В. Г. Яхно, Теорема единственности одной обратной задачи для гиперболического уравнения, *Дифференц. уравнения*, 1977, том 13, номер 3, 544–551

МАРТ 1977 г., ТОМ XIII, № 3

УДК 517.946

В. Г. ЯХНО

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной работе рассматривается задача восстановления нескольких функций, входящих в качестве коэффициентов в линейное гиперболическое уравнение второго порядка, по некоторым известным функционалам от его решения. Доказана теорема единственности решения этой задачи для некоторого класса функций.

Задача определения нескольких коэффициентов в линейном гиперболическом уравнении второго порядка по некоторой информации о фундаментальном решении для рассматриваемого уравнения исследовалась ранее В. Г. Романовым [1, 2] и А. С. Благовещенским [3]. В этих работах показано, что в тех постановках задач, которые рассматривались, единственным образом можно определить только некоторые линейные комбинации искомых коэффициентов.

Рассмотрим четыре дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \Delta_x u_i + \sum_{j=1}^{3} b_j(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + c(x) u_i + f_i(x, t), \tag{1}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \ x \in R^3, \quad t > 0, \quad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

при начальных условиях

$$u_i(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_i(x, t)\Big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Функции $c(x)$, $b_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, считаются известными на множестве $R^2 \times [-H, H] \setminus \Omega$ ($\Omega = \{x \,|\, x = (x_1, x_2, x_3), \ x \in R^2 \times [h, H], \ h > 0, \ H > h$ — заданные числа), а функции $f_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, заданы на множестве $R^2 \times [-H, H] \times [0, H]$ и такие, что $\frac{\partial^3}{\partial t^3} f_i \in C^4(R^2 \times [-H, H] \times [0, H])$.

Задача 1. Определить функции $c(x)$, $b_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, на множестве Ω, если решение $u_i(x, t)$ каждой из задач Коши (1), (2), $i = 1, 2, 3, 4$, при $x_3 = 0$ есть известная функция, т. е.

$$u_i(x, t)\big|_{x_3=0} = z_i(x_1, x_2, t), \tag{3}$$

где z_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — известные на $R^2 \times [h, H]$ функции.

Обозначим через $F(x, t)$ матрицу порядка 4×4, столбцами которой являются вектор-функции $(\mathrm{grad}_x f_i, f_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, через $\mathfrak{M}(\Omega)$—класс таких функций $a(x)$, что a, $\frac{\partial}{\partial x_j} a \in C(R^2 \times [-H, H])$, $j = 1, 2$, и на множестве Ω представимы в виде

$$a(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x_1, x_2)\,\psi_k(x_3),$$

где $N > 0$ — любое конечное число, причем для каждой функции $a(x)$ оно свое (такой класс функций рассматривался В. Г. Романовым в работах [2, 4]), через C_0^n — множество финитных по x_1, x_2 функций класса $C^n(R^2 \times \times [-H, H])$.

Теорема 1. *Пусть* $|\det F(x, 0)| \geqslant m > 0$ *при* $x \in \Omega$. *Тогда если существует решение задачи 1 в классе функции* $c(x)$, $b_j(x) \in C_0^3 \cap \mathfrak{M}(\Omega)$, $j=1$, 2, 3, *то оно единственно в этом классе.*

Доказательство теоремы 1 проводится сведением исследования единственности решения задачи 1 к исследованию единственности решения такой задачи интегральной геометрии, которая была рассмотрена В. Г. Романовым [2, 4]. В этих работах доказано, что при некоторых условиях (см. [2, стр. 167], [4, стр. 141—146]) в классе функции $\mathfrak{M}(\Omega)$ рассматриваемая задача интегральной геометрии имеет единственное решение. Ниже будет показано, что условия теоремы 1 являются достаточными для того, чтобы воспользоваться результатами этих работ.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что существует два решения поставленной задачи 1 $c_k(x)$, $b_j^k(x)$, $k=1, 2$, $j=1, 2, 3$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Обозначим через u_i^k, $k=1, 2$, $i=1, 2$, 3, 4, отвечающие им решения задач (1), (2) при $c=c_k$, $b_j=b_j^k$, $j=1, 2$, 3, соответственно. Пусть далее $\tilde{u}_i = u_i^1 - u_i^2$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4)$, $\tilde{c} = c_1 - - c_2$, $\tilde{b}_j = b_j^1 - b_j^2$, $j=1, 2, 3$, $a = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{c})$. Из равенств (1)—(3), соответствующих значению $k=1$, вычтем аналогичные равенства при $k = = 2$. При этом получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \Delta_x \tilde{u} - \sum_{j=1}^{3} b_j^1(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} - c_1(x)\,\tilde{u} = a(x)\,U(x, t), \tag{4}$$

$$\tilde{u}(x, t)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{u}(x, t)|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x, t)|_{x_3=0,\, t\in[h,H]} = 0, \tag{6}$$

где $U(x, t)$ — матрица порядка 4×4, столбами которой являются вектор-функции

$$(\mathrm{grad}_x\, u_i^2,\ u_i^2), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Решение задачи Коши (4), (5) запишем в виде

$$\tilde{u}(x, t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x - \sum_{j=1}^{3} b_j^1(x) \frac{\partial}{\partial x_j} - c_1(x)\right]^{-1} a(x)\,U(x, t) =$$

$$= \int R(\xi, x, t-\tau)\,a(\xi)\,U(\xi, \tau)\,d\xi d\tau, \tag{7}$$

здесь R — фундаментальное решение оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x - \sum_{j=1}^{3} b_j^1(x) \frac{\partial}{\partial x_j} - c_1(x), \quad d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Замечание 1. Функцию $R(\xi, x, t)$ можно построить по методу С. Л. Соболева [5], она имеет следующий вид (см., например, [1, гл. II, § 1]):

$$R(\xi, x, t) = \frac{1}{4\pi}\sigma(\xi, x)\,\delta(t-|\xi-x|) + \theta(t-|\xi-x|)\,R_1(\xi, x, t), \tag{8}$$

где δ — дельта-функция Дирака, θ — функция Хевисайда, R_1 — регулярная часть фундаментального решения,

$$\sigma(\xi, x) = \frac{1}{|\xi-x|}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(\xi_j-x_j)\int_0^1 b_j^1(x+s(\xi-x))\,ds\right\}, \tag{9}$$

Полагая в равенстве (7) $x=x^0$, $x^0\in E_2=\{x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3,\ x_3=0\}$ и формально применяя к левой части и правой полученного равенства дифференциальный оператор $\dfrac{\partial^3}{\partial t^3}$ (ниже будет показана законность применения этого оператора, а относительно дифференцирования и других операций к обобщенным функциям см., например, [8, гл. III]) и учитывая равенство (8), получаем

$$\int\delta(t-|\xi-x^0|)\,a(\xi)\,v(\xi, x^0, t)\,d\xi + \int\theta(t-|\xi-x^0|)\,a(\xi)\,v_1(\xi, x^0, t)\,d\xi=0, \tag{10}$$
$$t\in[h, H],$$

где

$$v(\xi, x^0, t) = \frac{\sigma(\xi, x^0)}{4\pi}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\xi, t-|\xi-x^0|) +$$
$$+\int_{|\xi-x^0|}^{t} R_1(\xi, x^0, \tau)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\xi, t-\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

$$v_1(\xi, x^0, t) = \frac{\partial}{\partial t}v(\xi, x^0, t). \tag{12}$$

В работах [2, 4] доказано, что если при $\sigma=D$

$$(D=\{(\xi, x^0, t)\mid \xi\in\Omega,\quad x^0\in E_2,\quad |\xi-x^0|\leqslant t\leqslant H\})$$

выполнены условия

а) $v,\ v_1\in C(\sigma)$,

б) $|\det v|_{t=|\xi-x^0|}|\geqslant m_1>0$,

в) $\dfrac{\partial}{\partial t}v_1=(t^2-|\xi-x^0|^2)^{-\frac{1}{2}}\mu+\gamma,\quad \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}v_1=(t^2-|\xi-x^0|^2)^{-\frac{1}{2}}\mu_i+$ $+\gamma_i$, μ, μ_i, γ, $\gamma_i\in C(\sigma)$, $i=1, 2, 3$, то уравнение (10) имеет при $\xi\in\Omega$ единственное решение $a(\xi)\equiv 0$.

Финитность по ξ_1, ξ_2 функций $c(\xi)$, $b_j(\xi)$, $j=1, 2, 3$ (см. условие теоремы 1), влечет финитность по ξ_1, ξ_2 вектор-функции $a(\xi)$. Поэтому, для того чтобы воспользоваться результатами работ [2, 4], достаточно проверить выполнение условий а), б), в) при $\sigma=D(T)$ $(D(T)=\{(\xi, x^0, t)\in D,\ |x^0|\leqslant T\})$, где $T>0$ — любое конечное число. Цель наших дальнейших исследований и будет заключаться в этой проверке. Для этого нам понадобится две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $b_j(x)$, $c(x)\in C^3(R^2\times[-H, H])$, $j=1, 2, 3$,

$\frac{\partial^3}{\partial t^3} f_i(x, t) \in C^4(R^2\times[-H, H]\times[0, H])$, $i=1, 2, 3, 4$. *Тогда при любом конечном* $T>0$ *для* $(x, t)\in\Delta(T)=\bigcup\limits_{x^0\in S(T)} K(x^0)$

$$(K(x^0)=\{(x, t)\mid x\in R^2\times[-H, H],\quad 0\leqslant t\leqslant H-|x-x^0|\},\quad x^0\in E_2,$$
$$S(T)=\{x^0\mid x^0\in E_2,\quad |x^0|\leqslant T\})$$

и для любого $i=1, 2, 3, 4$ *существует единственное решение* $u_i(x, t)$ *задачи Коши (1), (2), причем такое, что* $\frac{\partial^3}{\partial t^3} u_i\in C^2(\Delta(T))$.

Лемма 1 есть следствие теоремы 2 работы [6, стр. 223].

Лемма 2. *Пусть* $c(x)\in C^1(R^2\times[-H, H])$, $b_j(x)\in C^3(R^2\times[-H, H])$ $j=1, 2, 3$. *Тогда*

1) $R_1(\xi, x^0, t)\in C(D(T))$,

2) $\frac{\partial}{\partial t} R_1=(t^2-|\xi-x^0|^2)^{-\frac{1}{2}} w+g$, $\frac{\partial}{\partial \xi_i} R_1=(t^2-|\xi-x^0|^2)^{-\frac{1}{2}} w_i+$ $+g_i$, *где* w, g, w_i, $g_i\in C(D(T))$, $i=1, 2, 3$.

Доказательство леммы 2. Задача построения регулярной части $R_1(\xi, x^0, t)$ (см. формулу (8)) фундаментального решения оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-$ $-\Delta_x-\sum\limits_{j=1}^{3} b_j^1(x)\frac{\partial}{\partial x_j}-c_1(x)$ эквивалентна (см., например, [1, гл. II, § 1]) решению следующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$R_1(\xi, x^0, t)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int \delta(t-|\xi-y|-|y-x^0|)\,\sigma(x^0, y)\,L_y\sigma(y, \xi)\,dy+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int \theta(t-|\xi-y|-|y-x^0|)\,L_y\sigma(y, \xi)\,R_1(y, x^0, t-|\xi-y|)\,dy, \quad (13)$$

где $\sigma(y, \xi)$ определяется формулой (9), а

$$L_y\sigma(y, \xi)=\Delta_y\sigma(y, \xi)-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_j}(b_j(y)\,\sigma(y, \xi))+c(y)\,\sigma(y, \xi).$$

В работе [1, гл. II, § 1] показано, что $R_1\in C(D(T))$. Исследование поведения $\frac{\partial}{\partial t} R_1$, R_1 — решение интегрального уравнения (13) для случая $b_j(x)\equiv 0$, $j=1, 2, 3$, проведено Б. М. Левитаном в работе [7]. В этой работе получено первое из равенства 2). Для получения остальных равенств 2) ($b_j(x)\equiv 0$, $j=1, 2, 3$) нужно продифференцировать по x_i, $i=1, 2, 3$, имеющиеся в [7] явные формулы. Отметим, что в условиях леммы 2 функции $\sigma(x^0, y)|x^0-y|$, $|y-\xi|L_y\sigma(y, \xi)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка по своим переменным, поэтому исследование первых частных производных от R_1 при $b_j\not\equiv 0$, $j=1, 2, 3$, проводится так же, как и для $b_j(x)\equiv 0$. Тем самым лемма 2 следует из результатов работы [7].

Из равенств (11), (12), условий теоремы 1, лемм 1, 2 следуют условия а), б), в) при $\sigma=D(T)$.

Замечание 2. Из условия а), выполненного при $\sigma=D(T)$, T — достаточно большое число, и результатов работы [8, гл. III] следует законность применения оператора $\frac{\partial^3}{\partial t^3}$ к равенству (7) при $x=x^0$, $x^0\in E_2$.

Тем самым теорема 1 доказана.

Замечание 3. Пусть функции $c(x)$, $b_j(x)$, $j=1, 2, 3$, входящие в дифференциальные уравнения (1), известны на множестве $R^2\times[-H, H]\setminus\Omega(T)$, где

$$\Omega(T)=\{x=(x_1, x_2, x_3)|\, x\in R^2\times[h, H],\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\leqslant T\},$$

$0<h<H$, $T>0$, а функции $f_i(x, t)$, $i=1, 2, 3, 4$, заданы на множестве $R^2\times[-H, H]\times[0, H]$, причем

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} f_i\in C^4(R^2\times[-H, H]\times[0, H]).$$

Задача 2. Определить $c(x)$, $b_j(x)$, $j=1, 2, 3$, при $x\in\Omega(T)$, если известно, что каждое из решений $u_i(x, t)$, $i=1, 2, 3, 4$, задач Коши (1), (2) при

$$(x, t)\in\mathfrak{N}(T)=\{(x, t)|\, x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3,\quad x_3=0,\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\leqslant T+H,\quad t\in[h, H]\}$$

есть известная функция, т. е.

$$u_i(x, t)|_{\mathfrak{N}(T)}=z_i(x_1, x_2, t), \tag{3'}$$

где z_i — заданные функции, $i=1, 2, 3, 4$.

Теорема 2. *Пусть* $\det F(x, 0)\neq 0$, $x\in\Omega(T)$. *Тогда если решение задачи 2 существует в классе функции* $c(x)$, $b_j(x)\in C^3(R^2\times[-H, H])\cap\cap\mathfrak{M}(\Omega(T))$, $j=1, 2, 3$, *то оно единственно в этом классе.*

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 4. Рассмотрим 10 дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_i=\sum_{k,j=1}^{3} a_{kj}(x)\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3} b_j^1(x)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+c_1(x)\, w_i+f_i(x, t), \tag{14}$$

$$i=1, 2, \ldots, 10,\quad x\in R^3,\quad t>0,\quad a_{kj}\equiv a_{jk},$$

с данными Коши

$$w_i(x, t)|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t} w_i(x, t)|_{t=0}=0. \tag{15}$$

Коэффициенты, входящие в уравнение (14), такие, что оператор $\left[\sum_{k,j=1}^{3} a_{kj}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3} b_j^1(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c_1(x)\right]$ равномерно эллиптичен, кроме того, на множестве $R^2\times[-H, H]\setminus\Omega(T)$, $a_{kj}\equiv\delta_j^k$, $b_j^1\equiv b_j$, $c_1\equiv c$, где δ_j^k — символ Кронекера, b, c — заданные в $R^2\times[-H, H]$ функции, а на множестве $\Omega(T)$ a_{kj}, b_j^1, c^1, $j=1, 2, 3$, $k=1, 2, 3$, неизвестны. Будем считать, что $a_{kj}\in C^5(R^2\times[-H, H])\cap\mathfrak{M}(\Omega(T))$, c, c_1, b_j^1, $b_j\in C^4(R^2\times\times[-H, H])\cap\mathfrak{M}(\Omega(T))$. Функции $f_i(x, t)$, $i=1, 2, \ldots, 10$, считаются заданными и $\frac{\partial^3}{\partial t^3} f_i\in C^5(R^2\times[-H, H]\times[0, H])$. Наряду с равенствами (14), (15) будем рассматривать равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = \Delta u_i + \sum_{j=1}^{5} b_i(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + c(x) u_i + f_i(x, t), \tag{14'}$$

$$u_i(x, t)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} u_i(x, t)|_{t=0} = 0, \tag{15'}$$

$$i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Обозначим через $F(x, t)$ матрицу порядка 10×10, столбцами которой являются вектор-функции

$$\left(\operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial x_1} f_i, \ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_i, \ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} f_i, \ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f_i, \ \operatorname{grad}_x f_i, \ f_i\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Теорема 3. *Пусть* $\det F(x, 0) \neq 0$ *для* $x \in \Omega(T)$. *Тогда если* $w_i(x, t)|_{\mathfrak{N}(T)} = u_i(x, t)|_{\mathfrak{N}(T)}$, *то* $a_{kj} \equiv \delta_j^k$, $b_j^1 \equiv b$, $c_1 \equiv c$ *при* $x \in \Omega(T)$.

Доказательство теоремы 3 проводим по следующей схеме. Обозначим через $\tilde{u}(x, t)$, $a(x)$ следующие вектор-функции размерности 10: $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_{10})$, $a = (a_1, a_2, a_3, \tilde{b}, \tilde{c})$, где $\tilde{u}_i = u_i - w_i$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, $a_1 = (1 - a_{11}, -a_{12}, -a_{13})$, $a_2 = (1 - a_{22}, -a_{23})$, $a_3 = 1 - a_{33}$, $\tilde{b} = (b_1 - b_1^1, b_2 - b_2^1, b_3 - b_3^1)$, $\tilde{c} = c - c_1$. Из равенств (14), (15) вычтем равенства (14'), (15') и, учитывая введенные обозначения, получим равенства вида (4), (5) (см. доказательство теоремы 1), где $U(x, t)$ — матрица порядка 10×10, столбцами которой являются вектор-функции

$$\left(\operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial x_1} w_i, \ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} w_i, \ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} w_i, \ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} w_i, \ \operatorname{grad}_x w_i, \ w_i\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы 1, если лемму 1 заменим на следующую лемму.

Лемма 1'. *При любом конечном* $T > 0$ *для* $(x, t) \in \Delta(T)$ *и* $i = 1, 2, \ldots, 10$ *существует единственное решение* $w_i(x, t)$ *задачи Коши (14). (15), причем такое, что* $\dfrac{\partial^3 w_i}{\partial t^3} \in C^3(\Delta(T))$.

В тех условиях, которые были наложены на коэффициенты a_{kj}, b_j^1, c_1, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, и $f_i(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, лемма 1 есть простое следствие теоремы 2 работы [6, стр. 223].

Замечание 5. Рассмотрим четыре дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \Delta_x u_i + \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_k \partial y_j} + \sum_{m=1}^{3} b_m(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j^1(x) \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + c(x) u_i + f_i(x, y, t), \tag{16}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad x \in R^3, \quad y \in R^n, \quad t > 0, \quad a_{kj} \equiv a_{jk},$$

$$u_i(x, y, t)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} u_i(x, y, t)|_{t=0} = 0. \tag{17}$$

Здесь оператор $\Delta_x + \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j}$ равномерно эллиптический, функции $f_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, — заданные финитные функции на множестве $B = R^2 \times [-H, H] \times R^n \times [0, H]$, причем такие, что $\frac{\partial^3}{\partial t^3} f_i(x, y, t) \in C_0^4(B)$, а функции $a_{kj}(x)$, $b_m(x)$, $b_j^1(x)$, $c(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m = 1, 2, 3$, считаются известными на множестве $R^2 \times [-H, H] \diagdown \Omega(T)$ и неизвестными на $\Omega(T)$.

Обозначим через $\Phi(x, \lambda, t)$ матрицу порядка 4×4, столбцами которой являются вектор-функции $(\mathrm{grad}_x \tilde{f}_i(x, \lambda, t), \tilde{f}_i(x, \lambda, t))$, $i = 1, 2, 3, 4$, где $\tilde{f}_i(x, \lambda, t)$ есть образ Фурье от $f_i(x, y, t)$ по переменной y.

Задача 3. Определить функции $a_{kj}(x)$, $b_j^1(x)$, $b_m(x)$, $c(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $m = 1, 2, 3$, при $x \in \Omega(T)$, если известно, что каждое из решений $u_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, задач Коши (16), (17) при $(x, t) \in \mathfrak{N}(T)$, $y \in R^n$, есть известная функция, т. е.

$$u_i(x, y, t)|_{(x, t) \in \mathfrak{N}(T), y \in R^n} = z_i(x_1, x_2, y, t), \tag{18}$$

где z_i — заданные функции при $i = 1, 2, 3, 4$.

Теорема 4. *Пусть* $\Omega(T) \subset \mathrm{supp}\, \Phi(x, 0, 0)$ *и* $\det \Phi(x, 0, 0) \neq 0$ *для* $x \in \Omega(T)$. *Тогда если решение задачи 3 существует в классе функций* $a_{kj}(x)$, $b_j^1(x)$, $b_m(x)$, $c(x) \in C^3(R^2 \times [-H, H]) \cap \mathfrak{M}(\Omega(T))$, *то оно единственно в этом классе.*

Доказательство теоремы 4. Исследование единственности решения задачи 3 сведем к исследованию единственности решения задачи 1. Для этого заметим, что для любых заданных функций $a_{kj}(x)$, $b_j^1(x)$, $b_m(x)$, $c(x) \in C^3(R^2 \times [-H, H]) \cap \mathfrak{M}(\Omega(T))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m = 1, 2, 3$, и $f_i(x, y, t) \in C_0^4(B)$, $i = 1, 2, 3, 4$, согласно теореме 1 работы [6, стр. 211], существует единственное обобщенное решение $u_i(x, y, t)$ задач Коши (16), (17), которое вместе с частными производными второго порядка (при любом фиксированном $t > 0$) принадлежит пространству $L_2(R^2 \times [-H, H] \times R^n)$. Это замечание является достаточным для обоснования законности применения к правым и левым частям равенств (16) — (18) преобразования Фурье по переменным $y \in R^n$. Поэтому имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \Delta_x w_i + \sum_{m=1}^{3} b_m(x) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + q(x, \lambda) w_i + \tilde{f}_i(x, \lambda, t), \tag{19}$$

$$w_i(x, \lambda, t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} w_i(x, \lambda, t)\Big|_{t=0} = 0, \tag{20}$$

$$w_i(x, \lambda, t)\Big|_{(x, t) \in \mathfrak{N}(T), \lambda \in R^n} = \tilde{z}_i(x_1, x_2, \lambda, t), \tag{21}$$

где $w_i(x, \lambda, t)$, $\tilde{z}_i(x_1, x_2, \lambda, t)$ — образы преобразования Фурье по $y \in R^n$ функций $u_i(x, y, t)$, $z_i(x_1, x_2, y, t)$, а

$$q(x, \lambda) = -\sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j a_{kj}(x) + i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j^1(x) + c(x), \tag{22}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n.$$

Из непрерывности матрицы $\Phi(x, \lambda, 0)$ на множестве $\Pi_\varepsilon = \{(x, \lambda) | x \in \in \Omega(T), \lambda \in R^n, |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ (непрерывность $\Phi(x, \lambda, 0)$ на Π_ε следует из условий, наложенных на функции $f_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$) и условия $\det \Phi(x, 0, 0) \neq 0$, $x \in \Omega(T)$ (см. условие теоремы 4) следует существование такого $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \varepsilon$, что в Π_{ε_0} выполняется неравенство

$$\det \Phi(x, \lambda, 0) \neq 0. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь задачу 1 для уравнения (19) с начальными данными (20) и информацией (21), считая λ параметром, $\lambda \in R^n$ и $|\lambda| \leqslant \varepsilon_0$. Из теоремы 1, условия (23) следует, что если решение задачи 1 существует в классе функции $q(x, \lambda)$, $b_m(x)$, $m = 1, 2, 3$, где $q(x, \lambda)$ представима в виде (22), а $b_m(x)$, $c(x)$, $a_{kj}(x)$, $b^1_j(x) \in C^3(R^2 \times [-H, H]) \cap \mathfrak{M}(\Omega(T))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, $m = 1, 2, 3$, то оно единственно в этом классе. Поэтому для завершения доказательства теоремы 4 достаточно показать, что из условия

$$q(x, \lambda) \equiv 0, \quad x \in \Omega(T), \quad |\lambda| \leqslant \varepsilon_0 \tag{24}$$

следуют равенства

$$a_{kj}(x) \equiv 0, \quad b_j(x) \equiv 0, \quad c(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega(T), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Из формулы (22) вытекают формулы

$$\begin{gathered} q(x, \lambda)|_{\lambda=0} = c(x), \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_j} q(x, \lambda)|_{\lambda=0} = ib_j(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} q(x, \lambda)|_{\lambda=0} = -a_{jk}(x). \end{gathered} \tag{26}$$

Поэтому из равенств (24), (26) вытекают равенства (25) и тем самым теорема 4 доказана.

Литература

1. Романов В. Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, «Наука», 1972.

2. Романов В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений, спецкурс для студентов. Новосибирск, ротапринт НГУ, 1973.

3. Благовещенский А. С. Сб.: Математические вопросы теории распространения волн, 2. (Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 15). Ленинград, 1969, стр. 85—90.

4. Романов В. Г. Сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 4. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, стр. 140—146.

5. Соболев С. Л. Матем. сб., 1 (43), вып. 1, 1936.

6. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.

7. Левитан Б. М. Тр. Московск. матем. об-ва, 4, 1955, стр. 237—290.

8. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию
21 мая 1974 г.

Вычислительный центр
СО АН СССР