Дискретная математика

том 18 выпуск 3 * 2006

УДК 519.2

Распределения чисел конечных подграфов в случайных неоднородных гиперграфах

© 2006 г. А. В. Шаповалов

Рассматриваются два случайных гиперграфа с n вершинами и $M = M(n)$ ребрами, из которых $M_i = M_i(n)$ ребер состоят из i неупорядоченных вершин, $i = 0, 1, \ldots, m$, $M = M_0 + M_1 + \ldots + M_m$. Выбор вершин для каждого ребра осуществляется случайно, равновероятно из n возможных вершин, для первого случайного гиперграфа по схеме с возвращением, для второго по схеме без возвращения. Исследуются распределения чисел подграфов, изоморфных заданным, при $n \to \infty$, $M = M(n)$. Понятия степени и сбалансированности графов распространены на неоднородные гиперграфы. Получена предельная многомерная пуассоновская теорема для чисел строго сбалансированных подграфов, имеющих одинаковую степень. Построена пороговая функция свойства, заключающегося в наличии подграфа, изоморфного произвольному конечному гиперграфу. Для случайных графов такие результаты получены в работах Эрдёша, Реньи, Боллобаша, для случайных однородных гиперграфов (то есть при $M = M_m$) — в работах автора.

1. Формулировка основных результатов

Один из эффективных методов изучения характеристик случайных систем уравнений предполагает использование структурных свойств случайных графов и случайных гиперграфов (см. [4, 5, 9]). В данной работе продолжается начатое в [9] исследование случайных неоднородных гиперграфов, которое в дальнейшем позволит получить широкий спектр асимптотических результатов для случайных линейных и нелинейных систем уравнений.

Под случайным гиперграфом понимается случайный элемент (см. [3]), принимающий значения в некотором множестве гиперграфов в соответствии с некоторой вероятностной мерой. Это множество гиперграфов называется множеством реализаций случайного гиперграфа. Рангом ребра будем называть число инцидентных ему вершин. Число элементов в конечном множестве Z будем, как обычно, обозначать $|Z|$.

Изучаемые случайные гиперграфы имеют n вершин и M ребер. Пусть m — фиксированное натуральное число, $m \geqslant 2$ и

$$0 \leqslant c_0 < 1, \quad 0 \leqslant c_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad c_0 + \ldots + c_m = 1.$$

Множество реализаций случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ состоит из гиперграфов с множеством вершин X и M ребрами, из которых M_i имеют ранг i, $i = 0, 1, \ldots, m$, $m \geqslant 1$, $M_0 + M_1 + \ldots + M_m = M$, $|X| = n$ (в контексте данного определения полагается

$\overline{M} = (M_0, M_1, \ldots, M_m)$). Вершины в ребрах неупорядочены, среди них могут быть совпадающие (применяется выборка вершин по схеме с возвращением), ребра с одинаковыми степенями различимы (или упорядочены, занумерованы). Вероятности всех реализаций одинаковы и равны $\prod_{i=1}^{m} \binom{n+i-1}{i}^{-M_i}$ (см. [6], с. 220). Такое определение эквивалентно следующей часто используемой форме определения случайного гиперграфа: для каждого i, $i = 0, 1, \ldots, m$, последовательно случайно и равновероятно выбираются M_i ребер с рангом i из всех возможных $\binom{n+i-1}{i}$ ребер, имеющих ранг i. Ребра, имеющие ранг ноль, все одинаковы.

Случайный гиперграф $MG_{n,\overline{M}}$ определяется аналогично $M\hat{G}_{n,\overline{M}}$ с единственным отличием: выбор i переменных осуществляется не из $\binom{n+i-1}{i}$, а из $\binom{n}{i}$ равновероятных вариантов (выборка без возвращения). Вероятности реализаций случайного гиперграфа $MG_{n,\overline{M}}$ одинаковы и равны $\prod_{i=1}^{m} \binom{n}{i}^{-M_i}$.

Свойства случайных гиперграфов изучаются при $n \to \infty$, когда M зависит от n некоторым образом, то есть $M = M(n)$, а числа ребер с рангом i следующим образом связаны с константами c_i: если $c_i = 0$, то $M_i = 0$, если $c_i > 0$, то $M_i \sim c_i M$, $i = 1, \ldots, m$. Все асимптотические формулы приводятся при $n \to \infty$.

Под вероятностью $\mathbf{P}(Q)$ свойства Q реализаций некоторого случайного гиперграфа понимается сумма вероятностей реализаций этого случайного гиперграфа, обладающих свойством Q. Эрдёш и Реньи в [13] при изучении случайных графов обнаружили, что многие свойства обладают пороговыми функциями, определяемыми в рассматриваемом случае следующим образом. Если существует функция $Q(n)$, возрастающая при $n \to \infty$ и такая, что вероятность свойства Q удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Q) = \begin{cases} 1 & \text{при } M(n)/Q(n) \to \infty, \\ 0 & \text{при } M(n)/Q(n) \to 0, \end{cases}$$

то такая функция называется пороговой функцией свойства Q, или порогом свойства Q в случайном гиперграфе.

Если свойство гиперграфа, заключающееся в наличии в его реализациях подграфов, изоморфных некоторому гиперграфу (одному из элементов некоторого множества гиперграфов) имеет пороговую функцию, будем называть ее пороговой функцией этого гиперграфа (множества гиперграфов).

Гиперграф называется $\mathbf{l}$-графом, если он содержит l_i ребер, имеющих ранг i, $i = 0, 1, \ldots, m$, где $\mathbf{l} = (l_0, l_1, \ldots, l_m)$ (см. [9]). Говоря об $\mathbf{l}$-графах, будем полагать, что $l_0 + l_1 + \ldots + l_m = l$. Степенью (средневзвешенной) $\mathbf{l}$-графа H с k вершинами назовем величину $D(H) = \left(\sum_{i=1}^{m} i l_i - k\right) / l$. Условие $k \neq \sum_{i=1}^{m} i l_i$ выполняется всегда, за исключением неинтересного случая, когда гиперграф состоит из попарно непересекающихся ребер. Максимальной (средневзвешенной) степенью $D_m(H)$ гиперграфа H будем называть максимальное значение степеней всех его собственных подграфов. Гиперграф сбалансирован и строго сбалансирован, если его степень, соответственно, не меньше и строго больше его максимальной степени. Будем называть ребро простым, если все инцидентные ему вершины различны, и особым в противном случае. Гиперграф H, являющийся $\mathbf{l}$-графом, будем называть допустимым в реализациях случайного гиперграфа, если $c_i > 0$ для каждого $l_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Это означает, что в реализациях случайных гиперграфов имеются ребра со всеми рангами, которые имеют ребра гиперграфа H.

Теорема 1. *Непустой конечный класс конечных гиперграфов $\mathfrak{B}_D$, допустимых в реализациях одного из случайных гиперграфов $MG_{n,\overline{M}}$, $M\hat{G}_{n,\overline{M}}$ и имеющих максимальную степень D, имеет пороговую функцию n^D.*

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* 1 $\mathfrak{B}_D = \{H_1, \ldots, H_t\}$ *и* $\zeta_n^{(j)}$ *— число допустимых* H_j*-графов в реализациях случайного гиперграфа* $MG_{n,\overline{M}}$ *или* $M\widehat{G}_{n,\overline{M}}$, $j = 1, 2, \ldots, t$. *Тогда при* $M(n)/n^D \to \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_n^{(j)} \geqslant \mathbf{E}\zeta_n^{(j)}/2) = 1 + o(1), \qquad \mathbf{E}\zeta_n^{(j)} \to \infty.$$

Следствие 2. *В случайных гиперграфах* $MG_{n,\overline{M}}$, $M\widehat{G}_{n,\overline{M}}$ *при* $c_s + \ldots + c_m > 0$ *пороговая функция гиперграфа, состоящего из двух простых ребер, пересекающихся по* $s \geqslant 1$ *вершинам, равна* $n^{s/2}$.

Следствие 3. *В случайных гиперграфах* $MG_{n,\overline{M}}$, $M\widehat{G}_{n,\overline{M}}$ *пороговая функция допустимого гипердерева, имеющего* $l \geqslant 1$ *ребер, равна* $n^{1-1/l}$.

Следствие 4. *В случайных гиперграфах* $MG_{n,\overline{M}}$, $M\widehat{G}_{n,\overline{M}}$ *при* $c_0 + c_1 = 0$ *пороговая функция связного конечного гиперграфа с единственным циклом равна* n.

Следствие 5. *В случайном гиперграфе* $M\widehat{G}_{n,\overline{M}}$ *при* $c_s > 0$, $1 \leqslant r \leqslant s-1$, $2 \leqslant s \leqslant m$, *особое ребро ранга* s, *состоящее из* $s - r$ *вершин (как элементов множества* X*), имеет пороговую функцию, равную* n^r.

Теорема 2. *Пусть* $H_1, H_2, \ldots, H_t$ *— фиксированные неизоморфные строго сбалансированные гиперграфы, допустимые в реализациях случайных гиперграфов* $MG_{n,\overline{M}}$ *и* $M\widehat{G}_{n,\overline{M}}$, *причем* H_j *имеет* $k^{(j)}$ *вершин и* $l^{(j)} = \sum_{i=1}^m l_i^{(j)}$ *ребер, где* $l_i^{(j)}$ *— число ребер ранга* i, $i = 1, 2, \ldots, m$, $a^{(j)}$ *— порядок группы автоморфизмов, все гиперграфы имеют одинаковую степень* $D > 0$, $m \geqslant 1$, $\zeta_n^{(j)}$ *— число* H_j*-графов в рассматриваемых случайных гиперграфах,* $j = 1, 2, \ldots, t$.

Тогда при $M \sim cn^D$, *где* c *— положительная постоянная, для любого натурального* t *распределение векторной случайной величины* $(\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)}, \ldots, \zeta_n^{(t)})$ *слабо сходится к многомерному распределению Пуассона с независимыми компонентами и вектором средних значений* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t)$, *а для любых целых неотрицательных* $s, t_1, t_2, \ldots, t_s$, *для которых* $t_1 + t_2 + \ldots + t_s = t$, *распределение векторной случайной величины*

$$\left(\sum_{j=1}^{t_1} \zeta_n^{(j)}, \sum_{j=t_1+1}^{t_1+t_2} \zeta_n^{(j)}, \ldots, \sum_{j=t_1+t_2+\ldots+t_{s-1}+1}^{t} \zeta_n^{(j)} \right)$$

слабо сходится к многомерному распределению Пуассона с независимыми компонентами и вектором средних значений

$$\left(\sum_{j=1}^{t_1} \lambda_j, \sum_{j=t_1+1}^{t_1+t_2} \lambda_j, \ldots, \sum_{j=t_1+t_2+\ldots+t_{s-1}+1}^{t} \lambda_j \right),$$

где

$$\lambda_j = \frac{c^{l^{(j)}}}{a^{(j)}} \prod_{i=1}^m (i!c_i)^{l_i^{(j)}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, t.$$

Пороговая функция для класса сбалансированных графов получена в [13], для класса сбалансированных однородных гиперграфов анонсирована в [1], для произвольного, вообще говоря, не обязательно конечного графа в [11, 12], для произвольного конечного

однородного гиперграфа в [7]. Ее изменение можно проследить на примере пороговой функции гиперграфа H в $MG_{n,\bar{M}}$. В соответствии с теоремой 1 пороговая функция гиперграфа H в случайном неоднородном гиперграфе $MG_{n,\bar{M}}$ равна $n^{(\sum_{i=1}^{m} i l_i - k)/l}$, где l_i — число ребер ранга i в подграфе гиперграфа H, имеющем максимальную степень, $i = 1, 2, \ldots, m$; k — число вершин в этом подграфе. Для случайного однородного гиперграфа при $c_m = 1$ получаем пороговую функцию $n^{m-k/l}$, где k и l — числа вершин и ребер в подграфе гиперграфа H, имеющем максимальную степень. При $c_2 = 1$ отсюда получается пороговая функция $n^{2-k/l}$ для случайного графа.

Следствие 1 вносит существенное дополнение к пороговым свойствам конечных подграфов: при $M(n)/n^D \to \infty$ реализации рассматриваемых случайных гиперграфов не только содержат хотя бы один H_j-граф, но их число стремится к бесконечности со стремящейся к единице вероятностью при $n \to \infty$.

Первые результаты о пуассоновском распределении чисел строго сбалансированных графов в случайном графе опубликованы в [11, 12]. При развитии другого подхода доказательства результатов такого вида в [10] применена техника нормальной аппроксимации Стейна [14]. Обобщения на случайные однородные гиперграфы получены в [8].

Для доказательства теоремы 1 получаются оценки среднего и дисперсии числа изучаемых подграфов и применяются неравенства Маркова, Чебышёва. Доказательство теоремы 2 проводится методом моментов.

Обзоры работ по случайным графам и гиперграфам можно найти в [4, 5, 7, 9, 12, 13], определения из теории гиперграфов в [2, 7–9].

2. Доказательства утверждений

Будем обозначать $V(F)$ и $R(F)$ множества вершин и ребер гиперграфа F, $R_i(F)$ множество его ребер, имеющих ранг i, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Введем определение декомпозиции гиперграфа, обобщая соответствующее определение декомпозиции для графа и однородного гиперграфа в смысле Боллобаша (см. [7, 11, 12]). Пусть H — подграф гиперграфа F, и F имеет на k^* вершин и на l_i^* ребер ранга i больше, чем H, $i = 1, 2, \ldots, m$. Дополнительной (средневзвешенной) степенью гиперграфа F над H назовем величину

$$D(F \mid H) = \left(\sum_{i=1}^{m} i l_i^* - k^* \right) / l^*.$$

Максимальной (средневзвешенной) дополнительной степенью гиперграфа F над H будем называть максимальное значение дополнительных степеней всех подграфов гиперграфа F над H:

$$m(F \mid H) = \max\{D(F \mid H) : H \subset F' \subset F,\ V(H) \neq V(F')\}.$$

Определим последовательность подграфов гиперграфа F: F_1 — подграф, имеющий степень, равную максимальной степени гиперграфа F, то есть $D(F_1) = D_m(F)$, причем F_1 не имеет собственных подграфов, обладающих таким свойством. Гиперграф F_{i+1} определяется следующим образом:

$$V(F_i) \subset V(F_{i+1}) \neq V(F), \quad V(F_{i+1}) \neq V(F_i), \quad D(F_{i+1} \mid F_i) = m(F \mid F_i).$$

Полученную таким образом последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_t$, где $F_t = F$, будем называть декомпозицией гиперграфа F. Из определения следует, что

$$D(F_1) = D_m(F) \geqslant D(F_2 \mid F_1) \geqslant D(F_3 \mid F_2) \geqslant \ldots \geqslant D(F_t \mid F_{t-1})$$

и то, что не все гиперграфы имеют единственную декомпозицию.

2.1. Доказательство теоремы 1 и следствий

Проведем доказательство для $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$. Для второго случайного гиперграфа доказательство полностью повторяется с заменой в формулах величин $\binom{n+i-1}{i}$ на величины $\binom{n}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Рассмотрим гиперграф F, имеющий подграф F_0, причем F имеет на $k \geqslant 1$ вершин и l_i ребер ранга i больше, чем F_0, $i = 1, 2, \ldots, m$, и F — единственный подграф в F с максимальной дополнительной степенью над F_0:

$$m(F \mid F_0) = D(F \mid F_0) = \left(\sum_{i=1}^{m} i l_i - k\right) / l.$$

Гиперграф F допустим в реализациях случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, поэтому $l_i = 0$ при $c_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Пусть $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cup V_2 = \varnothing$ и

$$|V_2| = n_2 \sim \theta_2 n, \quad \theta_2 > 0, \quad M / n_2^{(\sum_{i=1}^{m} i l_i - k)/l} \to \infty$$

при $n \to \infty$, и пусть $\tilde{F}_0$ — фиксированный F_0-гиперграф, множество вершин $V(\tilde{F}_0)$ которого лежит в V_1.

Докажем, что вероятность того, что имеющие подграф $\tilde{F}_0$ реализации случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, содержат F-граф H, имеющий этот подграф $\tilde{F}_0$, стремится к единице, то есть, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_M\{M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset H \supset \tilde{F}_0 : H \cong F \mid M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset \tilde{F}_0\} = 1. \tag{1}$$

Из определения F следует, что $k \leqslant \sum_{i=1}^{m} i l_i$, причем равенство достигается в том и только том случае, когда l_i ребер ранга i, $i = 0, 1, \ldots, m$, о которых идет речь в определении F, изолированы в F (то есть каждое из этих ребер не инцидентно остальными ребрам F). Учитывая замечание о соотношении величин c_i и l_i, убеждаемся в очевидности утверждения формулы (1) при условии, что $k = \sum_{i=1}^{m} i l_i$. Поэтому далее в доказательстве рассматриваем случай $k < \sum_{i=1}^{m} i l_i$.

Рассмотрим вероятностное пространство, элементами которого являются все реализации случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, имеющие на множестве вершин $V(\tilde{F}_0)$ подграф $\tilde{F}_0$. Введем на нем равномерную меру и обозначим соответствующий гиперграф через $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$. Несложно убедиться, что $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$ имеет $\prod_{i=1}^{m} \binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)}}$ реализаций, где $l_i^{(0)}$ — число ребер ранга i в F_0, $i = 0, 1, \ldots, m$. Для рассматриваемой нами вероятности справедлива оценка

$$\mathbf{P}_M\{M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset H \supset \tilde{F}_0 : H \cong F \mid M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset \tilde{F}_0\} = \mathbf{P}_M\{M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0) \supset H \supset \tilde{F}_0 : H \cong F\}. \tag{2}$$

Для доказательства формулы (1) достаточно получить оценку для правой части последнего равенства при $n \to \infty$. Обозначим через ζ_n число F-графов в случайном графе $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$ таких, что $H \supset \tilde{F}_0$, $V(H) \setminus V(\tilde{F}_0) \subset V_2$ и существует изоморфизм гиперграфов H и F, отображающий $\tilde{F}_0$ в F_0. Среднее значение случайной величины ζ_n определяется формулой

$$\mathbf{E}\zeta_n = \binom{n_2}{k} t \prod_{i=1}^{m} \left(\left(M_i - l_i^{(0)}\right)_{l_i} \binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)} - l_i} \binom{n+i-1}{i}^{-\left(M_i - l_i^{(0)}\right)} \right).$$

Действительно, число способов выбора недостающих k вершин из множества V_2 для H-графов равно $\binom{n_2}{k}$; $t \geqslant 1$ — константа, зависящая только от F и F_0, равная числу размещений l_i ребер ранга i из $\{R(F) \setminus R(\tilde{F}_0)\}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, так, чтобы получившиеся H-графы были различными (без учета меток ребер); $(M_i - l_i^{(0)})_{l_i}$ — число способов выбора номеров для этих l_i ребер ранга i из $M_i - l_i^{(0)}$ номеров; $\binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)} - l_i}$ — число вариантов выбора оставшихся $M_i - l_i^{(0)} - l_i$ ребер ранга i; $\prod_{i=1}^{m} \binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)}}$ — общее число гиперграфов в $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$.

Убеждаемся, что

$$\mathbf{E}\zeta_n \sim t \frac{n_2^k}{k!} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{i! M_i}{n^i} \right)^{l_i} = \theta_2^k \frac{t}{k!} \prod_{i=1}^{m} (i! c_i)^{l_i} \left(\frac{M}{n^{(\sum_{i=1}^{m} i l_i - k)/l}} \right)^{l}.$$

Следовательно, в условиях леммы $\mathbf{E}\zeta_n \to \infty$.

Второй факториальный момент случайной величины ζ_n равен математическому ожиданию числа всех упорядоченных пар (H_1, H_2) в F-графах, удовлетворяющих условиям

$$H_i \supset \tilde{F}_0, \quad \{V(H_i) \setminus V(\tilde{F}_0)\} \subset V_2, \quad i = 1, 2, \quad H_1 \neq H_2$$

(при этом ребра учитываются вместе с метками).

Пусть Σ_1 — сумма математических ожиданий таких пар (H_1, H_2) в F-графах, для которых $V(H_1) \cap V(H_2) = V(\tilde{F}_0)$. Тогда

$$\Sigma_1 = \binom{n_2}{k} \binom{n_2 - k}{k} t^2 \prod_{i=1}^{m} \left(\left(M_i - l_i^{(0)}\right)_{2l_i} \binom{n+i-1}{i}^{-2l_i} \right) \sim (\mathbf{E}\zeta_n)^2.$$

Рассмотрим теперь подграфы H_1, H_2, для которых

$$|V(H_1) \cap V(H_2) \cap V_2| = s \geqslant 1,$$
$$0 \leqslant |\{R_i(H_1) \cap R_i(H_2)\} \setminus R_i(\tilde{F}_0)| = r_i < l,$$

причем под пересечением множеств ребер понимаются ребра, имеющие не только одинаковые множества вершин, но и номера. Среднее значение числа таких пар (H_1, H_2) в F-графах, для которых $s \geqslant 1$, оценивается сверху величиной

$$t^2 \sum_{s=1}^{k} \binom{n_2}{k} \binom{n_2 - k}{k - s} \binom{k}{s} \prod_{i=1}^{m} \left(\left(M_i - l_i^{(0)}\right)_{2l_i} \binom{n+i-1}{i}^{-2l_i} \right) = O\left(\frac{1}{n} (\mathbf{E}\zeta_n)^2 \right)$$

при $r_1 + \ldots + r_m = r = 0$ и величиной

$$\sum_{1 \leqslant r_1 + \ldots + r_m < l} t^2 \sum_{1 \leqslant s \leqslant k} \binom{n_2}{k} \binom{n_2 - k}{k - s} \binom{k}{s} \prod_{i=1}^{m} \left(\left(M_i - l_i^{(0)} \right)_{2l_i - r_i} \binom{n + i - 1}{i}^{-(2l_i - r_i)} \right)$$

при $1 \leqslant r = r_1 + \ldots + r_m < l$. Тогда для

$$\Sigma_2 = \mathbf{E}\zeta_n^{[2]} - \Sigma_1$$

справедлива оценка

$$\Sigma_2 = O\left(\frac{1}{n}(\mathbf{E}\zeta_n)^2\right) + O\left(\left(\frac{M^{\sum_{i=1}^m l_i}}{n^{\sum_{i=1}^m i l_i - k}} \right)^2 \sum_{r_1 + \ldots + r_m = 1}^{l-1} \frac{n^{\sum_{i=1}^m i r_i - s}}{M^{\sum_{i=1}^m r_i}} \right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n}(\mathbf{E}\zeta_n)^2\right) + O\left(\left(\frac{M}{n^{(\sum_{i=1}^m i l_i - k)/l}} \right)^{2l} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = 1}^{l-1} \left(\frac{n^{(\sum_{i=1}^m i r_i - s)/r}}{M} \right)^r \right).$$

Так как F — единственный подграф в F с максимальной дополнительной степенью над F_0, заключаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^m i r_i - s \right) / r < \left(\sum_{i=1}^m i l_i - k \right) / l$$

и $M / n^{(\sum_{i=1}^m i r_i - s)/r} \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\Sigma_2 = o((\mathbf{E}\zeta_n)^2)$, отсюда $\mathbf{D}\zeta_n \asymp o((\mathbf{E}\zeta_n)^2)$ и с помощью неравенства Чебышёва получаем, что $\mathbf{P}(\zeta_n = 0) \to 0$, так как

$$\mathbf{P}(\zeta_n = 0) \leqslant \mathbf{P}\left(|\zeta_n - \mathbf{E}\zeta_n| \geqslant \frac{\mathbf{E}\zeta_n}{2} \right) \leqslant \frac{4\mathbf{E}\zeta_n}{(\mathbf{E}\zeta_n)^2}$$

и $\mathbf{E}\zeta_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Теперь формула (1) следует из формулы (2). Отсюда следует также, что при $M / n^D \to \infty$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(\zeta_n \geqslant \frac{\mathbf{E}\zeta_n}{2} \right) = 1 + o(1). \tag{3}$$

Докажем теорему для класса гиперграфов, состоящего из одного элемента. Общий случай будет следовать из этого частного случая в результате рассмотрения гиперграфа, состоящего из объединения гиперграфов, входящих в класс $\mathfrak{B}_D$.

Рассмотрим декомпозицию $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_t = F$ гиперграфа F. Не ограничивая общности, можем считать, что F_i — единственный подграф в F_i, имеющий максимальную дополнительную степень над F_{i-1}, $i = 2, 3, \ldots, t$. Пусть η_n — число F_1-графов, являющихся $\mathbf{l}$-графами на k вершинах в случайном гиперграфе. Тогда

$$\mathbf{E}\eta_n = \binom{n}{k} \frac{k!}{a} \prod_{i=1}^m \left((M_i)_{l_i} \binom{n + i - 1}{i}^{-l_i} \right),$$

где a — порядок группы автоморфизмов гиперграфа F_1, $R_i(F_1) = l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\eta_n \sim \frac{1}{a} \prod_{i=1}^m (i!c_i)^{l_i} \left(\frac{M}{n^{(\sum_{i=1}^m i l_i - k)/l}} \right)^l$$

и при $M/n^{(\sum_{i=1}^{m} il_i - k)/l} \to 0$, $n \to \infty$ с помощью неравенства Маркова убеждаемся в справедливости первой части теоремы:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}(\eta_n \geqslant 1) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\eta_n = 0$$

(если нет F_1-графов, то F-графов тем более нет).

Пусть теперь $M/n^{(\sum_{i=1}^{m} il_i - k)/l} \to \infty$ при $n \to \infty$. Разобьем множество вершин V на t непересекающихся частей $V_1, V_2, \ldots, V_t$ таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{t} V_i = V, \quad |V_j| \sim n/t, \quad j = 1, 2, \ldots, t.$$

Из (1) следует, что для $i = 2, 3, \ldots, t$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(M\hat{G}_{n,\overline{M}}\left[\bigcup_{j=1}^{i} V_j\right] \supset F_i \mid M\hat{G}_{n,\overline{M}}\left[\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j\right] \supset F_{i-1} \right) = 1.$$

Здесь $M\hat{G}_{n,\overline{M}}\left[\bigcup_{j=1}^{i} V_j\right] \supset F_i$ — событие, заключающееся в том, что на множестве вершин $\bigcup_{j=1}^{i} V_j$ случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\overline{M}}$ имеется F_i-граф. Проведя необходимые выкладки (как и при доказательстве формулы (1)), убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M\hat{G}_{n,\overline{M}}[V_1] \supset F_1) = 1.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M\hat{G}_{n,\overline{M}} \supset F_t) = 1,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Утверждение следствия 1 получено в формуле (3). Для доказательства следствий 2—5 достаточно вычислить максимальные степени приведенных в них гиперграфов и воспользоваться теоремой 1.

2.2. Доказательство теоремы 2

Доказательство первой части утверждения теоремы 2 для случайного гиперграфа $MG_{n,\overline{M}}$ проведем методом моментов в многомерном случае. Для случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\overline{M}}$ достаточно в этом доказательстве величины $\binom{n}{i}$ заменить на $\binom{n+i-1}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Вторая часть утверждения следует из первой и аддитивного свойства распределения Пуассона.

Определим r-ю факториальную степень множества $\mathcal{B}$ как множество, элементами которого являются все упорядоченные наборы по r штук элементов $\mathcal{B}$, среди которых нет совпадающих. Обозначать это множество будем $\mathcal{B}^{[r]}$. Пусть $\mathcal{B}_j$ — множество всех H_j-графов в реализациях рассматриваемого случайного гиперграфа, $j = 1, 2, \ldots, t$. Занумеруем элементы каждого из множеств $\mathcal{B}_j$ некоторым образом и обозначим их $S(\nu_i^{(j)})$, $i = 1, 2, \ldots, b_j$, где $|\mathcal{B}_j| = b_j$. Если $I(\nu_i^{(j)})$ — случайная величина, равная индикатору

события, заключающегося в том, что в случайном гиперграфе имеется H_j-граф $S(\nu_i^{(j)})$, то

$$\zeta_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{b_j} I(\nu_i^{(j)}).$$

Введем обозначение $\bar{\nu}^{(j)} = (\nu_1^{(j)}, \dots, \nu_{r_j}^{(j)})$. Справедливо равенство

$$\mathbf{E}\xi_1^{[r_1]} \dots \xi_t^{[r_t]} = \sum \mathbf{E} I(\nu_1^{(1)}) \dots I(\nu_{r_1}^{(1)}) \dots I(\nu_1^{(t)}) \dots I(\nu_{r_t}^{(t)}),$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $\bar{\nu} = (\bar{\nu}^{(1)}, \dots, \bar{\nu}^{(t)})$, для которых соответствующие им наборы подграфов принадлежат декартову произведению факториальных степеней $\mathfrak{B}_1^{[r_1]} \times \dots \times \mathfrak{B}_t^{[r_t]}$.

Разобьем эту сумму на две, Σ_1 и Σ_2. К первой из них отнесем слагаемые, соответствующие наборам индексов $\bar{\nu}$, которым соответствуют гиперграфы $S(\nu_1^{(1)}), \dots, S(\nu_{r_1}^{(1)}), \dots, S(\nu_1^{(t)}), \dots, S(\nu_{r_t}^{(t)})$, множества вершин которых не пересекаются, а ко второй — все остальные наборы. Тогда

$$\Sigma_1 = \binom{n}{r_1 k^{(1)}} \binom{n - r_1 k^{(1)}}{r_2 k^{(2)}} \dots \binom{n - r_1 k^{(1)} - \dots - r_{t-1} k^{(t-1)}}{r_t k^{(t)}} \times \prod_{j=1}^{t} \left(\frac{(r_j k^{(j)})!}{(a^{(j)})^{r_j}} \right) \prod_{i=1}^{m} \left((M_i)_{\sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}} \binom{n}{i}^{-\sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}} \right).$$

Действительно, $\binom{n}{r_1 k^{(1)}}$ — число способов выбора вершин для r_1 непересекающихся H_1-графов, $\binom{n - r_1 k^{(1)}}{r_2 k^{(2)}}$ — число способов выбора вершин для r_2 непересекающихся H_2-графов так, чтобы они не имели общих вершин с уже выбранными $r_1 k^{(1)}$ вершинами, и так далее, наконец, $\binom{n - r_1 k^{(1)} - \dots - r_{t-1} k^{(t-1)}}{r_t k^{(t)}}$ — число способов выбора вершин для r_t непересекающихся H_t-графов так, чтобы они не имели общих вершин со всеми выбранными до этого вершинами; величины

$$(r_j k^{(j)})! / ((a^{(j)})^{r_j}) = (r_j k^{(j)})! (k^{(j)}!)^{r_j} / ((k^{(j)}!)^{r_j} (a^{(j)})^{r_j}, \qquad j = 1, 2, \dots, t,$$

равны числам различных способов размещения без пересечений r_j упорядоченных H_j-графов на $r_j k^{(j)}$ вершинах; $(M_i)_{\sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}}$, $i = 1, 2, \dots, m$, — число различных вариантов выбора $\sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}$ ребер ранга i с учетом их порядка для H_j-графов, $j = 1, \dots, t$; произведение $\prod_{i=1}^{m} \binom{n}{i}^{-\sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}}$ получается как отношение величины $\prod_{i=1}^{m} \binom{n}{i}^{M_i - \sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}}$, равной числу вариантов выбора оставшихся $M_i - \sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}$ ребер ранга i, $i = 1, 2, \dots, m$, в реализациях случайного гиперграфа $MG_{n, \bar{M}}$, к величине $\prod_{i=1}^{m} \binom{n}{i}^{M_i}$, равной общему числу его реализаций.

Проводя необходимые преобразования, получаем, что

$$\Sigma_1 \sim \prod_{j=1}^{t}\left(\frac{n^{r_j k^{(j)}}}{(a^{(j)})^{r_j}}\right)\prod_{i=1}^{m}\left((i!c_i)^{\sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}} n^{-\sum_{j=1}^{t}(r_j i l_i^{(j)})} M^{\sum_{j=1}^{t} r_j l_i^{(j)}}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{t}\left(\frac{1}{(a^{(j)})^{r_j}} n^{r_j\left(k^{(j)}-\sum_{i=1}^{m} i l_i^{(j)}\right)} M^{r_j \sum_{i=1}^{m} l_i^{(j)}} \prod_{i=1}^{m}\left((i!c_i)^{l_i^{(j)}}\right)^{r_j}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{t}\left(\left(\frac{M}{n^{\left(\sum_{i=1}^{m} i l_i^{(j)}-k^{(j)}\right)/l^{(j)}}}\right)^{l^{(j)}} \frac{\prod_{i=1}^{m}(i!c_i)^{l_i^{(j)}}}{a^{(j)}}\right)^{r_j}.$$

Учитывая, что рассматриваемые гиперграфы $H_1, H_2, \ldots, H_t$ строго сбалансированы, имеют одинаковую степень

$$D = \left(\sum_{i=1}^{m} i l_i^{(j)} - k^{(j)}\right)/l^{(j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, t,$$

и $M \sim cn^D$, заключаем, что

$$\Sigma_1 \sim \lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_t^{r_t}.$$

Для завершения доказательства первой части теоремы нам достаточно убедиться в справедливости формулы $\Sigma_2 = o(1)$.

Пусть G_j и F_j — некоторые конечные допустимые в реализациях $MG_{n,\overline{M}}$ гиперграфы, F_j изоморфен одному из гиперграфов $H_1, \ldots, H_t$.

Если $0 < |V(F_j) \cap V(G_j)| < |V(F_j)|$, то в силу строгой сбалансированности F_j справедливо неравенство

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)|}{|R(F_j \cap G_j)|} < \frac{\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_j)| - |V(F_j)|}{|R(F_j)|} = D,$$

откуда

$$\left(\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)|\right)|R(F_j)|$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_j)| - |V(F_j)|\right)|R(F_j \cap G_j)| - 1,$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)| \leqslant D|R(F_j \cap G_j)| - \frac{1}{|R(F_j)|}. \tag{4}$$

Если $|V(F_j) \cap V(G_j)| = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)| = D|R(F_j \cap G_j)| = 0.$$

В случае $|V(F_j) \cap V(G_j)| = |V(F_j)|$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)| \leqslant D|R(F_j \cap G_j)|.$$

Теперь рассмотрим произвольный из r-наборов

$$(F_1, \ldots, F_r) = S(\nu_1^{(1)}), \ldots, S(\nu_{r_t}^{(t)}),$$

по которым ведется суммирование в Σ_2, $r = r_1 + \ldots + r_t$. Введем обозначения

$$G_j = \bigcup_{i=j+1}^{r} F_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, r-1.$$

При $k \geqslant 1$

$$|R_i(G_{k-1})| = |R_i(F_k \cup G_k)| = |R_i(F_k)| - |R_i(F_k \cap G_k)| + |R_i(G_k)|,$$

откуда

$$\left|R_i\left(\bigcup_{k=1}^{r} F_k\right)\right| = |R_i(G_0)| = \sum_{k=1}^{r} |R_i(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1} |R_i(F_k \cap G_k)|$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} i|R_i(G_0)| = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_k \cap G_k)|.$$

Аналогично получаем формулы

$$|R(G_0)| = \sum_{i=1}^{m} |R_i(G_0)| = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{m} |R_i(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{m} |R_i(F_k \cap G_k)|,$$

$$|V(G_0)| = \sum_{k=1}^{r} |V(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1} |V(F_k \cap G_k)|.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} i|R_i(G_0)| - |V(G_0)| = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_k)| - |V(F_k)|\right) - \sum_{k=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_k \cap G_k)| - |V(F_k \cap G_k)|\right). \quad (5)$$

Выше было показано, что для $k = 1, 2, \ldots, t$

$$\sum_{i=1}^{m} i|R_i(F_k \cap G_k)| - |V(F_k \cap G_k)| \leqslant D|R(F_k \cap G_k)|, \quad (6)$$

однако в силу определения Σ_2

$$\left|\bigcup_{i=j+1}^{r} F_i\right| = v < k = r_1 k_1 + \ldots + r_t k_t, \tag{7}$$

и существует хотя бы одно число j в множестве $\{1, 2, \ldots, r-1\}$, для которого $0 < |V(F_j) \cap V(G_j)| < |V(F_j)|$, следовательно, для F_j и G_j справедливо неравенство (4). Из соотношений (4), (5), (6) получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{m} i|R_i(G_0)| - |V(G_0)| \geqslant D\left(\sum_{k=1}^{r}|R(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1}|R(F_k \cap G_k)|\right) + \frac{1}{|R(F_j)|}.$$

Учитывая формулу

$$|R(G_0)| \leqslant \sum_{k=1}^{t} r_k |R(F_k)|$$

и полученную выше оценку для $|R(G_0)|$, получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{m} i|R_i(G_0)| - |V(G_0)|}{|R(G_0)|} &\geqslant D + \frac{1}{|R(F_j)||R(G_0)|} \\ &\geqslant D + \frac{1}{R_0 \sum_{k=1}^{t} r_k |R(F_k)|} > D,\end{aligned} \tag{8}$$

где R_0 — максимальное значение $R(F_k)$ для $k = 1, 2, \ldots, t$.

Среднее значение числа наборов $(F_1, \ldots, F_r)$ в сумме Σ_2, удовлетворяющих условиям

$$\left|V\left(\bigcup_{k=1}^{r} F_k\right)\right| = v, \quad \left|R_i\left(\bigcup_{k=1}^{r} F_k\right)\right| = R_i^{(0)}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

сверху можно оценить величиной $A(n, v, R_1^{(0)}, \ldots, R_m^{(0)})$, имеющей порядок

$$\binom{n}{v}\prod_{i=1}^{m}\left((M_i)_{R_i^{(0)}}\binom{n}{i}^{-R_i^{(0)}}\right) = O\left(\left(\frac{M}{n^{\left(\sum_{i=1}^{m} iR_i^{(0)} - v\right)}\sum_{i=1}^{m} R_i^{(0)}}\right)^{\sum_{i=1}^{m} R_i^{(0)}}\right).$$

Из (7) следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^{m} iR_i^{(0)} - v\right) \Big/ \sum_{i=1}^{m} R_i^{(0)} \geqslant D + \frac{1}{R_0 \sum_{k=1}^{t} r_k |R(F_k)|},$$

поэтому

$$\begin{aligned}A(n, v, R_1^{(0)}, \ldots, R_m^{(0)}) &= O\left(\left(Mn^{-(D+1/(R_0\sum_{k=1}^{t} r_k|R(F_k)|))}\right)^{\sum_{i=1}^{m} R_i^{(0)}}\right) \\ &= O\left(n^{-\sum_{i=1}^{m} R_i^{(0)} \Big/ (R_0 \sum_{k=1}^{t} r_k |R(F_k)|)}\right) = o(1).\end{aligned}$$

Из этой оценки, учитывая, что набор параметров $\nu, R_1^{(0)}, \ldots, R_m^{(0)}$ может принимать конечное число различных значений, убеждаемся, что $\Sigma_1 = o(1)$. Таким образом, факториальные моменты рассматриваемой векторной случайной величины сходятся к факториальным моментам многомерного распределения Пуассона с независимыми компонентами и указанными в утверждении теоремы средними значениями. Доказательство завершается применением теоремы 21 главы 1 работы [12].

Список литературы

1. Ванцян А. Г., Эволюция случайных однородных гиперграфов. В сб.: *Вероятностные задачи дискретной математики.* МИЭМ, Москва, 1987, с. 126–131.
2. Зыков А. А., Гиперграфы. *Успехи матем. наук* (1974) **29**, №6, 89–154.
3. Колчин В. Ф., *Случайные отображения.* Наука, Москва, 1984.
4. Колчин В. Ф., *Системы случайных уравнений.* МИЭМ, Москва, 1988.
5. Колчин В. Ф., *Случайные графы.* Физматлит, Москва, 2004.
6. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики.* Наука, Москва, 2004.
7. Шаповалов А. В., О связности и пороговых функциях подграфов случайных однородных гиперграфов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №3, 105–115.
8. Шаповалов А. В., О числе строго сбалансированных подграфов случайных однородных гиперграфов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 133–144.
9. Шаповалов А. В., Вероятность совместности случайных систем булевых уравнений. *Дискретная математика* (1995) **7**, №2, 146–159.
10. Barbour A. D., Poisson convergence and random graphs. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1982) **92**, 349–359.
11. Bollobás B., Threshold functions for small subgraphs. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1981) **90**, №2, 197–206.
12. Bollobás B., *Random graphs.* Academic Press, London, 1985.
13. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* (1960) **5**, 17–61.
14. Stein C., A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* 1970, v.2, 583–602.

Статья поступила 10.06.2005.