^3\log D\right\}dz,$$

здесь мы пользовались заменами переменных $\log x = y$, $y = 2z\log D$. Применяя лемму 3, получим

$$S_1 \leqslant C\log D\frac{\exp\left\{a\frac{(1-\sigma)^{3/2}}{\sqrt{\gamma}}\log D\right\}}{(1-\sigma)^{1/4}\log^{1/2}D+\log^{1/3}D} = C\frac{D^{b(1-\sigma)^{3/2}}\log^{2/3}D}{(1-\sigma)^{1/4}\log^{1/6}D+1}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Пусть* $\chi$ — *примитивный характер по модулю* $D = p^k$, $k \geqslant 2$, $p$ — *нечетное простое число,* $p \leqslant \exp\left\{A\log^{\frac{2}{3}}|t|\right\}$, $A > 0$, $\gamma$ — *постоянная из теоремы* 2. *Тогда при* $1 - 4\gamma \leqslant \sigma \leqslant 1$ *и* $|t| \geqslant D$ *выполняется оценка*

$$|L(s,\chi)| \leqslant C\frac{|t|^{b(1-\sigma)^{3/2}}\log^{2/3}|t|}{(1-\sigma)^{1/4}\log^{1/6}|t|+1},$$

*где* $C = C(A) = C_0 e^{(400A)^3\gamma}$, $b = \frac{2}{3\sqrt{3\gamma}}$.

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 3.

**Теорема 5.** *Пусть* $\chi$ — *примитивный характер по модулю* $D$, $D = p^k$, $k \geqslant 2$, $p$ — *нечетное простое число,* $p \leqslant e^{Ak^2}$, $A > 0$. *Тогда при* $D \geqslant D_0 = D_0(A)$ *функция* $L(s,\chi)$ *не имеет нулей в области*

$$|t| \leqslant D, \qquad \sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log^{\frac{2}{3}} D(\log\log D)^{\frac{1}{3}}},$$

*где* $c = 500^{-1}b^{-2/3}$, $b$ — *постоянная из теоремы* 3.

**Доказательство.** Пусть $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ — нуль $L(s,\chi)$, $0 < \rho_2 \leqslant D$. Положим

$$\sigma_0 = 1 + B\lambda, \qquad s_0 = \sigma_0 + i\rho_2, \qquad \rho_1 = 1 - \alpha\lambda, \qquad B = \frac{\sqrt{12}-3}{60b^{2/3}},$$

$$s_1 = \sigma_0 + i2\rho_2, \qquad \lambda = \frac{1}{\log^{\frac{2}{3}} D(\log\log D)^{\frac{1}{3}}}.$$

Тогда

$$v = -\mathrm{Re}\,\frac{L'(s_0,\chi)}{L(s_0,\chi)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi_0)}{L(\sigma_0,\chi_0)} = \sum_{\substack{n=2\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}}\left(1+\cos\left(\omega(n)-\rho_2\log n\right)\right) > 0;$$

$$\Upsilon = \mathrm{Re}\,\frac{L'(s_1,\chi^2)}{L(s_1,\chi^2)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi_0)}{L(\sigma_0,\chi_0)} = \sum_{\substack{n=2\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}}\left(1-\cos\left(2\omega(n)-2\rho_2\log n\right)\right) > 0.$$

Так как $1-\cos 2x = 2(1-\cos x)(1+\cos x) \leqslant 4(1+\cos x)$, то $0 < \Upsilon \leqslant 4v$.

Рассмотрим круг радиуса $r = b^{-2/3}\lambda\log\log D$ с центром в точке $s_0$ и обозначим

$$M = \max\left(\max_{|s-s_0|\leqslant r}\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}\right|, \max_{|s-s_1|\leqslant r}\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_1,\chi)}\right|\right).$$

Тогда в силу теоретико-функциональной леммы [6] имеем

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'(s_0,\chi)}{L(s_0,\chi)} \leqslant \frac{4}{r}\log M - \frac{1}{\sigma_0-\rho_1}.$$

При $\sigma_0 > 1$

$$-\frac{L'(\sigma_0,\chi_0)}{L(\sigma_0,\chi_0)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(np)}{(np)^{\sigma_0}} =$$

$$= -\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} + \theta_1(\sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0-1} + \theta_1(\sigma_0) + \theta_2(\sigma_0),$$

$|\theta_1(\sigma_0)| \leqslant 2$, $|\theta_2(\sigma_0)| \leqslant 1$. Поэтому

$$v \leqslant \frac{4}{r}\log M - \frac{1}{\sigma_0-\rho_1} + \frac{1}{\sigma_0-1} + 3.$$

Точно так же, рассматривая круг радиуса $r$ с центром в точке $s_1$ и применяя теоретико-функциональную лемму, получим

$$\operatorname{Re} \frac{L'(s_1, \chi^2)}{L(s_1, \chi^2)} \geqslant -\frac{4}{r} \log M,$$

следовательно,

$$\Upsilon \geqslant -\frac{4}{r} \log M + \frac{1}{\sigma_0 - 1} - 3.$$

Таким образом, с учетом неравенства $\Upsilon \leqslant 4v$ имеем

$$\frac{4}{\sigma_0 - \rho_1} - \frac{3}{\sigma_0 - 1} \leqslant \frac{20}{r} \log M + 15,$$

откуда

$$\frac{4}{B + \alpha} - \frac{3}{B} \leqslant \frac{20 b^{2/3} \log M}{\log\log D} + 15\lambda.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{|L(s_0, \chi)|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_0}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sigma_0 - 1} = 1 + \frac{1}{B\lambda},$$

аналогично $\frac{1}{|L(s_1, \chi^2)|} \leqslant 1 + \frac{1}{B\lambda}$.

Применяя теорему 3, найдем при $D \geqslant D_0(A)$

$$\log M \leqslant b(1 - \sigma)^{3/2} \log D + \frac{2}{3} \log\log D + \log C + \log\left(1 + \frac{1}{B\lambda}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{3} \log\log D + \log \frac{1}{\lambda} + \log(1 + B\lambda) + \log C \leqslant \frac{8}{3} \log\log D.$$

Таким образом, $\frac{4}{B+\alpha} - \frac{3}{B} \leqslant 60 b^{2/3}$, отсюда

$$\alpha \geqslant \frac{4B}{60 b^{2/3} B + 3} - B = \frac{(\sqrt{12} - 3)(4 - \sqrt{12})}{60\sqrt{12} b^{2/3}} \geqslant \frac{1}{500 b^{2/3}}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Пусть $\chi$ — примитивный характер по модулю $D$, $D = p^k$, $k \geqslant 2$, $p$ — нечетное простое число, $p \leqslant \exp\left\{A \log^{\frac{2}{3}} |t|\right\}$, $A > 0$. Тогда при $D \geqslant D_0(A)$ функция $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области*

$$|t| \geqslant D, \qquad \sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log^{\frac{2}{3}} |t| (\log\log |t|)^{\frac{1}{3}}},$$

*где $c = 500^{-1} b^{-2/3}$, $b$ — постоянная из теоремы 4.*

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Постников А.Г.* О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. **19**. 11–16.
2. *Карацуба А.А.* Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. **28**. 237–248.
3. *Розин С.М.* О нулях $L$-рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. **23**. 503–508.
4. *Чубариков В.Н.* Уточнение границы $L$-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1973. № 2. 46–52.
5. *Чудаков Н.Г.* О нулях $L$-функций Дирихле для модулей, равных степеням нечетного простого // Вестн. ЛГУ. Сер. матем. 1966. № 1. 93–98.
6. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
7. *Arkhipov G.I., Buriev K.* Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neighbourhood of the line $\operatorname{Re} s = 1$ // Int. transf. and spec. func. 1993. **1**, N 1. 1–7.


Поступила в редакцию
13.12.2000