



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Тихомандрицкий, Разность n -го порядка логарифмической функции,
Сообщ. и протоколы заседаний Матем. общ. при Император. Харьков. унив. 1886 года, 1886, выпуск 1, 42–44

<https://www.mathnet.ru/khmo386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

11 августа 2025 г., 23:26:07



РАЗНОСТЬ

n-ГО ПОРЯДКА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.

М. А. Тихомандрицкаго.

Пусть дана некоторая функция u_x отъ переменнѣй x ; разность *n*-го порядка этой функции чрезъ члены ряда ея значеній:

$$u_x, u_{x+h}, u_{x+2h} \dots \dots u_{x+nh}, \quad (1)$$

соотвѣствующихъ послѣдовательному увеличенію значеній x на h , выражается, какъ извѣстно, такимъ образомъ:

$$\Delta^n u_x = u_{x+nh} - C_1^n u_{x+(n-1)h} + C_2^n u_{x+(n-2)h} - \dots + (-1)^n u_x, \quad (2)$$

гдѣ C_m^n обозначаетъ *m*-ый биноміальный коэффициентъ; разность *n*-го порядка отъ $\log u_x$ выразится чрезъ члены ряда (1), если возьмемъ логарифмъ отъ дроби, числитель которой будетъ состоять изъ произведенія тѣхъ членовъ этого ряда, предъ которыми въ формулѣ (2) стоитъ знакъ +, знаменатель же изъ произведенія тѣхъ, предъ которыми стоитъ знакъ —, — возвышенныхъ каждый въ степень, показываемую его коэффициентомъ въ той же формулѣ (2), такимъ образомъ:

$$\Delta^n \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_2^n} (u_{x+(n-4)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1^n} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n} \dots} \right\} \quad (3)$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ послѣдовательно:

$$\Delta \log u_x = \log u_{x+h} - \log u_x = \log \frac{u_{x+h}}{u_x};$$

$$\Delta^2 \log u_x = \Delta \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}} - \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2};$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 \log u_x &= \Delta \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2} = \log \frac{u_{x+3h} \cdot u_{x+h}}{(u_{x+2h})^2} - \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2} = \\ &= \log \frac{u_{x+3h} \cdot (u_{x+h})^3}{(u_{x+2h})^3 u_x}; \end{aligned}$$

и т. д. — результаты, которые получаются изъ (3), полагая въ ней $n = 1, 2, 3$, и т. д.; такъ что остается только показать, что наша формула, разъ она вѣрна до порядка n , будетъ вѣрна и для непосредственно слѣдующаго, а слѣдовательно и для всякаго порядка. Для этого беремъ разность отъ обѣихъ частей (3); будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} \log u_x &= \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n} \dots} \right\} - \\ &= \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_2^n} \cdot (u_{x+(n-4)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_3^n} \dots} \right\} = \\ &= \log \left\{ \frac{u_{x+(n-1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n + C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n + C_3^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n + 1} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n + C_2^n} \dots} \right\}; \end{aligned}$$

но, по известнымъ свойствамъ биноміальныхъ коэффициентовъ,

$$C_1^{n+1} = C_1^{n+1}; C_2^n + C_1^n = C_2^{n+1}; C_3^n + C_2^n = C_3^{n+1}; C_4^n + C_3^n = C_4^{n+1},$$

и т. д.;

слѣд. мы получаемъ:

$$\Delta^{n+1} \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^{n+1}} \cdot (u_{x+(n-3)h})^{C_4^{n+1}} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^{n+1}} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^{n+1}} \dots} \right\},$$

— результатъ, который получается изъ (3) чрезъ перемѣну n на $n + 1$, что и доказываетъ справедливость нашей формулы для всякаго значенія n .

Такимъ образомъ формула (3) выводится непосредственно изъ самаго опредѣленія конечной разности; но ее можно получить еще скорѣе изъ формулы (2), перемѣнивъ въ послѣдней u_x на $\log u_x$ и соединивъ затѣмъ всѣ члены въ одинъ на основаніи известныхъ свойствъ логарифма.