

4. М а т в е й ч у к М.С. Конечные заряды в алгебрах Неймана // Изв.вузов. Матем. 1980. № 9. С.81 - 82.

5. М а т в е у с х у к М.С. Theorems of the measures extension on the quantum logics // Первый всемирный конгресс общества мат.статистики и теории вероятн. им. Бернулли. М., 1986. Т.2. С.693.

В.П.Кадушин

### К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ И МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Настоящая работа является продолжением работ автора [1], [2], в которых рассматриваются приближенные методы решения как линейных, так и нелинейных сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) с комплексно сопряженными неизвестными.

Среди методов решения различных операторных уравнений особое место занимают интенсивно разрабатываемые в последние годы [3], [4] методы решения уравнений с монотонными операторами, что вполне естественно, так как эти уравнения обладают рядом таких замечательных свойств, как существование, единственность решения, сходимость прямых и итеративных методов и др. В настоящей работе делается попытка приближенного решения уравнений с определением монотонности в комплексном гильбертовом пространстве.

I. Вспомогательные результаты. Рассмотрим сначала случай линейного с.и.у. с постоянными коэффициентами без вполне непрерывной части

$$K\varphi \equiv a\varphi(t) + b\overline{\varphi(t)} + c S\varphi(t) + d \overline{S\varphi(t)} = f(t), \quad (1)$$

где  $a, b, c, d$  - комплекснозначные постоянные;  $f(t)$  - заданная, суммируемая с квадратом на  $\gamma$ , функция;  $\gamma$  - единичная окружность с центром в начале координат;  $S\varphi(t)$  - сингулярный интеграл с ядром Коши;  $\varphi(t)$  - неизвестная функция.

Обозначим через  $L_2(\gamma)$  пространство суммируемых с квадратом на  $\gamma$  функции со скалярным произведением

$$(f, g) = (2\pi i)^{-1} \int f(\tau) \overline{g(\tau)} \frac{d\tau}{\tau}$$

Определение [3]. Оператор  $K$  называется монотонным, если  $\operatorname{Re}(K\psi - K\varphi, \psi - \varphi) \geq 0$ , и сильно монотонным, если

$$\operatorname{Re}(K\psi - K\varphi, \psi - \varphi) \geq \beta(\psi - \varphi, \psi - \varphi), \quad \beta > 0, \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{L}_2(\gamma).$$

Лемма I. Для монотонности оператора  $K$  правой части уравнения (I) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты тождества (I) удовлетворяли следующим условиям:

- 1)  $\operatorname{Re} a \geq 0$ ,
- 2)  $(\operatorname{Re} a)^2 \geq |b|^2 + (\operatorname{Re} c)^2$ ,
- 3)  $[\operatorname{Re}(a+c)]^2 \geq |b+d|^2$ .

Доказательство. Пусть  $q_u, q_v$  - реальная и мнимая части величины  $q$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(K\psi, \varphi) &= a_u \|\psi\|^2 + \frac{b_u}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi_u^2 - \psi_v^2) ds + \frac{b_v}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_u \psi_v ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(c_u + d_u)\psi_u + (c_v + d_v)\psi_v] (S\psi)_u ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(c_u - d_u)\psi_v + (d_v - c_v)\psi_u] (S\psi)_v ds, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $e^{is} = \tau$ ,  $\psi_{u(v)}(\tau) = \psi_{u(v)}(e^{is}) \equiv \psi_{u(v)}$ .

Используя связь интегралов с ядром Коши и ядром Гильберта [5], имеем

$$(S\psi)_u = \mathcal{J}\psi_v + \psi_u^0, \quad (S\psi)_v = -\mathcal{J}\psi_u + \psi_v^0, \quad (3)$$

где  $\psi_{u(v)}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{u(v)} ds$ .

Как нетрудно установить,

$$(\psi_u, \mathcal{J}\psi_v) = (\psi_v - \mathcal{J}\psi_u). \quad (4)$$

Полагая в последнем  $\psi_u = \psi_v = q(s)$ , из (4) получаем, что для любой  $2\pi$ -периодической функции  $q(s)$  справедливо

$$(q, \mathcal{J}q) = 0. \quad (5)$$

Подставляя (3), с учетом (4) и (5) в (2) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(K\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) &= a_u \|\mathcal{Y}\|^2 + \frac{b_u}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{Y}_u^2 - \mathcal{Y}_v^2) ds + \frac{b_v}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{Y}_u \mathcal{Y}_v ds + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [c_u (\mathcal{Y}_u, \mathcal{J}\mathcal{Y}_v) + c_u (\mathcal{Y}_v, -\mathcal{J}\mathcal{Y}_u)] ds + \\ &+ (c_u + d_u) \mathcal{Y}_u^0{}^2 + 2 d_v \mathcal{Y}_u^0 \mathcal{Y}_v^0 + (c_u - d_u) \mathcal{Y}_v^0{}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу полноты тригонометрической системы функций в  $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$  любую функцию  $q(s)$  из  $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$  можно представить  $q(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ks + b_k \sin ks$ . Тогда для сингулярного интеграла с ядром Гильберта

$$\mathcal{J}q(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin ks + b_k \cos ks.$$

Пусть  $a_k^{u(v)}$ ,  $b_k^{u(v)}$  — коэффициенты Фурье функции  $\mathcal{Y}_u$ ,  $\mathcal{Y}_v$  соответственно, с учетом вышесказанного имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(K\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [A(a_k^u)^2 + 2B a_k^u a_k^v + C(a_k^v)^2] + \right. \\ &+ [A(b_k^u)^2 + 2B b_k^u b_k^v + C(b_k^v)^2 + 2D a_k^u b_k^v - 2D a_k^v b_k^u] \left. \right\} + \\ &+ (a_u + b_u + c_u + d_u)(a_0^u)^2 + 2(b_v + d_v)a_0^u a_0^v + (a_u - b_u + c_u - d_u)(a_0^v)^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где обозначено  $A = a_u + b_u$ ,  $B = b_v$ ,  $C = a_u - b_u$ ,  $D = c_u$ .

В силу произвольности  $\mathcal{Y}(t)$  неравенство (7) выполняется тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в квадратной скобке и квадратный трехчлен в (7) неотрицательны. Для неотрицательности последнего квадратного трехчлена необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} a_u + b_u + c_u + d_u \geq 0, \\ a_u + c_u - b_u - d_u \geq 0, \\ (a_u + c_u)^2 - (b_u + d_u)^2 \geq (b_v + d_v)^2. \end{cases}$$

Для неотрицательного выражения во второй квадратной скобке при любом  $k$  необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Cz^2 + 2Bzt + At^2 + 2Dxz - 2Dyt \geq 0 \quad (8)$$

при любых  $x, y, z, t$ , а для выполнения неравенства (8) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы

$$M = \begin{pmatrix} A & B & D & 0 \\ B & C & 0 & -D \\ D & 0 & C & B \\ 0 & -D & B & A \end{pmatrix} \quad (8a)$$

были неотрицательны.

Непосредственным просчетом нетрудно убедиться, что эти миноры равны:

$$M_1 = A, M_2 = AC - B^2, M_3 = C(AC - D^2 - B^2), M_4 = (AC - D^2 - B^2)^2.$$

Таким образом, для того чтобы  $\operatorname{Re}(K\mathcal{U}, \mathcal{U}) \geq 0$  при любом  $\mathcal{U}$ , необходимо и достаточно выполнения условий

$$\left\{ \begin{array}{l} a_u + b_u \geq 0, \quad a_u + b_u + c_u + d_u \geq 0, \quad a_u - b_u \geq 0, \quad a_u + c_u - b_u - d_u \geq 0, \\ a_u^2 \geq b_u^2 + b_v^2 + c_u^2, \\ (a_u + c_u)^2 \geq (b_u + d_u)^2 + (b_v + d_v)^2. \end{array} \right. \quad (9)$$

Осталось заметить, что первые четыре неравенства с учетом последних двух равносильны условию  $a_u \geq 0$ . Лемма I доказана. Из нее следует:  $d_u = 0$ , что для положительности оператора  $K$  необходимо и достаточно, чтобы

$$|b| - \operatorname{Re} a \leq \operatorname{Re} c \leq \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 - |b|^2}.$$

Заметим также, что при нарушении условия

$$\sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + |d|^2} \leq \frac{\operatorname{Re} a}{\sin \frac{\pi}{8}} \quad (10)$$

оператор  $K$  не может быть монотонным ни при каком выборе коэффициентов  $b, c$  в уравнении (I), т.е. условие (10) является необходимым условием монотонности оператора  $K$ .

Условие (9) следует из чисто геометрических соображений. Это

по существу условие непустого пересечения конуса  $(z+a)^2 \geq (x+b)^2 + (y+c)^2$  с шаром  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ , которые получаются из переобозначения  $b_u = x$ ,  $b_v = y$ ,  $c_u = z$ ,  $a_u = a$ ,  $d_u = b$ ,  $d_v = c$  в условиях (9).

Условие монотонности оператора обуславливает существование и единственность решения операторного уравнения с монотонным оператором, в оценке сходимости же приближенных методов существенную роль играет сильная монотонность оператора. Поэтому нам потребуется

**Л е м м а 2.** Для сильной монотонности оператора  $K$  необходимо и достаточно, чтобы существовала такая величина  $\beta > 0$ , что

$$\begin{cases} \operatorname{Re} a \geq \beta, \\ [\operatorname{Re}(a+c) - \beta]^2 \geq |b+d|^2, \\ |\operatorname{Re} a - \beta| \geq |b|^2 + (\operatorname{Re} c)^2. \end{cases} \quad (\text{II})$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Согласно определению сильной монотонности,  $\operatorname{Re}(K\varphi, \varphi) \geq \beta(\varphi, \varphi)$ ,  $\beta > 0$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{L}_2(\mathcal{X})$ .

Расписывая, как и при доказательстве леммы I, через коэффициенты Фурье  $\operatorname{Re}(K\varphi, \varphi)$  и  $(\varphi, \varphi)$  (см., напр., (7)), получим вместо матрицы  $M$  матрицу  $M - \beta E$ . Проводя аналогичные рассуждения, получаем условия леммы 2.

Заметим, что лемма 2 является естественным усилением леммы I. При выполнении строгих неравенств в (9) в лемме 2 можно принять величину

$$\beta = \min(\operatorname{Re}(a+c) - |b+d|, \operatorname{Re} a - \sqrt{|b|^2 + (\operatorname{Re} c)^2}). \quad (\text{I2})$$

2. Перейдем теперь к приближенному решению нелинейных с.и.у. Рассмотрим с.и.у. с комплексно сопряженными неизвестными следующего вида:

$$A\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b\overline{\varphi(t)} + c S\varphi(t) + d\overline{S\varphi(t)} + K\varphi(t) = f(t), \quad (\text{I3})$$

где  $\operatorname{Re} a(t) \geq a_0 > 0$ ;  $b, c, d$  - комплексные постоянные;  $K\varphi(t)$  - нелинейный оператор вида

$$K\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{F}(|t-\tau|, \operatorname{Re} \varphi(\tau), \operatorname{Im} \varphi(\tau)) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (\text{I4})$$

$F(x, y, z)$  — вещественнозначная функция своих аргументов, непрерывная по  $x$ , и липшиц-непрерывная по  $y$  и  $z$  с константой  $L$ .

а) Метод Галеркина. Решение уравнения (13) будем искать в виде

$$y_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k. \quad (15)$$

Неизвестные коэффициенты  $\{\alpha_k\}_{-n}^n$  найдем из условия

$$(A y_n - f, t^k) = 0, \quad k = -\overline{n, n}. \quad (16)$$

Ясно, что условие (16) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\alpha_k$ .

Теорема I. В условиях леммы 2 при  $a = a_0$  система (16) однозначно разрешима и решение методом Галеркина уравнения (13)  $y_n^*(t)$  сходится в  $L_2(\gamma)$  к точному решению  $y^*(t)$  со скоростью

$$\|y_n^* - y\| \leq \frac{M}{\beta} E(y^*),$$

где  $M = (\|a\|_c + |b| + |c| + |d| + L)$ ,  $\|a\|_c = \max_{t \in \gamma} |a(t)|$ .

Доказательство. Используем доказательство теоремы 3.3 [4]. Правая часть уравнения (13) определяет, как нетрудно видеть, непрерывный оператор  $A$ . Более того, он является липшиц-непрерывным

$$\begin{aligned} \|Au - Av\| &\leq \|a(t)(u-v)\| + \|b(\bar{u}-\bar{v})\| + \|c(Su - Sv)\| + \\ &+ \|d(\overline{Su} - \overline{Sv})\| + \|Ku - Kv\| \leq \|a\|_c \|u-v\| + |b| \|\bar{u}-\bar{v}\| + \\ &+ |c| \|S(u-v)\| + |d| \|\overline{S(u-v)}\| + L \|Re(u-v)\| + L \|Im(u-v)\| \end{aligned}$$

$$\|Im(u-v)\| \leq M \|u-v\|, \quad \text{так как } \|S\| = 1 [6].$$

Далее из непрерывности оператора  $A$  следует его радиальная непрерывность [3].

Осталось заметить, что условия леммы I и вид оператора  $K$  (14) обеспечивают сильную монотонность оператора  $A$ . Действительно, в силу условия на  $F(x, y, z)$ ,  $Re Ky = 0$  и условия леммы 2, по су-

ществу, являются необходимыми и достаточными условиями сильной монотонности оператора  $A$  в  $\mathcal{L}_2(\gamma)$  с постоянной  $\beta$ . А из сильной монотонности следует [3] коэрцитивность. Тогда решение уравнения (I3)  $\gamma^*(t)$  существует единственно и как и при доказательстве теоремы 3.3 [4], имеем при любом  $\gamma_n(t) \in H_n = \left\{ \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k \right\}$

$$0 = (A\gamma_n^* - A\gamma^*, \gamma_n^* - \gamma_n) = (A\gamma_n^* - A\gamma^*, \gamma_n^* - \gamma^*) + (A\gamma_n^* - A\gamma^*, \gamma^* - \gamma_n).$$

Отсюда

$$(A\gamma_n^* - A\gamma^*, \gamma_n^* - \gamma^*) = (A\gamma_n^* - A\gamma^*, \gamma_n - \gamma^*),$$

а из сильной монотонности оператора  $A$  и его липшиц-непрерывности из последнего равенства следует

$$\beta \|\gamma_n^* - \gamma^*\|^2 \leq M \|\gamma_n^* - \gamma^*\| \|\gamma_n - \gamma^*\|,$$

откуда в силу произвольности  $\gamma_n(t) \in H_n$  следует оценка теоремы I.

б) Итерационный метод. Как и выше, относительно уравнения (I3) будем предполагать выполненными условия леммы 2. Задав произвольно выбранным начальным приближением  $\gamma^0(t) \in \mathcal{L}_2(\gamma)$ , построим приближенные решения уравнения (I3)

$$\gamma^{(k)}(t) = \gamma^{(k-1)}(t) - \mu A \gamma^{(k-1)}(t), \quad (I7)$$

где  $\mu$  - вещественный итерационный параметр.

Справедлива следующая

Теорема 2. В условиях теоремы I при  $\alpha = \alpha_0$  метод простой итерации (I7) для любого  $\mu$  из интервала  $\left(0, \frac{2\beta}{M^2}\right)$  сходится при любом выборе начального приближения  $\gamma^0(t)$  из  $\mathcal{L}_2(\gamma)$ , при этом справедлива оценка

$$\|\gamma^* - \gamma^{(k)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|A\gamma^0 - f\|,$$

где 
$$q = (1 - 2\beta\mu + M^2\mu^2)^{1/2} < 1.$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться, что в этом случае оператор  $B = E - \mu A$  является сжимающим с коэффициентом сжатия  $q$ .

Для любых  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  из  $L_2(\gamma)$  имеем

$$\begin{aligned} (B\varphi - B\psi, B\varphi - B\psi) &= \|\varphi - \mu A\varphi - \psi + \mu A\psi\|^2 = \\ &= \|\varphi - \psi\|^2 - 2\mu \operatorname{Re}(A\varphi - A\psi, \varphi - \psi) + \mu^2 \|A\varphi - A\psi\|^2 \leq \\ &\leq (1 - 2\beta\mu + M^2\mu^2) \|\varphi - \psi\|^2. \end{aligned}$$

Справедливость теоремы следует из принципа сжатых отображений [4, теорема 2.1].

в) Проекционно-итерационный метод. Согласно [4, с.106], под проекционно-итерационным методом будем понимать метод

$$\varphi_n^{(k)}(t) = \varphi_n^{(k-1)} - \mu (A_n \varphi_n^{(k-1)} - f_n), \quad (18)$$

где  $A_n = P_n A$ ,  $f_n = P_n f$ ,  $P_n$  - оператор проектирования из  $L_2(\gamma)$  на подпространство элементов вида  $\sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$ .

Возьмем в качестве  $P_n$  оператор, ставящий в соответствие каждой функции  $\varphi(t) \in L_2(\gamma)$  ее  $n$ -й отрезок ряда Фурье по системе

$$\left\{ t^k \right\}_{-\infty}^{\infty}, \quad \text{т.е. оператор Фурье.}$$

Теорема 3. В условиях теоремы 1 проекционно-итерационный метод (18), где  $P_n$  - оператор Фурье, по системе  $\left\{ t^k \right\}_{-\infty}^{\infty}$  для уравнения (13) сходится для любого  $\mu \in (0, \frac{2\beta}{M^2})$ .

Справедливость теоремы 3 следует из сходимости проекционно-итерационного метода для монотонных операторов [4, теорема 3.6].

Действительно, в нашем случае, как и в [4], оператор, действующий в подпространстве  $H_n$  элементов  $L_2(\gamma)$  вида  $\sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$ , как оператор  $U_n \varphi_n = \varphi_n - \mu (A_n \varphi_n - f_n)$ ,  $\forall \varphi_n \in H_n$  при  $\mu \in (0, \frac{2\beta}{M^2})$  является сжимающим, что легко показывается, как и при доказательстве теоремы 2, учитывая, что  $\|P_n\| = 1$  [6].

Далее, как и в [4], приближения, найденные по формуле (18), слу-

жат галеркинским приближением к решению операторного уравнения (I3). Тогда сходимость  $\gamma_n^{(k)}(t)$  к решению уравнения (I3) следует из сходимости в условиях теоремы 3 галеркинских приближений (см. теорему I) и леммы 3.2 [4] при  $Z = \mathcal{L}_2(\gamma)$  и  $Z_n = H_n \subset \mathcal{L}_2(\gamma)$ . Теорема доказана.

### Л и т е р а т у р а

1. К а д у ш и н В.П. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с комплексно-сопряженными неизвестными // Математический анализ. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. С.39 - 51.

2. К а д у ш и н В.П. О проекционно-итерационном методе решения сингулярных интегральных уравнений // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. Вып.6. С.49 - 57.

3. В а й н б е р г М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.

4. Г а е в с к и й Х., Г р ё г е р К., З а х а р и а с К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

5. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

6. Г а б д у л х а е в Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.

А.В.Казанцев

### ВНУТРЕННИЙ РАДИУС ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОНТУРОВ

Обратная задача об изменении контуров заключается в исследовании решения внешней обратной краевой задачи (окз) при малых изменениях начальных условий. Данной проблематике посвящена монография [1]. В ней, в частности, построен алгоритм, позволяющий вычислять приближенное решение внешней окз (т.е. контур  $\tilde{L}_2$  с уравнением  $z = \tilde{z}(s)$ ) по краевым условиям  $\tilde{u}(s)$  и  $\tilde{v}(s)$  с помощью известного точ-