Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 1. С. 24–34.

УДК 519.86

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ДВУХПЕРИОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ СПРОСОМ

Т. Б. Бигильдеева[a], **М. В. Сопко**[b]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]*tbig@csu.ru;* [b]*SV-Mik@yandex.ru*

Рассмотрены многопериодные задачи управления запасами в условиях стохастического спроса с целью максимизации суммарной ожидаемой прибыли в случае потери неудовлетворённого спроса и в случае, когда неудовлетворённый спрос откладывается. Показана связь между этими задачами и доказано существование их решений. Для двухпериодной задачи максимизации ожидаемой прибыли в случае, когда неудовлетворённый спрос откладывается, получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

Ключевые слова: *управление запасами, двухпериодная динамическая модель, стохастический спрос, максимизация суммарной ожидаемой прибыли, условия оптимальности.*

На практике достаточно часто возникают задачи управления запасами в условиях стохастического высоко вариативного спроса, когда на первый план выходят проблемы, связанные с появлением дефицита. Такие задачи, в частности, возникают в деятельности торговых предприятий.

Рассмотрим задачу управления запасами предприятия с дискретным временем для T периодов планирования с учётом динамики запасов. Пусть предприятие закупает N видов запасов, не подверженных порче, располагает собственными складскими помещениями в достаточных объёмах, затраты на содержание склада являются постоянными и не зависят от размеров запасов.

Будем предполагать, что проверка (контроль) запасов и размещение заказов осуществляются периодически и достаточно часто, заказ размещается в начале периода и поступает мгновенно. В этом случае затратами на хранение запасов можно пренебречь, потому что затраты на содержание склада не зависят от размеров запасов, а затраты, связанные с омертвлением капитала при коротких периодах планирования (день, неделя, месяц), существенно меньше потерь от дефицита. Затратами на оформление заказа также будем пренебрегать.

В данной ситуации затраты системы управления запасами будут включать в себя затраты на приобретение, транспортировку и потери от дефицита. В качестве целевой функции будем рассматривать прибыль предприятия за T периодов, которую необходимо максимизировать.

Предположим, что каждый вид запасов закупается независимо от остальных (издержки на его доставку не зависят от размеров заказа остальных видов запасов), тогда прибыль от реализации всех видов запасов будет равна сумме прибыли от реализации каждого вида запасов и задача оптимизации суммарной прибыли распадается на N задач максимизации прибыли от реализации каждого вида запасов.

Пусть x_t — величина заказа на пополнение запаса в периоде t, $x_t \in [0, \infty)$, $t = \overline{1, T}$, где T — количество периодов планирования, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_T)'$ — вектор заказов за весь период планирования; ξ_t — величина спроса в периоде t, $\xi_t \in [0, \infty)$, $t = \overline{1, T}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_T)'$ — вектор спроса за T периодов.

Обозначим y_t — величину запаса (дефицита) на конец периода t, $t = \overline{1, T}$. Будем предполагать, что спрос, который в конце периода t удовлетворён не полностью, теряется, тогда динамика запасов описывается уравнением

$$y_t = \max\{y_{t-1}, 0\} + x_t - \xi_t, \quad t = \overline{1, T}.$$

Будем далее предполагать, что $y_0 = 0$.

Величина $\max\{y_{t-1}, 0\} + x_t$ — это величина запаса, имеющегося в наличии, поэтому в периоде t объём продаж равен $\min\{\max\{y_{t-1}, 0\} + x_t, \xi_t\}$.

Пусть p — цена реализации единицы запаса. Тогда выручка от реализации в периоде t имеет вид $p \cdot \min\{\max\{y_{t-1}, 0\} + x_t, \xi_t\} = p \cdot \min\{y_t, 0\} + p \cdot \xi_t$ с учётом того, что $y_t = \max\{y_{t-1}, 0\} + x_t - \xi_t$.

Если c — затраты на приобретение и транспортировку единицы запаса, тогда прибыль в периоде t будет $\Pi_t(x_t, \xi_t) = p \cdot \xi_t + p \cdot \min\{y_t, 0\} - c \cdot x_t$. Суммарная прибыль за T периодов планирования $\Pi(x, \xi)$ представляет собой величину

$$\Pi(x, \xi) = \sum_{t=1}^{T} \Pi_t(x_t, \xi_t) = \sum_{t=1}^{T} (p \cdot \xi_t + p \cdot \min\{y_t, 0\} - c \cdot x_t).$$

Задача управления запасами в случае потери неудовлетворённого спроса сводится к задаче определения наилучшего вектора заказов $x^* = x^*(\xi)$ для заданного ξ с целью максимизации суммарной прибыли следующего вида:

$$\begin{cases} \Pi(x, \xi) = \sum\limits_{t=1}^{T} (p \cdot \xi_t + p \cdot \min\{y_t, 0\} - c \cdot x_t) \to \max\limits_{x}, \\ y_t = \max\{y_{t-1}, 0\} + x_t - \xi_t, \\ x_t \geq 0, \\ t = \overline{1, T}. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что $p \cdot \xi_t$ представляет собой величину выручки в случае полного удовлетворения спроса, слагаемое $p \cdot \min\{y_t, 0\}$ — величина упущенной выручки при неудовлетворённом спросе (в ситуации дефицита), поэтому $\Pi(x, \xi)$ — фактическая суммарная прибыль предприятия за T периодов с учётом упущенной выручки. Задача (1) — задача управления запасами в условиях потери неудовлетворённого спроса с целью максимизации прибыли.

Задачу (1) можно представить в виде

$$\Pi(x, \xi) \to \max_{x \geq 0},$$

где $\Pi(x, \xi) = \sum\limits_{t=1}^{T} (p \cdot \xi_t + p \cdot \min\{\chi_t(x, \xi), 0\} - c \cdot x_t)$, $\chi_1(x, \xi) = x_1 - \xi_1$;

$$\chi_{t+1}(x, \xi) = \max\{\chi_t(x, \xi), 0\} + x_{t+1} - \xi_{t+1}, \quad t = \overline{1, T-1}.$$

В случае когда неудовлетворённый спрос откладывается (переносится на следующие периоды), задачу управления запасами можно представить в виде

$$\begin{cases} \pi(x, \xi) = \sum\limits_{t=1}^{T} (p \cdot \xi_t + p \cdot \min\{y_t, 0\} - c \cdot x_t) \to \max\limits_{x}, \\ y_t = y_{t-1} + x_t - \xi_t, \\ x_t \geq 0, \\ t = \overline{1, T}. \end{cases} \tag{2}$$

В этом случае слагаемое $p \cdot \min\{y_t, 0\}$ представляет собой штраф за дефицит, причём дефицит, возникший в периоде t, переносится в следующие периоды и учитывается как в текущем, так и в последующих периодах. Заметим, что $\Pi(x, \xi)$ — реальная прибыль предприятия, а $\pi(x, \xi)$ — прибыль предприятия со штрафом за дефицит специального вида. Очевидно, что $\pi(x, \xi) \leq \Pi(x, \xi)$ при всех $x \geq 0$, $\xi \geq 0$, причём, $\pi(x, \xi) = \Pi(x, \xi)$ для таких значений $x \geq 0$, $\xi \geq 0$, при которых дефицит не возникает ($y_t \geq 0$).

С учётом того, что $y_t = \sum\limits_{k=1}^{t}(x_k - \xi_k)$, $t = \overline{1,T}$ при $y_0 = 0$, задачу (2) можно представить в следующем виде:

$$\pi(x, \xi) = \sum_{t=1}^{T} \left(p \cdot \xi_t + p \cdot \min\left\{ \sum_{k=1}^{t}(x_k - \xi_k), 0 \right\} - c \cdot x_t \right) \to \max_{x \geq 0}. \tag{3}$$

Заметим, что целевая функция в задаче (3) является вогнутой кусочно-линейной функцией.

Если спрос является стохастическим, то при решении задач управления запасами осуществляется переход либо к оптимизации целевой функции при ожидаемых (прогнозных) значениях параметров, либо к оптимизации ожидаемого значения целевой функции [1].

Задача максимизации ожидаемой прибыли в случае потери неудовлетворённого спроса имеет вид

$$E(\Pi(x, \xi)) = E\left(\sum_{t=1}^{T} (p \cdot \xi_t + p \cdot \min\{\chi_t(x, \xi), 0\} - c \cdot x_t) \right) \to \max_{x \geq 0}. \tag{4}$$

В случае отложенного спроса задача управления запасами с целью максимизации прибыли в условиях стохастического спроса может быть представлена в виде

$$E(\pi(x, \xi)) = E\left(\sum_{t=1}^{T} (p \cdot \xi_t + p \cdot \min\left\{ \sum_{k=1}^{t}(x_k - \xi_k), 0 \right\} - c \cdot x_t) \right) \to \max_{x \geq 0}. \tag{5}$$

В задаче (4) в отличие от задачи (5) учитывается в более сложном варианте динамика запасов, когда (как это достаточно часто встречается на практике) неудовлетворённый спрос теряется. Заметим, что традиционно в существующих динамических моделях управления запасами в условиях стохастического спроса используются уравнения динамики в более простом варианте (как в задаче (2) и, соответственно, (5)).

Ответ на вопрос о существовании решения данных задач даёт следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi_t\}_{t=\overline{1,T}}$ *— независимые случайные величины с функциями плотности распределения* $f_t(\xi_t)$, $t = \overline{1,T}$, *удовлетворяющими следующим условиям:*

1) $f_t(\xi_t)$ *непрерывны на сегменте* $[0, \xi_t^{\max}]$;
2) $f_t(\xi_t) = 0$, *если* $\xi \notin [0, \xi_t^{\max}]$.

Тогда решение задач (4) *и* (5) *существует.*

Доказательство. Задача (5) имеет вид

$$\pi(x) = E\left(\pi(x, \xi)\right) \to \max_{x \geq 0},$$

где

$$\pi(x) = \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty \sum_{t=1}^T \left[p \cdot \xi_t + p \cdot \min\left\{ \sum_{k=1}^t (x_k - \xi_k), 0 \right\} - c \cdot x_t \right] \prod_{t=1}^T f_t(\xi_t) d\xi_1 \dots d\xi_T$$

является непрерывной функцией на множестве $X = \{x \in R^T | x \geq 0\}$.

Рассмотрим множество Лебега $X_a(\pi) = \{x \in X | \pi(x) \geq a\}$ для $a = \pi(0)$. Вектор $x = 0$ принадлежит множеству $X_a(\pi)$ по построению.

Пусть

$$\hat{\pi}(x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty (p \cdot (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_T) - c \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_T)) \prod_{t=1}^T f_t(\xi_t) d\xi_1 d\xi_2 ... d\xi_T,$$

тогда в силу того, что

$$\min\{x_1 - \xi_1, 0\} \leq 0,\ \min\{x_1 - \xi_1 + x_2 - \xi_2, 0\} \leq 0,\ \dots,\ \min\left\{ \sum_{t=1}^T (x_t - \xi_t), 0 \right\} \leq 0,$$

имеем $\pi(x) \leq \hat{\pi}(x)$ для всех $x \in X$, где

$$\hat{\pi}(x) = p \cdot (\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + ... + \bar{\xi}_T) - c \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_T),$$

$$\bar{\xi}_t = E(\xi_t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_t \cdot f_t(\xi_t) d\xi_t,\ t = \overline{1, T}.$$

Множество $\hat{X}_a = \{x \in X | \hat{\pi}(x) \geq a\}$ является ограниченным, так как $\hat{\pi}(x)$ — линейная функция, $c > 0$. Но $X_a(\pi) \subseteq \hat{X}_a$, поэтому множество Лебега $X_a(\pi)$ непусто, замкнуто (в силу непрерывности $\hat{\pi}(x)$) и ограничено. Тогда согласно обобщённой теореме Вейерштрасса решение задачи (5) существует.

Рассмотрим задачу (4). Обозначим $\Pi(x) = E(\Pi(x, \xi))$. Заметим, что $\Pi(x) \leq \hat{\pi}(x)$ для всех $x \in X$, так как $\min\{\chi_t(x, \xi), 0\} \leq 0$, функция $\Pi(x)$ непрерывна на X. Определив $a = \Pi(0)$, множество $X_a(\Pi) = \{x \in X | \Pi(x) \geq a\}$ и повторив рассуждения относительно функции $\pi(x)$ для $\Pi(x)$, получим, что решение задачи (4) существует, что и требовалось доказать. □

Заметим, что функция $\pi(x) = E(\pi(x, \xi))$ является вогнутой на множестве $x \geq 0$ в силу свойств математического ожидания и вогнутости по совокупности переменных функции $\pi(x, \xi)$ на множестве $x \geq 0$, $\xi \geq 0$ как суммы вогнутых функций. Это означает, что любой локальный максимум в задаче (5) является глобальным. Решение (согласно теореме 1) задачи (4) также существует (глобальный максимум $\Pi(x)$ на $x \geq 0$ достигается), но найти его существенно сложнее.

Учитывая тот факт, что $\pi(x) \leq \Pi(x)$ для $\forall x \geq 0$, решение задачи (5) можно рассматривать как некоторое приближение решения задачи (4).

Один из подходов к решению многопериодных динамических задач в условиях стохастического спроса заключается в последовательном решении серии однопериодных задач [2]. Однопериодная модель управления запасами в условиях стохастического спроса была рассмотрена в работах [3, 4]. В этом случае задача (5) имеет вид

$$\pi(x) = E(\pi(x, \xi)) = \int\limits_0^\infty (p \cdot \xi + p \cdot \min\{x - \xi, 0\} - c \cdot x) f(\xi) d\xi \to \max_{x \geq 0},$$

где $f(\xi)$ — функция плотности распределения вероятностей случайной величины ξ на $[0,\infty)$.

Заметим, что в случае одного периода задачи (4) и (5) совпадают.

Сведение многопериодной динамической задачи управления запасами к последовательному решению однопериодных задач приводит к так называемым близоруким стратегиям, которые не учитывают информацию о возможных значениях спроса в будущих периодах, что в ряде случаев может повлиять на качество получаемых решений [5].

Решение многопериодной динамической задачи путём решения серии двухпериодных задач со скользящим горизонтом планирования позволяет учесть возможные изменения спроса в будущем. Использование многопериодных моделей с большим количеством периодов является нецелесообразным в условиях высоковариативного спроса, так как с увеличением количества периодов планирования возрастает степень неопределённости.

Задача (5) в случае двух периодов будет иметь вид

$$\pi(x)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty(p\cdot(\xi_1+\xi_2)+p\cdot\min\{x_1-\xi_1,0\}+p\cdot\min\{x_1-\xi_1+x_2-\xi_2,0\}-$$

$$-c\cdot(x_1+x_2))f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)d\xi_1d\xi_2\to\max_{x\geq 0},\tag{6}$$

где $\xi_t\in[0,\infty)$, $t=1,2$, — независимые случайные величины с функциями плотности распределения $f_1(\xi_1)$ и $f_2(\xi_2)$ соответственно.

Теорема 2. *Если $p>c$, $\{\xi_t\}_{t=1,2}$ — независимые случайные величины с функциями плотности распределения $f_t(\xi_t)$, $t=1,2$, такими, что*

1) *$f_t(\xi_t)$ непрерывны на сегменте $[0,\xi_t^{\max}]$, $t=1,2$;*
2) *$f_t(\xi_t)=0$ при $\xi_t\geq\xi_t^{\max}$, $t=1,2$.*

Тогда x является решением задачи (6) *в том и только в том случае, когда выполняются условия*

$$\begin{cases} x_1>0,\\ G(x_1,x_2)=0,\\ x_2\cdot(F_1(x_1)-1)=0,\end{cases}$$

где $F_t(\xi_t)$ — функции распределения случайных величин ξ_t, $t=1,2$,

$$G(x_1,x_2)=2\cdot p-c-p\cdot F_1(x_1)+p\cdot\int\limits_0^{\xi_1^{\max}}\xi_1\cdot f_2(x_1+x_2-\xi_2)\cdot f_1(\xi_1)d\xi_1-$$

$$-p\cdot\int\limits_0^{\xi_2^{\max}}(F_1(x_1+x_2-\xi_2)+(x_1+x_2-\xi_2)\cdot f_1(x_1+x_2-\xi_2))\cdot f_2(\xi_2)d\xi_2.$$

Доказательство. Доопределим функции плотности распределения случайных величин ξ_1,ξ_2 следующим образом: $f_t(\xi_t)=0$, $\xi_t<0$, $t=1,2$. Тогда

$$\pi(x)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty(p\cdot(\xi_1+\xi_2)+p\cdot\min\{x_1-\xi_1,0\}+p\cdot\min\{x_1-\xi_1+x_2-\xi_2,0\}-$$

$$-c\cdot(x_1+x_2))f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)d\xi_1d\xi_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(p\cdot(\xi_1+\xi_2)+p\cdot\min\{x_1-\xi_1,0\}+$$

$$+p\cdot\min\{x_1-\xi_1+x_2-\xi_2,0\}-c\cdot(x_1+x_2))f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)d\xi_1d\xi_2=$$
$$=p\cdot(\bar{\xi_1}+\bar{\xi_2})-c\cdot(x_1+x_2)+A_1(x)+A_2(x),$$

где

$$\bar{\xi_t}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_t f_t(\xi_t)d\xi_t,\ t=1,2,$$

$$A_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p\cdot\min\{x_1-\xi_1,0\}f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)d\xi_1d\xi_2=p\cdot\int\limits_{x_1}^{\infty}(x_1-\xi_1)f_1(\xi_1)d\xi_1,$$

$$A_2(x)=p\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\min\{x_1-\xi_1+x_2-\xi_2,0\}f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)d\xi_1d\xi_2=$$

$$=p\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{x_1+x_2-\xi_2}^{\infty}(x_1-\xi_1+x_2-\xi_2)f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)d\xi_1\right)d\xi_2=$$

$$=p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{x_1+x_2-\xi_2}^{\infty}(x_1+x_2)f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)d\xi_1\right)d\xi_2-p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{x_1+x_2-\xi_2}^{\infty}\xi_1f_1(\xi_1)d\xi_1\right)f_2(\xi_2)d\xi_2-$$

$$-p\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_2\left(\int\limits_{x_1+x_2-\xi_2}^{\infty}f_1(\xi_1)d\xi_1\right)f_2(\xi_2)d\xi_2.$$

С учётом того, что

$$p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{x_1+x_2-\xi_2}^{\infty}\xi_1f_1(\xi_1)d\xi_1\right)f_2(\xi_2)d\xi_2=p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{x_1+x_2-\xi_1}^{\infty}f_2(\xi_2)d\xi_2\right)\xi_1f_1(\xi_1)d\xi_1,$$

$$A_2(x)=p\cdot(x_1+x_2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-F_1(x_1+x_2-\xi_2))f_2(\xi_2)d\xi_2-$$

$$-p\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_1\cdot(1-F_2(x_1+x_2-\xi_1))f_1(\xi_1)d\xi_1-p\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_2\cdot(1-F_1(x_1+x_2-\xi_2))f_2(\xi_2)d\xi_2.$$

Заметим, что при выполнении условия 2) теоремы для функций плотности распределения спроса функции $A_1(x)$, $A_2(x)$ будут иметь вид

$$A_1(x)=p\cdot\int\limits_{x_1}^{\xi_1^{\max}}(x_1-\xi_1)f_1(\xi_1)d\xi_1,$$

$$A_2(x)=p\cdot(x_1+x_2)\int\limits_{0}^{\xi_2^{\max}}(1-F_1(x_1+x_2-\xi_2))f_2(\xi_2)d\xi_2-$$

$$-p \cdot \int_0^{\xi_1^{\max}} \xi_1 \cdot (1 - F_2(x_1 + x_2 - \xi_1)) f_1(\xi_1) d\xi_1 - p \cdot \int_0^{\xi_2^{\max}} \xi_2 \cdot (1 - F_1(x_1 + x_2 - \xi_2)) f_2(\xi_2) d\xi_2.$$

Функция $\pi(x)$ является вогнутой, поэтому вектор x ($x \geq 0$) — решение задачи тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x_1} \cdot x_1 = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_1} \leq 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2} \leq 0, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x_1} = -c + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = -c + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_2}. \end{cases}$$

По правилам дифференцирования интегралов, зависящих от параметра, с учётом непрерывности функций плотности распределения спроса на отрезках $[0, \xi_1^{\max}]$ и $[0, \xi_2^{\max}]$ соответственно получим

$$\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} = p \cdot \int_{x_1}^{\xi_1^{\max}} f_1(\xi_1) d\xi_1 = p \cdot (1 - F_1(x_1)), \quad \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = p \cdot \int_0^{\xi_2^{\max}} (1 - F_1(x_1 + x_2 - \xi_2)) f_2(\xi_2) d\xi_2 -$$

$$-p \cdot \int_0^{\xi_2^{\max}} (x_1 + x_2 - \xi_2) f_1(x_1 + x_2 - \xi_2) f_2(\xi_2) d\xi_2 + p \cdot \int_0^{\xi_1^{\max}} \xi_1 f_2(x_1 + x_2 - \xi_1) f_1(\xi_1) d\xi_1,$$

причём

$$\frac{\partial A_2(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1}$$

в силу симметрии вхождения x_1 и x_2 в $A_2(x)$.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $x_1 = 0, x_2 = 0$, тогда условия оптимальности (7) будут иметь вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x_1} = -c + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} \leq 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = -c + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что

$$\left. \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} \right|_{x=0} = p,$$

$$\left. \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} \right|_{x=0} = p - p \int_0^{\xi_1^{\max}} F_1(-\xi_2) f_2(\xi_2) d\xi_2 +$$

$$+ p \int_0^{\xi_2^{\max}} \xi_2 f_1(-\xi_2) d\xi_2 + p \int_0^{\xi_1^{\max}} \xi_1 f_2(-\xi_1) f_1(\xi_1) d\xi_1,$$

поэтому с учётом того, что $p > c$, имеем

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial\pi}{\partial x_1}\right|_{x=0} = 2p - c > 0, \\ \left.\frac{\partial\pi}{\partial x_2}\right|_{x=0} = p - c > 0, \end{cases}$$

что означает, что $x = 0$ не является решением задачи (условия (8) не выполнены).

2. Пусть $x_1 = 0, x_2 > 0$, тогда условия оптимальности принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial x_1} = -c + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} \leq 0, \\ \frac{\partial\pi}{\partial x_2} = -c + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = 0, \end{cases}$$

что эквивалентно условиям

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} \leq 0, \\ \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = c. \end{cases}$$

С учётом того, что $x_1 = 0$, а $\left.\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = p > 0$, получаем, что $x = (0, x_2)$ при любом $x_2 > 0$ не удовлетворяет условиям оптимальности и не является решением задачи.

3. Пусть $x_1 > 0, x_2 > 0$, тогда необходимые и достаточные условия оптимальности имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial x_1} = -c + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial\pi}{\partial x_2} = -c + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 > 0, x_2 > 0$ — решение задачи в том и только том случае, когда

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = c. \end{cases}$$

Из условия $\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} = 0$ следует, что $p \cdot (1 - F_1(x_1)) = 0$, то есть $F_1(x_1) = 1$, а условия оптимальности в целом принимают вид

$$\begin{cases} F_1(x_1) = 1, \\ \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = c \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F_1(x_1) = 1, \\ \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} - c = 0. \end{cases}$$

4. Пусть $x_1 > 0, x_2 = 0$, тогда условия оптимальности можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial x_1} = \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} - c = 0, \\ \frac{\partial\pi}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} - c \leq 0, \end{cases}$$

что равносильно условиям

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} - c = 0, \\ \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} \geq 0. \end{cases}$$

В силу того что $\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} = p \cdot (1 - F_1(x_1)) \geq 0$ для всех x_1, необходимое и достаточное условие оптимальности для $x_1 > 0, x_2 = 0$ принимает вид

$$\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} - c = 0.$$

Обозначим $G(x_1, x_2) = \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} - c$ и, объединив условия для случаев 3 и 4, получим утверждение теоремы. □

Следствие 1. *Если $x^* = (x_1^*, x_2^*) > 0$ — решение задачи (6), то $F_1(x_1^*) = 1$.*

Следствие 2. *Для того чтобы вектор $x^* = (x_1^*, 0), x_1^* > 0$ был решением задачи (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$g(x_1^*) = 0, \tag{9}$$

где

$$g(x_1) = G(x_1, 0) = 2p - p \cdot F_1(x_1) - p \int\limits_0^{\xi_2^{\max}} F_1(x_1 - \xi_2) f_2(\xi_2) d\xi_2 -$$

$$- p \int\limits_0^{\xi_2^{\max}} (x_1 - \xi_2) f_1(x_1 - \xi_2) f_2(\xi_2) d\xi_2 + p \int\limits_0^{\xi_1^{\max}} \xi_1 f_2(x_1 - \xi_1) f_1(\xi_1) d\xi_1 - c.$$

Решение задачи (6) согласно теореме 1 существует, поэтому если уравнение $g(x_1^*) = 0$ не имеет решения на множестве $x_1 > 0$, то решение задачи (6) должно удовлетворять условию $F_1(x_1^*) = 1$, то есть $x_1^* \geq \xi_1^{\max}$.

Заметим, что функция $g(x_1)$ является невозрастающей для $x_1 \geq 0$, так как $g(x_1) = \frac{\partial \pi}{\partial x_1}\Big|_{x_2=0}$, а функция $\pi(x)$ является вогнутой на множестве $x \geq 0$, поэтому $g'(x_1) = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} \leq 0$. Кроме того, $g(x_1)\big|_{x_1=0} = p > 0$. Это означает, что если $g(\xi_1^{\max}) > 0$, то уравнение (9) не имеет решения на отрезке $[0, \xi_1^{\max}]$.

Таким образом, для решения двухпериодной задачи управления запасами со стохастическим спросом (6) необходимо проверить условие $g(\xi_1^{\max}) \geq 0$. Если оно выполняется, то оптимальное значение $x_1^* = \xi_1^{\max}$.

Если $g(\xi_1^{\max}) < 0$, то оптимальное значение x_1^* является решением уравнения $g(x_1) = 0$, причём в силу монотонности функции g это решение существует и единственно.

Заметим, что при последовательном решении серии двухпериодных задач управления запасами (со скользящим горизонтом планирования) необходимо определить только значение x_1^* — величину заказа в текущем периоде.

Решение задачи (9) в общем случае найти сложно, но эта задача может быть решена в частных случаях, если известны функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

На практике, как правило, функции плотности распределения спроса ξ_1 и ξ_2 неизвестны, а известны лишь их фактические (наблюдаемые) значения в предыдущие периоды. Это даёт возможность построить эмпирические законы распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2, аппроксимировать функцию g на отрезке $[0, \xi_1^{\max}]$ и найти приближённое решение — оптимальную величину заказа в текущем периоде. Таким образом, полученные условия оптимальности дают основу для построения алгоритмов численного решения динамической задачи управления запасами со стохастическим спросом.

Список литературы

1. **Rossi, R.** Replenishment planning for stochastic inventory systems with shortage cost / R. Rossi [et al.] // Integration of AI and OR Techniques in Constrant Programming for Combinatorial Optimization Problems: Proc. of 4th Intern. Conf. CPAIOR 2007. Brussels, Belgium, May, 23–26. — Berlin ; Heidelberg : Springler-Verlag, 2007. — P. 229–243.

2. **Юдин, Д. Б.** Задачи и методы стохастического программирования / Д. Б. Юдин. — М. : Сов. радио, 1979. — 392 с.
3. **Сопко, М. В.** О подходе к управлению однономенклатурными запасами торгового предприятия с высокой вариацией спроса / М. В. Сопко // Логистика и управление цепями поставок. — 2011. — № 6 (47). — С. 78–86.
4. **Сопко, М. В.** Задача управления однономенклатурными запасами торгового предприятия с неизвестными вероятностными характеристиками спроса / М. В. Сопко // Логистика. — 2012. — № 3. — С. 28–30.
5. **Axsäter, S.** Inventory Control / S. Axsäter. — 2nd ed. — Springer, 2006. — 336 p.

Поступила в редакцию 10.11.2015
После переработки 01.02.2016

Сведения об авторах

Бигильдеева Татьяна Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: tbig@csu.ru.
Сопко Михаил Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов в экономике, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: SV-Mik@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 24–34.

OPTIMALITY CONDITIONS FOR THE TWO-PERIOD INVENTORY MANAGEMENT PROBLEM IN CASE OF THE STOCHASTIC DEMAND

T. B. Bigildeeva[a], **M. V. Sopko**[b]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]*tbig@csu.ru;* [b]*SV-Mik@yandex.ru*

The multi-period inventory management problems in case of the stochastic demand in order to maximize the total expected profit in the case of loss and in the case of a pending unsatisfied demand are described. The relationship between these problems is shown and the existence of the solutions of these problems is proved. The necessary and sufficient optimality conditions for the two-period problem of expected profit maximization in the case of a pending unsatisfied demand are obtained.

Keywords: *inventory management, two-period dynamic model, stochastic demand, total expected profit maximization, optimality conditions.*

References

1. **Rossi R. et al.** Replenishment planning for stochastic inventory systems with shortage cost, *Integration of AI and OR Techniques in Constrant Programming for Combinatorial Optimization Problems.* Proceedings of 4th International Conference CPAIOR 2007, Brussels, Belgium, May, 23–26. Berlin, Heidelberg, Springler-Verlag, 2007. Pp. 229–243.
2. **Yudin D.B.** *Zadachi i metody stokhasticheskogo programmirovaniya* [Problems and methods of the stochastic programming]. Moscow, Sovetskoye radio Publ., 1979. 392 p. (In Russ.).

3. **Sopko M.V.** O podkhode k upravleniyu odnonomenklaturnymi zapasami torgovogo predpriyatiya s vysokoy variatsiey sprosa [On approach to the management of trading enterprise one-nomenclative inventory with a high demand variation]. *Logistika i upravleniye tsepyami postavok* [Logistics and management of supplies chains], 2011, no. 6 (47), pp. 78–86. (In Russ.).
4. **Sopko M.V.** Zadacha upravleniya odnonomenklaturnymi zapasami torgovogo predpriyatiya s neizvestnymi veroyatnostnymi kharakteristikami sprosa [A problem of the management of trading enterprise one-nomenclative inventory with unknown probability characteristics of demand]. *Logistika* [Logistics], 2012, no. 3, pp. 28–30. (In Russ.).
5. **Axsäter S.** *Inventory Control*. Springer, 2006. 336 p.

Article received 10.11.2015
Corrections received 01.02.2016