T. A. Angelov, Finding the vertices of the sum of two polytopes,
Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Mathematica. Physica, 2016, Issue 6, 7–17

www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

ТРУДЫ III МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»

DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.1

УДК 519.852.2
ББК 22.135

НАХОЖДЕНИЕ КРАЙНИХ ТОЧЕК СУММЫ ДВУХ ПОЛИТОПОВ [1]

Тодор Ангелов Ангелов

Инженер-исследователь,
Санкт-Петербургский государственный университет
angelov.t@gmail.com
просп. Университетский, 35, Петергоф, 198504 г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Аннотация. В работе получен критерий крайности точки у множества, образованного в результате сложения двух политопов. Обоснование предлагаемого критерия имеет наглядную геометрическую интерпретацию и доказывается элементарными инструментами выпуклого анализа. Проверка сформулированного критерия сводится к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: политоп, коническая оболочка, сумма Минковского, крайняя точка, линейное программирование.

1. Вспомогательные сведения

Приведем некоторые базовые понятия и результаты теории выпуклого анализа, которые упростят понимание основных результатов (см.: [1; 5; 6]). Пусть множество A состоит из точек $a_0, \ldots, a_m$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} A$ *множества* A *называется наименьшее выпуклое множество, содержащее* A.

Определение 2. *Множество* $P = \operatorname{conv}\{a_0, \dots, a_m\}$ *назовем политопом.*

Определение 3. *Точка* p *политопа* P *называется крайней, если она не принадлежит выпуклой оболочке никаких двух отличных от нее различных точек политопа* P.

Проиллюстрируем введенные понятия. Рассмотрим множество A, состоящее из трех точек на плоскости:

$$A = \{a_0, a_1, a_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{1}$$

На рисунке 1, а) треугольник со своей внутренностью соответствует множеству $\operatorname{conv} A$, а вершины являются крайними точками.

Определение 4. *Пусть подмножество* C *является частью пространства* $\mathbb{R}^n$. *Множество*

$$K(C) = \{\lambda x \mid \lambda > 0,\ x \in C\}$$

называется конусом, *порожденным подмножеством* C.

Если множество C — выпуклое, то $K(C)$ также является выпуклым множеством. Заметим, что $K(C)$ необязательно содержит начало координат.

Определим несколько необходимых нам множеств. Пусть все точки a_i из множества A отличны друг от друга и являются крайними для политопа $\operatorname{conv} A$. Зафиксируем индекс $i \in 0 : m$. Вычтем a_i из остальных точек A и зададим множество

$$A(a_i) := \{a_0 - a_i, a_1 - a_i, \dots, a_{i-1} - a_i, a_{i+1} - a_i, \dots, a_m - a_i\}.$$

Отметим, что в множестве $A(a_i)$ отсутствует нулевой вектор.

Обозначим выпуклый многогранный конус, натянутый на множество $\{\operatorname{conv} A - a_i\} \setminus 0_n$, следующим образом

$$K(a_i) := K(\operatorname{conv} A(a_i)).$$

Рассмотрим пример. Для множества (1) получим $A(a_0)$ и $K(a_0)$ (см. рис. 1):

$$A(a_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Аналогичным образом определим множества $B(b_i)$, $K(b_i)$ для набора точек $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{m_b}\}$, где все $b_i \in \mathbb{R}^n$ отличны друг от друга и являются крайними для политопа $\operatorname{conv} B$.

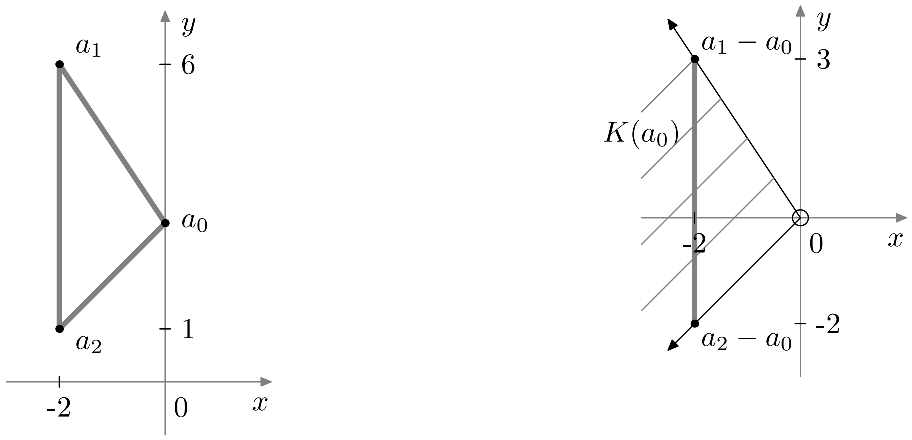
Под алгебраической суммой политопов $\operatorname{conv} A$ и $\operatorname{conv} B$ понимаем

$$\operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B := \{a + b \mid a \in \operatorname{conv} A, b \in \operatorname{conv} B\}. \tag{2}$$

Заметим, что выражение (2) также называется суммой Минковского.

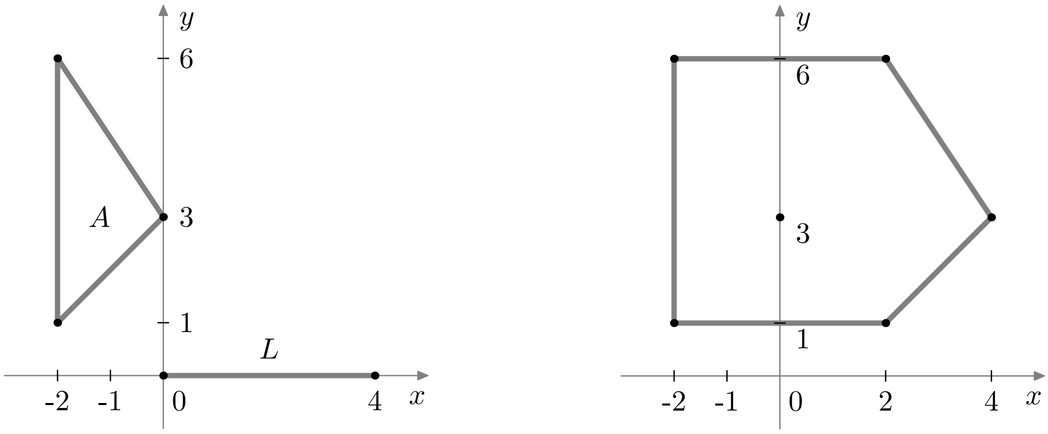
2. Крайние точки суммы политопа и отрезка

Приведем рассуждения для нахождения крайних точек сложения политопа с отрезком.



а) $\operatorname{conv} A$ б) $K(a_0)$

Рис. 1. Изображения выпуклой оболочки множества A и конуса $K(a_0)$



а) Треугольник $\operatorname{conv} A$ и отрезок L б) $\operatorname{conv} A + L$

Рис. 2. Сумма политопа и отрезка

Рассмотрим пример. Изобразим сумму S_0 треугольника $\operatorname{conv} A$ и отрезка L с вершинами в точках $(0,0)^T$ и $(4,0)^T$ (рис. 2):

$$S_0 := \operatorname{conv} A + L = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}. \tag{3}$$

На рисунке 2, б) видно, что точка $(0,3)^T$ не является крайней для нового многоугольника, поэтому она несущественна для задания результата суммы (3). Точку $(0,3)^T$ следует идентифицировать и удалить из S_0.

Пусть $b_0, b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_0 \neq b_1$. Согласно (2) сложение политопа $\operatorname{conv} A$ с отрезком $\operatorname{conv}\{b_0, b_1\}$ образует выпуклое множество S_1:

$$\begin{gathered} S_1 := \operatorname{conv} A + \operatorname{conv}\{b_0, b_1\} = \\ = \operatorname{conv}\{a_0 + b_0, a_1 + b_0, \ldots, a_m + b_0, a_0 + b_1, a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_1\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Выражение (4) можно переписать, как сумму точки и множества

$$S_1 = b_0 + \operatorname{conv} A_v, \tag{5}$$

где $A_v = \{a_0, a_1, \ldots, a_m, a_0 + v, a_1 + v, \ldots, a_m + v\}$, $v = b_1 - b_0$.

Свяжем описанные множества с приведенными ранее примерами. Выпуклая оболочка S_1 изображена на рисунке 2 б), где $b_0 = (0,0)^T$, $b_1 = (4,0)^T$ и множество A задается в (1).

Рассмотрим другое представление суммы (5) (многогранника и отрезка). Множество $\operatorname{conv} A_v$ можно получить смещая $\operatorname{conv} A$ на вектор v, при этом «запоминая» весь след смещения (рис. 3).

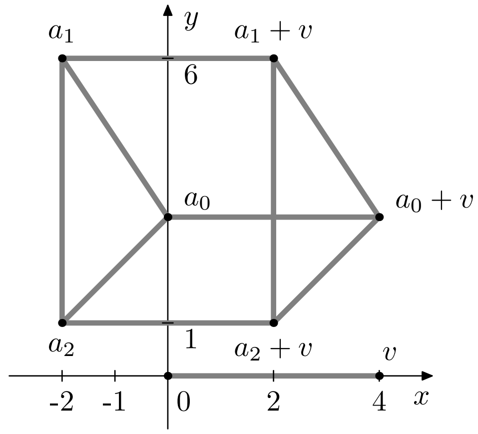


Рис. 3. Множество A_v и вектор смещения v

В следующей лемме сформулировано правило по выявлению крайних точек множества $\operatorname{conv} A_v$.

Лемма 1. *Для каждой точки a_i из множества A справедливо:*

1) *Если $v \notin K(a_i)$, то $a_i + v$ является крайней для $\operatorname{conv} A_v$.*
   В противном случае $a_i + v$ не является крайней для $\operatorname{conv} A_v$.
2) *Если $-v \notin K(a_i)$, то a_i является крайней для $\operatorname{conv} A_v$.*
   В противном случае a_i не является крайней для $\operatorname{conv} A_v$.

Замечание 1. Лемма 1 задает необходимое и достаточное условие крайности точки для суммы политопа и отрезка.

Продемонстрируем графически условия леммы для точек a_0 и $a_0 + v$ из рисунка 3. Изобразим конус $K(a_0)$ и векторы v, $-v$ (рис. 4). На рисунке 4 видно, что $v \notin K(a_0)$.

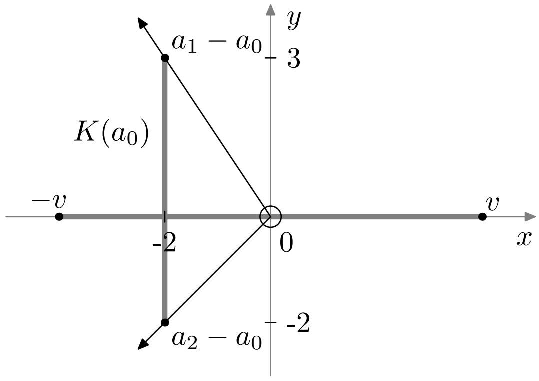


Рис. 4. Проверка условий леммы 1

Получаем, что точка $a_0 + v$ является крайней. Теперь рассмотрим второй пункт леммы. Вектор $-v$ принадлежит конусу $K(a_0)$. Тогда a_0 не является крайней.

3. Критерий крайности точки в сумме двух политопов

Перейдем к общему случаю суммы двух политопов (2):

$$S := \operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B = \operatorname{conv} \bigcup_{i \in 0:m} \bigcup_{j \in 0_{m_b}} (a_i + b_j). \tag{6}$$

Сформулируем необходимое и достаточное **условие крайности точки** для политопа (6).
Критерий. *Зафиксируем $i \in 0 : m$ и $j \in 0 : m_b$. Для того чтобы точка $a_i + b_j$ была крайней в политопе S, необходимо и достаточно, чтобы конусы $-K(b_j)$ и $K(a_i)$ не пересекались.*

Проиллюстрируем применение критерия на примере. Зададим множество

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим сумму (рис. 5)

$$S = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

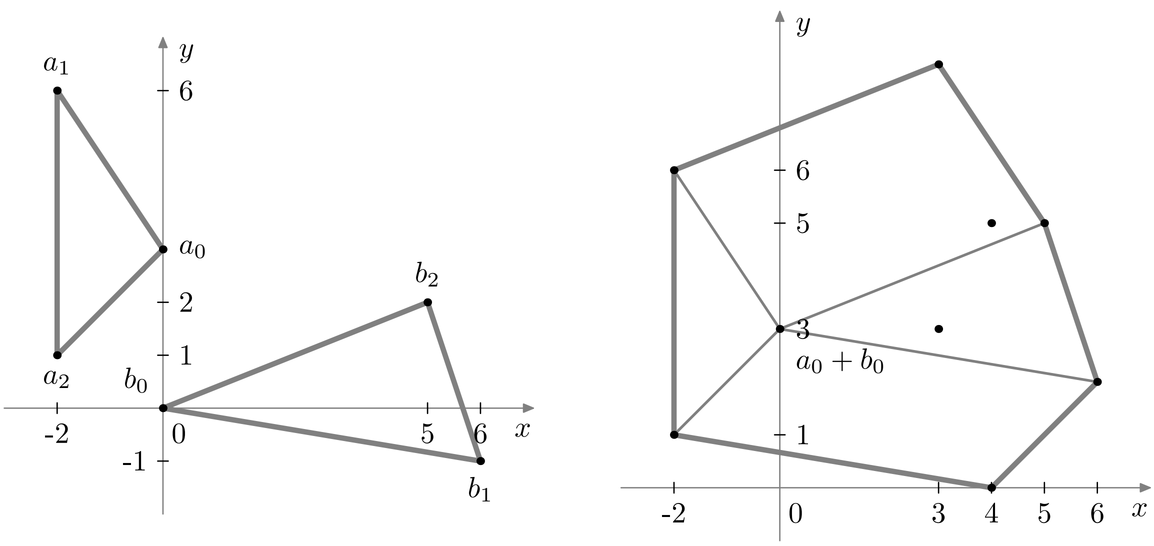


Рис. 5. Сумма двух политопов

Положим $i = 0$, $j = 0$ и проверим условия критерия для точки $a_0 + b_0$, то есть $(0, 3)^T$. На рисунке 6 изображены конусы $K(a_0)$ и $K(b_0)$. Видно, что $-K(b_0)$ пересекает $K(a_0)$. Тогда точка $(0, 3)^T$ не является крайней для многоугольника S.

Пусть теперь $i = 1$, $j = 0$ и проверим условия критерия для точки $a_1 + b_0$, то есть $(-2, 6)^T$. На рисунке 7 изображены конусы $K(a_1)$ и $K(b_0)$. Очевидно, что $-K(b_0)$ не пересекает $K(a_1)$. Тогда точка $(-2, 6)^T$ является крайней для многоугольника S.

Более естественно доказывается эквивалентная критерию следующая **теорема о некрайности точки** в сумме S:

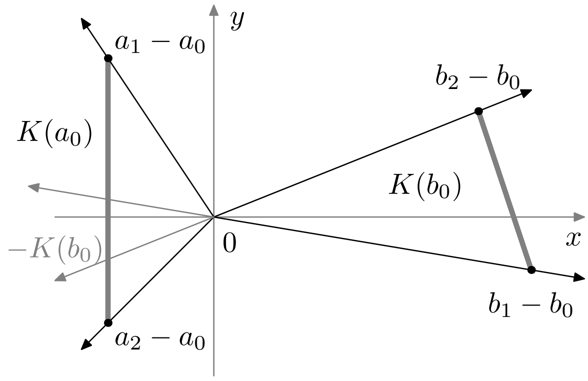


Рис. 6. Проверка критерия в точке $a_0 + b_0$

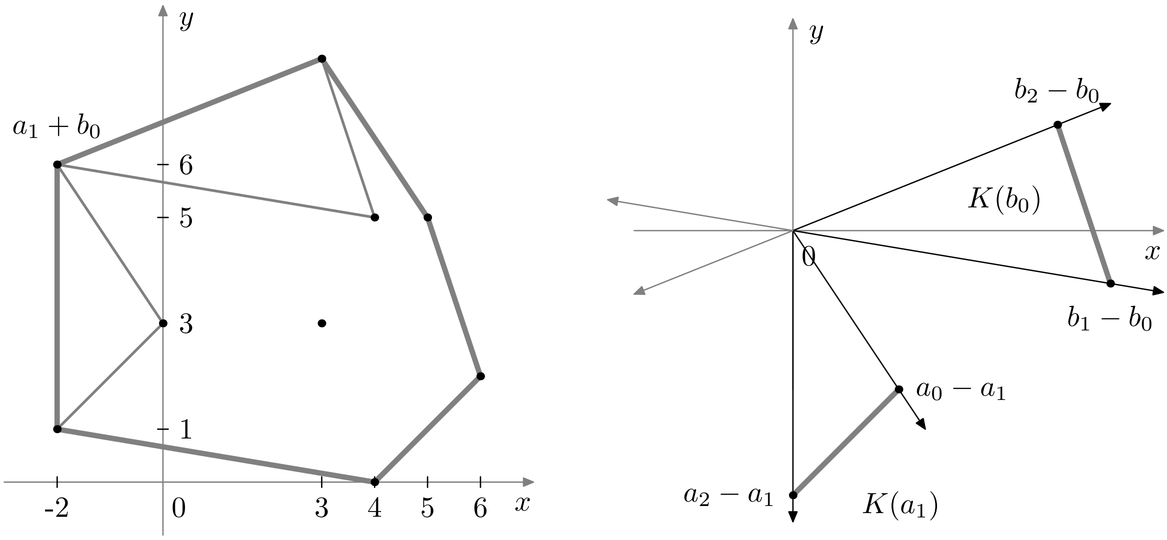


Рис. 7. Проверка критерия в точке $a_1 + b_0$

Теорема. *Зафиксируем $i \in 0 : m$ и $j \in 0 : m_b$. Для того чтобы точка $a_i + b_j$ не была крайней в политопе S, необходимо и достаточно, чтобы конусы $-K(b_j)$ и $K(a_i)$ пересекались.*

Доказательство. Приведем вспомогательные рассуждения.

Пусть точка x принадлежит политопу $\operatorname{conv} A$. Тогда существуют неотрицательные $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m$, для которых

$$x = \sum_{k \in 0:m} \overline{\alpha}_k a_k, \quad \sum_{k \in 0:m} \overline{\alpha}_k = 1.$$

Если $x \neq a_i$, то вектор $x - a_i$ принадлежит конусу $K(a_i)$ и представим в виде следующей линейной комбинации

$$x - a_i = \overline{\alpha}_0(a_0 - a_i) + \cdots + \overline{\alpha}_i(a_i - a_i) + \cdots + \overline{\alpha}_m(a_m - a_i),$$

где хотя бы один из коэффициентов $\overline{\alpha}_k$ положителен при $k \in \{0 : m\} \setminus \{i\}$.

Рассмотрим $u_\ell = A(a_i)_\ell$ — вектор с индексом ℓ в множестве $A(a_i)$ и аналогично $v_h = B(b_j)_h$, где $\ell \in 1 : m$, $h \in 1 : m_b$. Для $x \in \operatorname{conv} A$ справедливо

$$x - a_i = \alpha_0 0_n + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \sum_{\ell \in 1:m} \alpha_\ell u_\ell, \tag{7}$$

где $\alpha_0 = \overline{\alpha}_i$ и $\alpha_\ell = \overline{\alpha}_{\ell-1}$ при $\ell \in 1:i$, $\alpha_\ell = \overline{\alpha}_\ell$ при $\ell \in i+1:m$. Следовательно,

$$\sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell = 1 - \alpha_0, \text{ то есть } \quad 0 \leqslant \sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell \leqslant 1. \tag{8}$$

Аналогично из $y \in \operatorname{conv} B$ следует существование неотрицательных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m_b}$, для которых

$$y - b_j = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{m_b} v_{m_b} = \sum_{h\in 1:m_b} \beta_h v_h. \tag{9}$$

Для любой точки $z \in \operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B$ найдутся, согласно (2), $x \in \operatorname{conv} A$ и $y \in \in \operatorname{conv} B$, для которых $z = x + y$. Сложив (7) и (9), получим

$$z = (a_i + b_j) + \sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell u_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} \beta_h v_h. \tag{10}$$

Из определения 3 следует, что для любой не крайней точки c из политопа S найдутся различные точки $z, z' \in S$, для которых векторы $z - c$ и $z' - c$ противоположны (и потому $z + z' = 2c$).

Необходимость. Пусть точка $a_i + b_j$ не является крайней для политопа S. Тогда найдутся различные точки z и z' из S, для которых

$$z + z' = 2(a_i + b_j). \tag{11}$$

Представим точки z и z' в виде (10), то есть

$$z = (a_i + b_j) + \sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell u_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} \beta_h v_h, \tag{12}$$

$$z' = (a_i + b_j) + \sum_{\ell\in 1:m} \alpha'_\ell u_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} \beta'_h v_h, \tag{13}$$

где все $\alpha_\ell, \beta_h, \alpha'_\ell, \beta'_h$ неотрицательны. Складывая равенства (12) и (13), получим

$$z + z' = 2(a_i + b_j) - \sum_{\ell\in 1:m} (\alpha_\ell + \alpha'_\ell) u_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} (\beta_h + \beta'_h) v_h,$$

откуда, учитывая (11), имеем

$$\sum_{\ell\in 1:m} (\alpha_\ell + \alpha'_\ell) u_\ell = - \sum_{h\in 1:m_b} (\beta_h + \beta'_h) v_h. \tag{14}$$

Вектор в левой части равенства (14) ненулевой (иначе $z = z' = a_i + b_j$, а это противоречит условию $z \neq z'$) и принадлежит конусу $K(a_i)$, а также $-K(b_j)$, то есть справедливо

$$-K(b_j) \bigcap K(a_i) \neq \varnothing.$$

Достаточность. Пусть конусы $-K(b_j)$ и $K(a_i)$ пересекаются. Тогда найдутся два ненулевых вектора $q_a \in K(a_i)$ и $q_b \in K(b_j)$, для которых выполняется равенство

$$q_a = -q_b. \tag{15}$$

Покажем, что существуют две разные точки $z, z' \in S$ такие, что выполняется $z + z' = 2(a_i + b_j)$.

Согласно определению конусов $K(a_i)$ и $K(b_j)$ справедливо представление

$$q_a = \sum_{\ell \in 1:m} \alpha_\ell u_\ell, \quad q_b = \sum_{h \in 1:m_b} \beta_h v_h,$$

где все коэффициенты α_ℓ и β_h неотрицательны и хотя бы по одному из них положителен. Далее найдем достаточно малое положительное число γ, для которого точки z и z' вида

$$z = (a_i + b_j) + \gamma \sum_{\ell \in 1:m} \alpha_\ell u_\ell, \tag{16}$$

$$z' = (a_i + b_j) + \gamma \sum_{h \in 1:m_b} \beta_h v_h \tag{17}$$

принадлежат политопу S (см. (10)). Согласно выражениям (7)–(10) коэффициент γ должен удовлетворять системе неравенств:

$$\sum_{\ell \in 1:m} \gamma \alpha_\ell \leqslant 1, \quad \sum_{h \in 1:m_b} \gamma \beta_h \leqslant 1.$$

Выберем любое число γ в пределах

$$0 < \gamma \leqslant \min \left\{ \left(\sum_{\ell \in 1:m} \alpha_\ell \right)^{-1}, \left(\sum_{h \in 1:m_b} \beta_h \right)^{-1} \right\}.$$

Складывая равенства (16) и (17), получим

$$z + z' = 2(a_i + b_j) + \gamma(q_a + q_b),$$

откуда согласно (15) справедливо равенство

$$z - (a_i + b_j) = -(z' - (a_i + b_j)).$$

Если $z = z'$, то в силу (16) и (17) получим, что $q_a = q_b$. В то же время (см. (15)) $q_a = -q_b$. А это возможно, если q_a и q_b нулевые вектора, что противоречит исходным предположениям.

Получаем, что $z \neq z'$ и точка $a_i + b_j$ принадлежит середине отрезка $\operatorname{conv}\{z, z'\}$, то есть $a_i + b_j$ не является крайней в политопе S.

Замечание 2. Доказательство леммы 1 проводится аналогично, если вместо конуса $K(b_j)$ использовать вектор v.

4. Задача линейного программирования

Рассмотрим эффективный способ проверки критерия крайности точки из теоремы. Вопрос о пересечении конусов $K(a_i)$ и $-K(b_j)$ эквивалентен согласно равенству (14), существованию нетривиального, неотрицательного решения системы линейных однородных уравнений:

$$\sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell A(a_i)_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} \beta_h B(b_j)_h = 0_n. \tag{18}$$

Чтобы выполнить ограничения, накладываемые на решения системы (18), добавим следующие условия:

$$\sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} \beta_h = 1, \tag{19}$$

$$\alpha_\ell \geqslant 0,\ \ell \in 1:m, \quad \beta_h \geqslant 0,\ h \in 1:m_b. \tag{20}$$

Для проверки совместности системы (18)–(20) воспользуемся универсальным приемом [2]. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} \gamma \to \min, \\ \sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell A(a_i)_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} \beta_h B(b_j)_h = 0_n, \\ \sum_{\ell\in 1:m} \alpha_\ell + \sum_{h\in 1:m_b} \beta_h + \gamma = 1, \\ \alpha_\ell \geqslant 0,\ \ell \in 1:m, \quad \beta_h \geqslant 0,\ h \in 1:m_b, \quad \gamma \geqslant 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Заметим, что система ограничений задачи (21) совместна хотя бы для всех α_ℓ, β_h, равных нулю, и γ, равной единице. А также целевая функция ограничена снизу (неотрицательна на допустимом множестве), поэтому задача (21) имеет решение.

Если для найденного решения задачи (21) значение целевой функции γ равняется нулю, то система (18)–(20) совместна, то есть конусы $K(a_i)$ и $-K(b_j)$ пересекаются.

Предложенный в теореме критерий идентификации крайних точек для суммы политопов использует напрямую конусы, порожденные складываемыми политопами. Известные работы в этой области, например, [3; 4], оперируют нормальными конусами к вышеописанным множествам. Здесь под нормальным конусом, порожденным множеством C, понимается множество

$$N(C) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle \leqslant 0, c \in C\}.$$

Замечание 3. Критерий крайности точки $a_i + b_j$ для множества $\operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B$ может быть сформулирован в виде:

$$a_i + b_j \text{ — крайняя} \quad \Leftrightarrow \quad N(K(a_i)) \cap N(K(b_j)) \neq \varnothing. \tag{22}$$

Обоснование (22) подробно изложено, например, в диссертации [7].

В свою очередь, пересечение нормальных конусов в (22) проверяется решением следующей задачи линейного программирования [3, с. 1270]:

$$\begin{gathered} \lambda_0 \to \max, \\ \langle A(a_i)_\ell, \lambda\rangle + \lambda_0 \leqslant 0, \quad \ell \in 1:m, \\ \langle B(b_j)_h, \lambda\rangle + \lambda_0 \leqslant 0, \quad h \in 1:m_b, \\ \lambda_0 \leqslant 1, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Несложно проверить, что задачи (21) и (23) являются двойственными.

Выражаю благодарность неизвестному рецензенту за конструктивную критику, благодаря которой статья приняла свой окончательный вид.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта СПбГУ № 9.38.205.2014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейхтвейс, К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. — М. : Наука, 1985. — 336 с.

2. Малоземов, В. Н. Модифицированный симплекс-метод / В. Н. Малоземов // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 20 ноября 2010 г. — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1120. — Загл. с экрана.

3. Fukuda, K. From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes / K. Fukuda // J. Symbolic Comput. — 2004. — Vol. 38. — P. 1261–1272.

4. Gritzmann, P. Minkowski addition of polytopes: computational complexity and applications to Grobner bases / P. Gritzmann, B. Sturmfels // SIAM J. Discrete Math. — 1993. — Vol. 6. — P. 246–269.

5. Preparata, F. P. Computational Geometry: An Introduction / F. P. Preparata, M. I. Shamos. — N. Y. : Springer, 1985. — 398 p.

6. Rockafellar, R. Convex analysis / R. Rockafellar. — Princeton : Princeton University Press, 1970. — 470 p.

7. Weibel, C. Minkowski sums of polytopes: Ph.D. Thesis / C. Weibel. — Lausanne : EPFL, 2007. — 114 p.

REFERENCES

1. Leichtweiss K. *Vypuklye mnozhestva* [Convex Sets]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 336 p.

2. Malozemov V.N. Modifitsirovannyy simpleks-metod [Modified Simplex Method]. *Seminar «DHA & CAGD». Izbrannye doklady. 20 noyabrya 2010 g.* Available at: http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1120.

3. Fukuda K. From the Zonotope Construction to the Minkowski Addition of Convex Polytopes. *J. Symbolic Comput.*, 2004, vol. 38, pp. 1261-1272.

4. Gritzmann P., Sturmfels B. Minkowski Addition of Polytopes: Computational Complexity and Applications to Grobner Bases. *SIAM J. Discrete Math.*, 1993, vol. 6, pp. 246-269.

5. Preparata F.P., Shamos M.I. *Computational Geometry: An Introduction*. N. Y., Springer, 1985. 398 p.

6. Rockafellar R. *Convex analysis*. Princeton, Princeton University Press, 1970. 470 p.

7. Weibel C. *Minkowski sums of polytopes: Ph.D. Thesis*. Lausanne, EPFL, 2007. 114 p.

FINDING THE VERTICES OF THE SUM OF TWO POLYTOPES

Todor Angelov Angelov

Research Engineer,
Saint Petersburg State University
angelov.t@gmail.com
Prosp. Universitetsky, 35, Peterhof, 198504 Saint Petersburg, Russian Federation

Abstract. This work introduces a criterion for finding the vertices of a Minkowski sum of two polytopes $\operatorname{conv} A \subset \mathbb{R}^n$ and $\operatorname{conv} B \subset \mathbb{R}^n$, where $A = \{a_0, \dots, a_m\}$ and $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{m_b}\}$. These convex sets are also denoted as V-polytopes. The constructions used in the present paper stay entirely in the space of V-polytopes, without any transitions to their duals, that is H-polytopes (half-space representation).

Before formulating a general criterion, we consider a special case — the sum of a polytope $\operatorname{conv} A$ and a line segment $\operatorname{conv}\{b_0, b_1\}$.

The following lemma holds. *Fix i in* $0 : m$.

1) *If $v \notin K(a_i)$, then $a_i + v$ is a vertex of* $\operatorname{conv} A_v$.
   Else, $a_i + v$ is not a vertex of $\operatorname{conv} A_v$.
2) *If $-v \notin K(a_i)$, then a_i is a vertex of* $\operatorname{conv} A_v$.
   Else, a_i is not a vertex of $\operatorname{conv} A_v$.

Here $A_v = \{a_0, a_1, \dots, a_m, a_0 + v, a_1 + v, \dots, a_m + v\}$, $v = b_1 - b_0$,

$$K(a_i) := K(\operatorname{conv}\{a_0 - a_i, a_1 - a_i, \dots, a_{i-1} - a_i, a_{i+1} - a_i, \dots, a_m - a_i\}),$$

where $K(C)$ is a cone generated by set C.

Using an analogical scheme of reasoning as in the lemma, we present the main result of the this work.

Theorem. *Fix $i \in 0 : m$ and $j \in 0 : m_b$. The point $a_i + b_j$ is a vertex of the polytope $\operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B$ if and only if cones $-K(b_j)$ and $K(a_i)$ do not intersect.*

The suggested criterion possesses an intuitive graphic interpretation and is proven by elementary tools of convex anaylsis. In conclusion we note, that the theorem can be applied solving a linear programming problem. Moreover, the latter turns out to be dual to a similar LP problem, constructed using the properties of H-polytopes.

Key words: polytope, conical hull, Minkowski sum, vertex, linear programming.