С. Я. Виленкин, А. Н. Калашян, Ошибки округления в экстраполяционном методе Ричардсона,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1987, том 27, номер 1, 128–130

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27, 1987 № 1

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.65

ОШИБКИ ОКРУГЛЕНИЯ В ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОМ МЕТОДЕ РИЧАРДСОНА

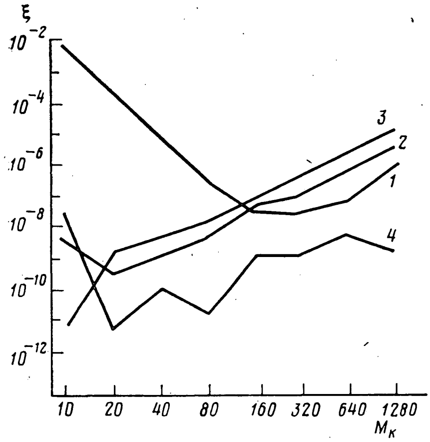
ВИЛЕНКИН С. Я., КАЛАШЯН А. Н.

(Москва)

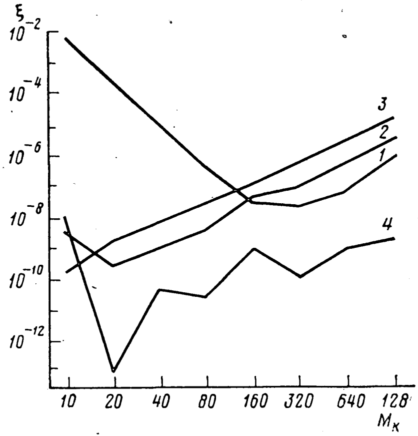
Введением дополнительной сетки подавляется влияние ошибок округления в методе Ричардсона при вычислениях на ЭВМ с небольшой разрядной сеткой.

Авторы книги [1] считают погрешность округлений пренебрежимо малой и не учитывают ее при выборе весовых коэффициентов. Это предположение оказывается неприемлемым в случае, когда рост накопления ошибок округления значительно влияет на точность решения. Небольшая разрядная сетка ЭВМ обычно является источником такого роста.

Ухудшение точности решения, найденного на последовательности сеток, при уменьшении шага интегрирования (см. фиг. 1 и 2, где *1* – погрешность решения схемы Кранка – Николсона, *2*, *3*, *4* – погрешности экстраполированных решений $U^H(2)$



Фиг. 1



Фиг. 2

$U_{31}{}^H(2)$, $U_1{}^H(2)$ соответственно) объясняется тем, что суммарная ошибка округлений $\varepsilon_h(x)$ обратно пропорциональна шагу интегрирования [2], [3]. Следовательно, при определении весовых коэффициентов необходимо учитывать и ошибки округлений.

Зафиксируем произвольную точку x из $\overline{\Omega}_h$. На основании теоремы 2.1 из [1], в этом узле выполняется разложение

$$u^h(x) = u(x) + \sum_{j=1}^{l} h^{ij} v_j(x) + \eta^h(x), \tag{1}$$

где

$$l = \begin{cases} m, & \text{если} \quad i=1, \\ [m/2], & \text{если} \quad i=2 \end{cases}$$

($i=2$ соответствует случаю, когда регулярная часть (1) содержит лишь четные степени h), $v_j(x)$ не зависят от h, а остаточный член удовлетворяет оценке

$$|\eta^h(x)|\leqslant\|\eta^h(x)\|_{\mathring{\Omega}_h}\leqslant ch^{m+\beta},$$

где c – некоторая постоянная, а β непосредственно связано со способом аппроксимации дифференциальных операторов разностными соотношениями (см. [1, с. 23]).

Пусть для $h_1>\ldots>h_{l+2}>0$

$$\overline{\Omega}_{\text{н}}=\bigcap_{k=1}^{l+2}\overline{\Omega}_{h_k}\neq\varnothing.$$

Обозначим через u^{h_k} решение для каждого h_k. С учетом погрешности округлений для каждого значения параметра h_k имеем единственное решение

$$\tilde{u}^{h_k}=u^{h_k}+\varepsilon_{h_k},$$

где $\varepsilon_{h_k}\approx\omega_k/h_k{}^p$, $p>0$, а ω_k – случайные независимые одинаково распределенные величины с математическим ожиданием ω и конечной дисперсией. Нахождение ω_k для каждого k – довольно сложная задача, поэтому рассмотрим $\varepsilon_{h_k}=\omega/h_k{}^p$. Такое предположение, как показывают численные результаты, оказывается оправданным.

Последовательность шагов h_k в экстраполяционном методе задается как функция основного шага h_1, т. е.

$$h_k=h_1/\varphi_k,\qquad k=1,2,\ldots,l+2,$$

где $1=\varphi_1<\ldots<\varphi_{l+2}$. Так, например, $\varphi_k=k$ или $\varphi_k=2^{k-1}$.

Пусть $\gamma_k{}^{(pi)}$ – решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{l+2}\gamma_k^{(pi)}\frac{\omega}{h_k{}^p}=0,\qquad\sum_{k=1}^{l+2}\gamma_k^{(pi)}=1,\qquad\sum_{k=1}^{l+2}\gamma_k^{(pi)}h_k{}^{ij}=0,\quad j=1,2,\ldots,l.\tag{2}$$

Так, например ($k=1,2,\ldots,l+2$),

$$\gamma_k^{(1,1)}=(-1)^{k+1-l}\varphi_k{}^l\left(\sum_{j=1}^{l+2}\varphi_j-\varphi_k\right)\left[\prod_{j=1}^{k-1}(\varphi_k-\varphi_j)\prod_{j=k+1}^{l+2}(\varphi_j-\varphi_k)\right]^{-1},$$

$$\gamma_k^{(2,1)}=(-1)^{k+1-l}\varphi_k{}^l\left(\sum_{j=1}^{l+2}\varphi_j{}^2+\sum_{s=1}^{l+1}\varphi_s\sum_{j=s+1}^{l+2}\varphi_j-\varphi_k\sum_{j=1}^{l+2}\varphi_j\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{l+2}\varphi_j\prod_{j=1}^{k-1}(\varphi_k-\varphi_j)\prod_{j=k+1}^{l+2}(\varphi_j-\varphi_k)\right]^{-1},$$

$$\gamma_k^{(1,2)}=(-1)^{k+1-l}\varphi_kA(jk)\left\{\sum_{s=1}^{k-1}(-1)^{s-l+1}\left(1-\frac{\varphi_s{}^2}{\varphi_k{}^2}\right)A(j,s)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{l+2}(-1)^{s-l}\left(\frac{\varphi_s{}^2}{\varphi_k{}^2}-1\right)A(j,s)\right\}\left[\sum_{s=1}^{l+2}(-1)^{s-l}A(j,s)\right]^{-1},$$

где

$$A(j,s)=\varphi_s^{2l+1}\left[\prod_{j=1}^{s-1}(\varphi_s{}^2-\varphi_j{}^2)\prod_{j=s+1}^{l+2}(\varphi_j{}^2-\varphi_s{}^2)\right]^{-1},$$

$$\gamma_k^{(2,2)}=(-1)^{k+1-l}\varphi_k{}^{2l}\left(\sum_{s=1}^{l+2}\varphi_s{}^2-\varphi_k{}^2\right)\left[\prod_{s=1}^{k-1}(\varphi_k{}^2-\varphi_s{}^2)\prod_{s=k+1}^{l+2}(\varphi_s{}^2-\varphi_k{}^2)\right]^{-1},$$

и при $p=1,2$, $i=1,2$ составим линейную комбинацию

$$U^{\text{н}}(x)=\sum_{k=1}^{l+2}\gamma_k^{(pi)}\tilde{u}^{h_k}(x).$$

Имеет место

Утверждение. *Пусть для сеточных областей* $\overline{\Omega}_{h_k}$ *с параметрами* $h_1>\ldots$ $\ldots>h_{l+2}>0$ *выполнены условия теоремы* 2.1 *из* [1] *с равномерной нормой и* $\varepsilon_{h_k}=\omega/h_k{}^p$, $p=1$, 2. *Тогда для экстраполированного решения* $U^H(x)$ *справедлива оценка*

$$\max|U^H(x)-u(x)|\leqslant d\left(\sum_{k=1}^{l+2}h_k\right)^{m+\beta}, \tag{3}$$

где u – *решение исходной задачи,* d – *константа, не зависящая от* h_k.

Доказательство. Учитывая разложение (1) и то, что $\gamma_k^{(pi)}$ находятся из системы (2), получаем

$$|U^H(x)-u(x)|\leqslant c\max_{1\leqslant k\leqslant l+2}|\gamma_k{}^{(pi)}|\sum_{k=1}^{l+2}h_k{}^{m+\beta}.$$

Так как функция φ_k монотонно возрастающая, то всегда найдется такое $a>0$, что $\varphi_{k+1}/\varphi_k\geqslant1+a$, $k=1, 2,\ldots, l+1$.

Нетрудно показать, что

$$|\gamma_k{}^{(p1)}|\leqslant p(l+2)\left(\frac{1+a}{a}\right)^{l+1}\varphi_{l+2},\qquad |\gamma_k{}^{(p2)}|\leqslant(l+1)\left(\frac{1+\bar{a}}{\bar{a}}\right)^{l+1}\varphi_{l+2}^2,$$

где $\bar{a}=a^2+2a$. Следовательно,

$$\max|U^H(x)-u(x)|\leqslant d\left(\sum_{k=1}^{l+2}h_k\right)^{m+\beta}.$$

Числовые результаты. Были проведены вычисления для примера, взятого из [1]:

$$u'+xu=(x^2+x+1)\exp(x),\quad x\in(0, 2),\qquad u(0)=0,$$

решением которого является функция $u(x)=\exp(x)$.

Вычисления проводились на ЭВМ с длиной слова в 32 разрядных знака (из них 24 отводятся на мантиссу числа) по схеме Кранка – Николсона

$$u^h(x_{j+1})=\frac{2-ha(x_{j+1/2})}{2+ha(x_{j+1/2})}u^h(x_j)+\frac{2h}{2+ha(x_{j+1/2})}f(x_{j+1/2}),\qquad u(x_0)=0, \tag{4}$$

где $a(x)=x$, $f(x)=(x^2+x+1)\exp(x)$.

Для задачи (4) выполнены предположения, позволяющие провести экстраполяцию по двум и более шагам h_k, и для нее регулярная часть разложения (1) содержит лишь четные степени h, а $\varepsilon_h=\omega/h$. Это обусловливает выбор весовых коэффициентов $\gamma_k^{(1,2)}$.

Сначала решим несколько разностных задач (4) с шагами $h_k=1/M_k$. По найденным u^{h_k} в точке $x=2$ построим экстраполированное решение по двум ($U^H(2)$) и трем ($U_{31}{}^H(2)$ для $\varphi_k=k$ и $U_{32}{}^H(2)$ для $\varphi_k=2^{k-1}$) приближениям с весовыми коэффициентами, приведенными в [1].

С коэффициентами $\gamma_k^{(1,2)}$ найдем экстраполированное решение $U_1{}^H(2)$ ($\varphi_k=k$) и $U_2{}^H(2)$ ($\varphi_k=2^{k-1}$) по трем приближениям.

Построим график зависимости

$$\xi_k(M_k)=|u^{h_k}(2)-u(2)|$$

от числа M_k точек сетки $\omega_{h_k}=\{x_j=jh_k,\ j=0, 1,\ldots, M_k\}$ в точке $x=2$. Этот график приведен в логарифмических координатах на фиг. 1 и 2. Аналогичные графики строятся для экстраполированных решений. Из фиг. 1 и 2 видно, что предложенный метод определения весовых коэффициентов действительно позволяет повысить точность решений при вычислениях на ЭВМ с небольшой разрядной сеткой.

Литература

1. *Марчук Г. И., Шайдуров В. В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
2. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.
3. *Henrici P.* Discrete variable methods in ODE's. N. Y.: J. Wiley and Son's, 1962.

Поступила в редакцию 22.III.1985
Переработанный вариант 19.III.1986