



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Заславский, О начальной стадии развития термика, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1982, том 23, выпуск 6, 65–69

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

24 марта 2025 г., 23:14:10



6. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in incompressible fluid.— *Ann. Phys.*, 1961, vol. 14, N 2.
7. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости.— *ПМТФ*, 1968, № 2.
8. Конторович В. М., Кравчик Х., Тиме В. Гамильтоново описание непотенциального движения при наличии свободной поверхности в обычной и магнитной гидродинамике. Препринт ИРЭ АН УССР № 158, Харьков, 1980.
9. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980.
10. Phillips O. M. The scattering of gravity waves by turbulence.— *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, pt 2.
11. Phillips O. M. A note on the turbulence generated by gravity waves.— *J. Geophys. Res.*, 1961, vol. 66, N 9.
12. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией.— *Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика*, 1974, т. 17, № 4.
13. Захаров В. Е., Львов В. С. О статистическом описании нелинейных волновых полей.— *Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика*, 1975, т. 18, № 10.
14. Kraichnan R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers.— *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, N 4.
15. Львов В. С. К теории развитой гидродинамической турбулентности. Препринт ИАЭ СО АН СССР № 53, Новосибирск, 1977.
16. Kuznetsov E. A., L'vov V. S. On the Kolmogorov turbulent spectrum in the direct interaction model.— *Phys. Lett.*, 1977, vol. 64 A, N 2.
17. Сазонтов А. Г. О спектрах двумерной турбулентности.— *ПМТФ*, 1981, № 2.
18. Боев А. Г. О гашении поверхностных волн сильной турбулентностью.— *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*, 1971, т. 7, № 1.
19. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости.— *ДАН СССР*, 1966, т. 170, № 6.
20. Phillips O. M. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves.— *J. Fluid Mech.*, 1958, vol. 4, pt 4.

УДК 532.517.4

## О НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ РАЗВИТИЯ ТЕРМИКА

Б. И. Заславский

(Москва)

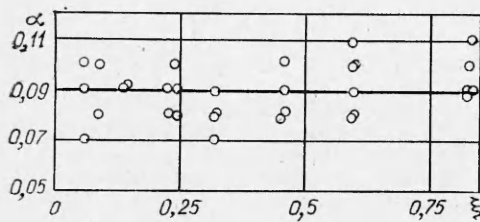
Свободный шарообразный объем, заполненный более легкой, чем внешняя, средой, как известно, трансформируется в вихревое кольцо — ядро всплывающего кольцевого вихря. Исследованию таких вихрей на различных этапах движения посвящены работы [1—6]. Наименее изучен начальный этап — сам процесс трансформации.

В данной работе обсуждается механизм трансформации, приводятся результаты экспериментов и выводятся формулы, определяющие основные параметры возникшего в результате такого процесса всплывающего кольцевого вихря-термика.

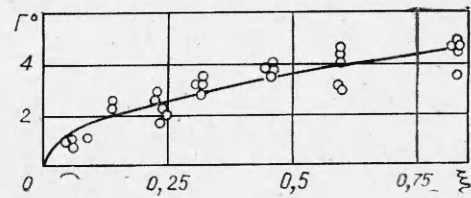
1. Пусть  $R_0$  — эффективный радиус начального объема термика  $Q_0 = 4\pi R_0^3/3$ ,  $\rho_1$  — плотность газа внутри  $Q_0$ ,  $\rho_0$  — плотность внешней среды,  $p$  — давление,  $\Gamma$  — циркуляция,  $H$  — высота подъема,  $R$ ,  $r$  — радиусы осевой окружности и сечения тороидального ядра кольцевого вихря,  $\xi = (\rho_0 - \rho_1)/\rho_0$  — относительная плотность,  $\alpha = dR/dH$  — угол раствора. Введем, следуя [1], безразмерные величины  $H^0 = H/R_0$ ,  $\Gamma^0 = \Gamma/R_0 \sqrt{R_0 g}$ .

В [2] приводится среднее значение параметра  $\alpha = 0,25$ . Опыты, на основании которых получено это значение, проводились в воде при малых  $\xi$ , причем вода с большей ( $\xi < 0$ ), чем внешняя среда, плотностью выливалась в резервуар из чашки. В этих условиях движение опускающейся массы напоминает движение вихря Хилла [2].

Проведенные опыты [5] с термиками, образующимися при разрушении пленки мыльного пузыря, заполненного более легким, чем воздух, газом, дают иную картину движения. В этих экспериментах (на фиг. 1, 2 приведены результаты, взятые из этой работы) средняя величина  $\alpha = 0,09$  при всех  $\xi > 0$ , причем, как показали опыты, если существенно не нарушается осевая симметрия движения, не только изменение  $\xi$ , но и искусственно вводимые возмущения (дополнительная начальная завихренность, разрушение пленки путем прокалывания ее сбоку или снизу) мало влияют на значения  $\alpha$ .



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Все эти факты указывают на то, что конечный результат процесса трансформации объема  $Q_0$  в тор — ядро кольцевого вихря — определяется некоторыми интегральными соотношениями и не зависит от случайных факторов.

2. Рассмотрим задачу в рамках идеальной жидкости. Пусть в момент времени  $t = 0$  шарообразный объем  $Q_0$  имеет свободные границы. Под воздействием силы Архимеда  $F = Q_0(\rho_0 - \rho_1)g$  термик начинает всплывать с ускорением [8]

$$\frac{d^2 H}{dt^2} = \frac{Q_0(\rho_0 - \rho_1)g}{(Q_0\rho_1 + 0,5Q_0\rho_0)} = \frac{2\xi g}{3 - 2\xi}.$$

В начальный момент времени распределение давления вне  $Q_0$  определяется уравнением Лагранжа

$$p|_{t=0} = p_\infty - \rho_0\varphi_t + \rho_0hg,$$

где  $h$  — разность высот между вершиной  $Q_0$  и некоторой точкой;  $\varphi$  — потенциал скорости;  $p_\infty$  — гидростатическое давление на уровне  $h = 0$ . Аналогично внутри термика  $p_1|_{t=0} = p_\infty - \rho_1\varphi_{1t} + \rho_1hg$ .

Во внешней среде, обтекающей  $Q_0$ , за потенциал скорости может быть взято известное решение для сферы [8], которое в точках, прилегающих к поверхности термика, имеет вид  $\varphi = 1,5vR_0 \cos \theta$ , где  $\theta$  — полярный угол ( $h = 2R_0 \sin^2(\theta/2)$ );  $v = v(t)$  — скорость набегающего на термик потока внешней среды. Внутри  $Q_0$  при малых  $t(t \rightarrow 0)$   $\varphi_{1t}$  — функция только времени.

При подъеме термика в области, примыкающей к его границе, возникает завихренность и, следовательно, циркуляция. Рост последней определяется теоремой Бьеркнеса [6, 7]  $d\Gamma/dt = -\oint dp/\rho$ .

Проведем интегрирование вдоль следующего контура: от верхней точки  $Q_0$  по меридиану до нижней и обратно по вертикали вдоль оси симметрии. В результате имеем

$$d\Gamma/dt|_{t=0} = -2R_0g - \varphi_t(\pi) + \varphi_t(0) + 2R_0g.$$

Подставляя в это уравнение значения  $\varphi_t$  и учитывая, что при  $t = 0$   $dv(0)/dt = d^2H/dt^2$ , получаем

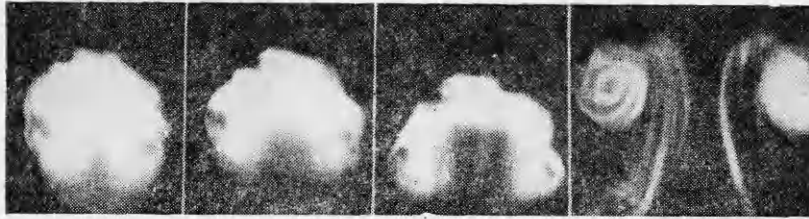
$$d\Gamma/dt|_{t=0} = 3R_0d^2H/dt^2 = 6\xi gR_0/(3 - 2\xi),$$

откуда при малых  $t$  имеем

$$(2.1) \quad \Gamma = \frac{6\xi gR_0}{3 - 2\xi} t.$$

Эта формула, как следует из вывода, определяет рост  $\Gamma$  до тех пор, пока не начнется существенная деформация границ  $Q_0$  (по-видимому, до момента «прокалывания» термика внешней средой).

Оценим время достижения наблюдаемой в опыте (см. фиг. 2) циркуляции. При  $\xi = 0,87$ ,  $R_0 = 5$  см,  $\Gamma^0 \sim 5$ , согласно (2.1),  $t = 0,08$  с. За это время, как показывают кинограммы движения термика, деформация его границ невелика. Завихренность на границе диффундирует в глубь  $Q_0$  и в процессе движения распределяется по всему объему. Однако служить причиной трансформации шарообразного объема в тор она не может.



Ф и г. 3

3. Процесс трансформации должен сопровождаться возникновением в нижней части  $Q_0$  движения внешней среды, направленного к его центру («возвратного течения»), которое может быть вызвано только соответствующим градиентом давления. На его величину движение внутри  $Q_0$  из-за относительной малости плотности ( $\rho_1 \ll \rho_0$ ) существенно не повлияет. «Обратный» градиент создается благодаря разности на одних и тех же высотах гидростатических давлений внутри и вне термика. Эта разность  $\Delta p = (\rho_0 - \rho_1)gh\xi$  при  $t = 0$  компенсируется силами инерции, а в дальнейшем в верхней половине — скоростным давлением  $\rho_0 V^2/2$  обтекающего  $Q_0$  потока. В нижней половине, где такая компенсация невозможна, поскольку величина  $\rho_0 V^2/2$ , пройдя через максимум при  $h \simeq R_0$ , в отличие от  $\Delta p$  начинает падать, компенсация осуществляется осевым «возвратным» течением внешней среды. Обозначим скорость последнего на оси термика через  $u$ . В центральной части термика  $u = u_c$  направлена по вертикали и определяется высотой  $\Delta h = R_0$ , следовательно,

$$(3.1) \quad \rho_0 u_c^2/2 \approx R_0 g \rho_0 \xi,$$

откуда следует  $u_c = \sqrt{2gR_0\xi}$ .

Сопоставим значение  $u_c$  со значением скорости  $u_h$  в центре вихря Хилла. Эта скорость связана со скоростью движения вихря  $w_h$  как целого соотношением [8]  $w_h = 2u_h/3$ .

Циркуляция вихря Хилла определяется формулой [8]  $\Gamma = 5w_h R_0$ .

Полагая  $u_h = u_c = \sqrt{2gR_0\xi}$ , получаем оценку для  $\Gamma$ :

$$\Gamma = 5(2/3)R_0 \sqrt{2gR_0\xi}$$

или

$$(3.2) \quad \Gamma^0 = 4,72 \sqrt{\xi} \sim 5 \sqrt{\xi}$$

(на фиг. 2 приведена кривая, рассчитанная по формуле (3.2)).

Заметим, что использование частного решения уравнений гидродинамики — вихря Хилла — для определения  $\Gamma$  не принципиально. Принципиальным является энергетическое соотношение (3.1) между возвратной скоростью  $u_c$  и потенциальной энергией, обеспечивающей эту скорость. Циркуляция по порядку величины может быть определена и по формуле

$$\Gamma = 2\pi u_c R_0/2 \simeq \pi R_0 \sqrt{R_0 \xi g}, \quad \Gamma^0 \simeq \pi \sqrt{2\xi} \sim 5 \sqrt{\xi}.$$

Здесь взят вписанный в шар радиусом  $R_0$  тор с параметрами  $R = R_0$ ,  $r = R_0/2$ .

В свете высказанных соображений интересно обратиться к кинограмме движения термика на начальной стадии развития. Четыре кадра такой кинограммы приведены на фиг. 3. Они получены путем фиксирования кинокамерой вертикального сечения термика, визуализированного оптическим ножом, образованным лучом аргонового лазера, разведенным выпуклым цилиндрическим зеркалом.

Первоначальный объем  $Q_0$  заполнен смесью тщательно перемешанных газов гелия и азота с небольшой добавкой кислорода. Относительный перепад плотности для данного термика  $\xi = 0,7$ ,  $R_0 \sim 5$  см.

Во время заполнения смесь слегка подкрашивалась дымом сигареты. Некоторая (небольшая) часть смеси была введена неподкрашенной.

На фиг. 3 объемы последней, попавшие в плоскость оптического ножа, видны в виде темных пятен на освещенном сечении термика. Промежутки времени между моментами экспонирования первых трех кадров 0,04 с, между третьим и четвертым — 0,3 с. Приведенные фотографии подтверждают предложенную выше модель движения, которая качественно может быть представлена следующим образом.

Некомпенсированное давление  $\Delta p$  в начальный момент времени, как отмечено, уравнивается силами инерции. Затем поверхность термика в нижней части начинает схлопываться. Условия и характер движения в этой части термика напоминают движение при сферической кумуляции [9]. Нижняя часть поверхности проталкивается внутрь  $Q_0$ . Следующие за ней частицы внешней среды формируют осевую струю. Все эти фазы развития термика видны на первых трех кадрах фиг. 3. Резкое внедрение плотной струи внутрь  $Q_0$  в некоторых случаях приводит даже к выбрасыванию из вершины термика небольшой части заполняющего его объема газа в виде короткой струйки. Одновременно на поверхности термика происходит быстрое нарастание завихренности. В связи с этим отметим зафиксированное на первых трех кадрах фиг. 3 вращение расположенного в левой части сечения темного продолговатого пятна — вращение неподкрашенного объема смеси вблизи поверхности термика.

Таким образом, генерация завихренности возникает из-за неколлинеарности в начале движения изохор и изобар (теорема Бьеркнеса) на поверхности термика, трансформация в тор происходит благодаря наличию на начальной стадии движения  $\text{grad } \Delta p$ .

Опыты показывают, что образовавшийся таким образом всплывающий кольцевой вихрь состоит из тороидального ядра, куда переходит среда из объема  $Q_0$  (фотография его сечения представлена на четвертом кадре фиг. 3), и внешнего потенциального течения.

Значение циркуляции, рассчитанное по формуле (3.2), близко к максимальной, так как  $\Delta h = R_0$  — максимальная скоростная высота. Если в начале движения на границе или внутри термика по каким-либо причинам возникла завихренность, напряженность которой превысит определенное таким образом значение  $\Gamma$ , в этом случае, по-видимому, в процессе согласования движения сред внутри и вне тороидального ядра «лишняя» завихренность полностью или частично диссипирует во внешнюю среду.

4. Соотношения, связывающие циркуляцию  $\Gamma$  с углом  $\alpha$ , могут быть приближенно определены и для сформировавшегося термика. Сформировавшийся всплывающий кольцевой вихрь обладает потенциальной  $\Pi$  и кинетической  $E_k$  энергией. Первая целиком определяется дефицитом веса  $F = Qg\xi(\rho_0 - \rho_1)$ ,  $\Pi = FH$ , где  $Q$  — объем ядра вихревого кольца, заполненный более легкой, чем внешняя, средой. На начальной стадии движения  $Q = Q_0$ .

Кинетическая энергия  $E_k$  определяется циркуляцией и геометрическими размерами ядра и описывается приближенной формулой

$$(4.1) \quad E_k = 0,5\Gamma^2 R \rho_0 [\ln(8R/r) - 2],$$

полученной [10] в предположении выполнимости закона Био — Савара и малости отношения  $r/R$  для кольцевых вихрей в идеальной жидкости. Будем предполагать, что  $\Gamma$  и  $Q = 2\pi^2 R r^2$  в процессе движения остаются постоянными, а вследствие работы силы Архимеда (уменьшения  $\Pi$ ) увеличивается  $R$  и соответственно уменьшается  $r$ . В этом случае, дифференцируя (4.1) по  $t$  при  $Q = \text{const}$  и приравнявая результат к  $d\Pi/dt$ , получаем

$$(4.2) \quad \Gamma^0 = 4 \sqrt{\frac{\pi\xi}{3\alpha [2 \ln_2(8R/r) - 1]}} \quad \text{или} \\ \alpha = \frac{16\pi\xi}{3\Gamma^2 [2 \ln(8R/r) - 1]}.$$

Подставляя (3.2) в (4.2), имеем

$$(4.3) \quad \alpha \approx \frac{16\pi}{75 [2 \ln(8R/r) - 1]}$$

Отношения  $r/R$ , полученные в результате обработки кинограмм движения термиков, лежат в пределах 0,1—0,2. При этих значениях  $r/R$  из (4.3) следует, что  $\alpha \approx 0,09—0,1$  (хорошее согласие с экспериментом (см. фиг. 1)).

В заключение автор благодарит С. А. Христиановича, А. Т. Онуфриева за постановку проблемы и ряд обсуждений, М. Д. Щербина — за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 24 III 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Онуфриев А. Т. Теория движения кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва.— ПМТФ, 1977, № 2.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
3. Тарасов В. Ф. О движении всплывающего вихревого кольца.— В сб. Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.
4. Горев В. А., Гусев П. А., Трошин Я. К. Моделирование подъема и сгорания облака легкого газа в атмосфере.— ДАН СССР, 1972, т. 205, № 4.
5. Заславский Б. И., Сотников И. М. О движении вихревых колец в однородной и стратифицированной средах.— В кн.: I Всесоюз. конф. «Метрология гидрофизических измерений» (тезисы докл.) М.: изд. ВНИИФТРИ, 1980.
6. Глаголев Ю. П., Жигайло В. А. и др. Образование кольцевого вихря при всплывании легкого газа в тяжелом.— Численные методы механики сплошной среды, 1974, т. 5, № 1.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Госизд-во технико-теоретической литературы, 1955.
8. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
10. Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М., 1978.

УДК 532.517.4

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ СТРУИ С ТРЕХМЕРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Н. М. Терехова  
(Новосибирск)

Двумерная плоская струя с профилем скорости Бикли—Шлихтинга [1]

$$U_0 = 1 - \text{th}^2 \xi$$

( $\xi = y/L$ ,  $U_0 = \bar{U}/U_{00}$  — безразмерные координата и скорость,  $L = 3,64 x^{2/3} (K/\nu^2)^{-1/3}$ ,

$$U_{00} = 0,4543 (K^2/\nu x)^{1/3} \text{ — характерные длина и скорость, } K = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}^2 dy = \text{const}$$

является в теории устойчивости интересным объектом исследования, так как она принадлежит к классу течений с точкой перегиба в профиле скорости и по теореме Рэлея невязко неустойчива.

К настоящему времени теоретически устойчивость плоской струи к бесконечно малым двумерным возмущениям исследована всесторонне как в плоскопараллельном приближении [2—5], так и с учетом непараллельности основного течения [4, 6]. Учет конечности возмущений [7] позволяет теоретически описать экспериментально наблюдаемую зону устойчивых автоколебаний в районе критического числа Рейнольдса  $R_*$ , что приводит к увеличению  $R_*$  и сближению расчетных и экспериментальных результатов. Исследований по выявлению влияния трехмерности возмущений на устойчивость плоской струи нет, хотя, как отмечается в [8, 9], ввиду того что струя очень чувствительна к внешним воздействиям, таким как акустический фон, малейшие вибрации, «сквозняк», не исключено, что в спектре возмущений могут присутствовать и трехмерные осцилляции. Появление трехмерных волн может быть также результатом разви-