XIX Международная олимпиада школьников “Туймаада”. Физика,
Kvant, 2013, Number 2, 62–64

https://www.mathnet.ru/eng/kvant1919

го переворота и равно

$$\nu_{\max} = \nu_0 \frac{p_0 S + 2mg}{p_0 S + mg} .$$

После многократного переворачивания в цилиндре будет количество воздуха

$$\nu = \nu_0 \frac{2(p_0 S + mg)}{2p_0 S + mg} .$$

4. $D = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon U_{\text{к}}}{eN_{\text{д}}}} = 0{,}32$ мкм .

5. В тепло переходит энергия, запасенная в конденсаторе:

$$Q = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C(4\mathscr{E}/7)^2}{2} = 0{,}1 \text{ Дж} .$$

XIX МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ТУЙМААДА». ФИЗИКА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

1. Из величины объема кастрюли $V = (\pi d^2/4)h = 5401$ мл следует, что всего было налито $n = V/\Delta V = 54$ порции воды, а последний 1 мл объема остался для заварки. Средняя температура налитой воды $t_{\text{ср}} = (t_1 + t_n)/2 = 27$ °С . Поскольку теплоемкость кастрюли мала по сравнению с теплоемкостью всей налитой воды, то конечная температура t должна быть близка к $t_{\text{ср}}$, однако рассчитаем ее «точно». Согласно уравнению теплового баланса,

$$Ct_0 + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t_{\text{ср}} = Q = Ct + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t,$$

откуда

$$t = \frac{Ct_0 + cn\rho\Delta V t_{\text{ср}}}{C + cn\rho\Delta V} = 26{,}85 \text{ °C} \approx 27 \text{ °C} .$$

Поскольку $0 \text{ °C} = 273{,}15$ К , то искомая температура $t = (26{,}85 + 273{,}15)$ К $= 300{,}00$ К . Тогда становится ясно, почему нашему персонажу нравится именно такая температура чая – он просто любит «круглые» числа.

2. Установление постоянного тока через амперметр означает, что вызванные его подключением процессы перезарядки конденсаторов закончились и токи через конденсаторы больше не текут. В таком случае можно упростить схему, заменив каждый конденсатор разрывом цепи (рис.16). Для удобства обозначения узлов на схеме введена система координат (x, y). Рассмотрим произвольный контур, состоящий из двух источников и двух одинаковых резисторов (одну «клеточку» на схеме). Обозначив ЭДС источников через $\mathscr{E}$, сопротивления резисторов через r и направив вправо токи i_1 и i_2 через верхний и нижний резисторы, запишем второе правило Кирхгофа:

$$\mathscr{E} - \mathscr{E} = ri_1 - ri_2 \text{ , откуда } i_1 = i_2 .$$

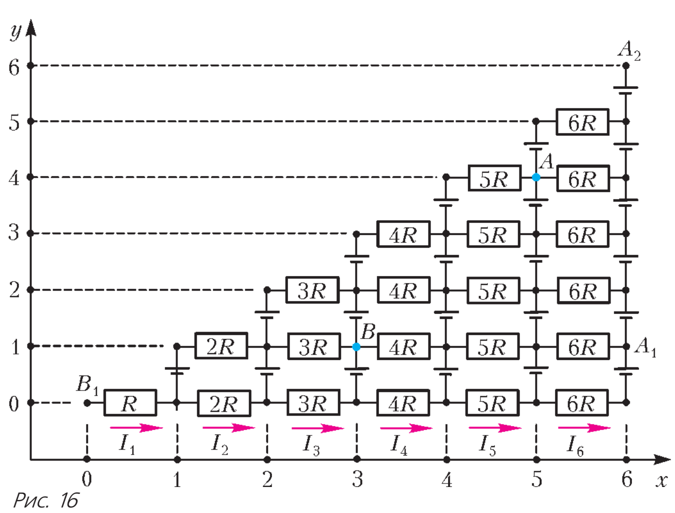

Рис. 16

Это означает, что силы токов через все одинаковые резисторы равны между собой и направлены в одну сторону, поэтому можно обозначить через I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 и I_6 силы токов через резисторы сопротивлениями R, $2R$, $3R$, $4R$, $5R$ и $6R$ соответственно. Отметим, что обнаруженное равенство сил токов наблюдается только в случае идеальных источников.

Подключим амперметр к двум произвольным узлам $C(x_1, y_1)$ и $D(x_2, y_2)$, не лежащим на одной вертикали (в противном случае амперметр окажется подключенным напрямую к идеальным источникам и сила тока через него устремится к бесконечности). Без ограничения общности можно считать, что узел C лежит левее узла D, т.е. $x_1 < x_2$, а ток $I_{\text{А}}$ через амперметр направлен от D к C. Чтобы было проще следить по рисунку за ходом рассуждений, удобно выбрать для себя какие-нибудь конкретные положения точек C и D – например, считать C совпадающей с B, а D – с A. Вертикальные прямые, проходящие через точки C и D, разделяют схему на три части: левее C, между C и D, правее D. В двух крайних частях цепи токов нет, так как токи через одинаковые резисторы текут в одну сторону, а на краях цепи заряду негде накапливаться и неоткуда взяться, поэтому далее будем рассматривать только среднюю часть цепи – между точками C и D. Сгруппируем узлы, лежащие на одной вертикали, в обобщенные узлы, тогда токи через источники станут для них внутренними, а внутренние токи не учитываются при записи первого правила Кирхгофа. В обобщенный узел с координатой x_1 втекает ток силой $I_{\text{А}}$, а вытекают $x_1 + 1$ токов силой I_{x_1+1} ; в обобщенный узел с координатой $x_1 + 1$ втекают те же $x_1 + 1$ токов силой I_{x_1+1} , а вытекают $x_1 + 2$ токов силой I_{x_1+2} ; и т.д. до обобщенного узла с координатой $x_2 - 1$, в который втекают $x_2 - 1$ токов силой I_{x_2-1} и вытекают x_2 токов силой I_{x_2} . Тогда, по первому правилу Кирхгофа,

$$I_{\text{А}} = (x_1 + 1) I_{x_1+1} = (x_1 + 2) I_{x_1+2} = \ldots = (x_2 - 1) I_{x_2-1} = x_2 I_{x_2} ,$$

откуда для любого x от $x_1 + 1$ до x_2 находим

$$I_x = \frac{I_{\text{А}}}{x} .$$

Рассмотрим следующий контур: начинаем из узла $D(x_2, y_2)$, проходим через амперметр в узел $C(x_1, y_1)$, проходим через резисторы сопротивлениями $(x_1 + 1)R$, $(x_1 + 2)R$, …, $x_2 R$ по горизонтали до узла с координатой x_2 , проходим через $|y_2 - y_1|$ источников по вертикали до узла D. Запишем для этого контура второе правило Кирхгофа:

$$(y_2 - y_1) \cdot \mathscr{E} = (x_1 + 1) R \cdot I_{x_1+1} + (x_1 + 2) R \cdot I_{x_1+2} + \ldots + x_2 R \cdot I_{x_2} ,$$

откуда после подстановки выражения для I_x получим

$$(y_2 - y_1)\mathscr{E} = (x_2 - x_1) R I_{\text{А}} .$$

Поскольку амперметр показывает абсолютную величину силы тока, то

$$I_{\text{А}} = \frac{\mathscr{E}}{R} \cdot \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| = \frac{\mathscr{E}}{R} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} ,$$

где Δx и Δy – модули разностей соответствующих координат точек подключения амперметра. Используя численные данные из условия, запишем

$$\frac{I_{\text{А2}}}{I_{\text{А1}}} = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta y_2}{\Delta x_2 \cdot \Delta y_1} = 36 .$$

Поскольку все модули разностей координат являются натуральными числами от 1 до 6, то последнее равенство может быть выполнено только при $\Delta x_1 = \Delta y_2 = 6$ и $\Delta x_2 = \Delta y_1 = 1$.

Следовательно, в первом опыте амперметр был подключен к точкам $A_1(6, 1)$ и $B_1(0, 0)$, а во втором – к точкам $A_2(6, 6)$ и $B_2(5, 0)$.
Используя данные первого или второго опыта, из выражения для $I_А$ находим

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = I_{А1} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta y_1} = I_{А2} \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta y_2} = 120 \text{ мА}.$$

Отсюда для силы тока, протекающего через амперметр, подключенный к точкам $A(5, 4)$ и $B(3, 1)$, получаем

$$I_{А3} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} = 180 \text{ мА}.$$

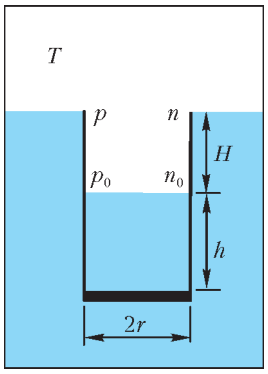

Рис. 17

3. 1) В силу закона Архимеда, разность уровней воды в сосуде и в стакане при погружении стакана будет постоянна и равна H (рис.17). Стакан утонет, когда в нем накопится вода массой $m = \rho\pi r^2 h$.
2) Когда жидкость находится в термодинамическом равновесии со своим паром, поток молекул, вылетающих из жидкости, равен потоку молекул пара, «прилипающих» к поверхности жидкости:

$\Phi = \alpha \cdot \frac{1}{4} n v$, где n – концентрация, v – средняя скорость молекул пара. После подстановки $n = \frac{p}{kT}$ и $v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ получаем

$$\Phi = \frac{\alpha p}{k}\sqrt{\frac{R}{2\pi M T}}.$$

Здесь приведена точная формула для Φ, однако следует считать правильными ответы с немного отличающимися числовыми коэффициентами, которые могут возникнуть, например, из-за подстановки в качестве v среднеквадратичной скорости $v_{ск} = \sqrt{3RT/M}$ или из-за использования «школьной» формулы для потока, содержащей коэффициент $1/6$ вместо $1/4$.
3) Поскольку по условию сосуд большой по сравнению со стаканом, то насыщенным пар будет именно на уровне поверхности воды в сосуде. Пусть p_0 и n_0 – соответственно давление и концентрация пара на уровне поверхности воды в стакане, тогда из уравнения Менделеева–Клапейрона находим среднюю плотность пара в погруженной части стакана:

$$\rho_п = \frac{1}{2}\left(\frac{Mp}{RT} + \frac{Mp_0}{RT}\right) \approx \frac{Mp}{RT}.$$

Здесь $p_0 \approx p$, так как в данном случае учет разницы давлений проявился бы в дальнейшем лишь как поправка второго порядка малости. Добавочное гидростатическое давление столба пара в стакане равно

$$\Delta p = p_0 - p = \rho_п g H = \frac{MpgH}{RT},$$

а искомая разность концентраций составляет

$$\Delta n = n_0 - n = \frac{p_0}{kT} - \frac{p}{kT} = \frac{\Delta p}{kT} = \frac{MpgH}{kRT^2}.$$

4) Стакан становится все более тяжелым из-за постепенного накапливания в нем воды, возникшей в результате конденсации пара. При этом пар будет конденсироваться на внутренней поверхности погруженной части стакана, так как в этой области давление пара будет превышать давление насыщенного пара при данной температуре на величину гидростатического давления столба пара.

Приведем расчет в предположении, что внутренние стенки стакана до уровня поверхности воды в сосуде влажные, т.е. покрыты тонким слоем воды, однако можно считать верными решения участников с использованием модели сухих стенок.
Общее количество молекул, вылетающих с полной поверхности воды площадью S за время t, равно

$$Z_1 = \Phi S t = \frac{\alpha}{4} n v \left(\pi r^2 + 2\pi r H\right) t.$$

Количество молекул, «прилипающих» к воде за то же время, определяется концентрацией пара на соответствующем уровне и равно

$$Z_2 = \frac{\alpha}{4} n_0 v \pi r^2 t + \frac{\alpha}{4} n_{ср} v \cdot 2\pi r H t,$$

где $n_{ср} = (n + n_0)/2 = n + \Delta n/2$ – средняя концентрация пара в погруженной части стакана.
Стакан утонет, когда общая масса накопившихся в нем молекул воды станет равна m:

$$(Z_2 - Z_1)\frac{M}{N_А} = m,$$

где $M/N_А$ – масса одной молекулы. Подставив сюда соответствующие выражения для Z_2, Z_1 и m, получим искомое время:

$$t = \frac{\sqrt{2\pi}\rho}{\alpha p g}\left(\frac{RT}{M}\right)^{3/2} \frac{r}{r + H}\frac{h}{H}.$$

Аналогично второму пункту, оценочные ответы, отличающиеся только числовыми коэффициентами, следует считать правильными.
4. Малое сопротивление цепи позволяет считать, что все процессы перезарядки конденсатора происходят очень быстро, так что смещением верхней пластины за это время можно пренебречь.
1) Емкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d$. Заряд верхней пластины $q = CU_1 = \varepsilon_0 S U_1/d$. Напряженность однородного электрического поля между обкладками конденсатора $E = U_1/d$, причем каждая из пластин обеспечивает половину этой величины. Значит, искомая сила равна

$$F_1 = q\frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d^2}.$$

В следующих пунктах будем считать, что пружина изначально не растянута и сила тяжести на верхнюю пластину не действует. Это упрощение не повлияет на результаты, так как силу упругости пружины можно представить в виде суммы ее начального значения и ее изменения, а поскольку согласно условию равновесия начальная сила упругости равна силе тяжести, то они взаимно уничтожатся во всех уравнениях, в том числе и при расчете работы.
2) Поскольку напряжение U увеличивают медленно, то расстояние x между пластинами уменьшается тоже медленно и можно считать, что электрическая сила в каждый момент времени уравновешивается силой упругости:

$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2} = k(d - x).$$

Это уравнение является кубическим относительно x, поэтому для его анализа применим графический метод. Графиком правой части уравнения является прямая, а левой – семейство квадратичных гипербол, зависящих от параметра U. На рисунке 18 показаны прямая и три характерные гиперболы для значений U, равных V_1, V_2, V_3 и удовлетворяющих условию $V_1 < V_2 < V_3$.
При $U = V_1$ уравнение имеет два корня – графики пересекаются при x_1 и x_2, причем x_1 соответствует устойчивому по-

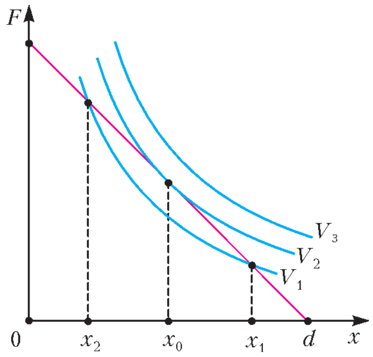

Рис. 18

ложению равновесия, а x_2 – неустойчивому (это определяется по направлению результирующей силы, возникающей при небольшом отклонении от положения равновесия). Отсюда следует, что при плавном уменьшении x от значения d система окажется сначала в состоянии x_1 и уже не попадет в состояние x_2.

По мере увеличения U от V_1 до V_2 точки x_1 и x_2 приближаются друг к другу и сходятся в точке x_0, соответствующей случаю касания гиперболы и прямой. Положение равновесия x_0 является устойчивым при увеличении x и неустойчивым при уменьшении x, поэтому при $U = V_2$ подвижная пластина конденсатора начнет двигаться ускоренно, и через некоторое время пластины схлопнутся. Таким образом, искомое $U_2 = V_2$. Отметим, что при $U = V_3$ положений равновесия уже нет, так что пластины начнут двигаться ускоренно и схлопнутся при любом x.

Для упрощения преобразований перепишем условие равновесия в виде

$$\frac{a}{2x^2} = d - x, \text{ где } a = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{k}.$$

В точке касания графиков функций должны быть равны не только значения функций, но и значения их производных:

$$\frac{a_0}{2x_0^2} = d - x_0, \quad -\frac{a_0}{x_0^2} = -x_0, \text{ где } a_0 = \frac{\varepsilon_0 S U_2^2}{k}.$$

Отсюда находим

$$x_0 = \frac{2}{3}d = \sqrt[3]{a_0}, \text{ и } U_2 = \sqrt{\frac{8kd^3}{27\varepsilon_0 S}}.$$

3) После размыкания цепи заряд на конденсаторе будет сохраняться, а потому напряженность поля и электрическая сила, действующая на подвижную пластину, изменяться не будут. Пользуясь результатом первого пункта, находим

$$F_3 = \frac{\varepsilon_0 S U_3^2}{2d^2} = \text{const}.$$

При минимальном значении U_3 пластина будет сначала ускоряться, а затем замедляться из-за постепенного растяжения пружины, так что пластины схлопнутся с пренебрежимо малой скоростью. Из закона сохранения энергии $F_3 d = kd^2/2$ получаем

$$U_3 = \sqrt{\frac{kd^3}{\varepsilon_0 S}}.$$

Отметим, что в данном случае потребовалось большее напряжение, чем во втором пункте, что вполне логично, так как в предыдущем случае по мере сближения пластин их заряд, напряженность поля и сила взаимодействия существенно возрастали за счет действия источника.

4) В этом пункте мы, наоборот, ожидаем получить меньшее напряжение, чем во втором случае, так как пластина может преодолеть участок между положениями равновесия x_1 и x_2 за счет кинетической энергии, накопленной при разгоне на участке от d до x_1.

Аналогично первому пункту, находим электрическую силу, действующую на подвижную пластину, находящуюся на расстоянии x от неподвижной:

$$F_4 = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2}.$$

Работа этой силы на участке от d до x равна

$$A = \int_d^x \left(-\frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2}\right)dx = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d}\right).$$

С помощью закона сохранения энергии выразим кинетическую энергию:

$$W = A - \frac{k(d-x)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2 (d-x)}{2xd} - \frac{k((d-x)^2}{2}.$$

Пластина не остановится, если в каждой точке $x \in (0; d)$ будет выполнено условие $W \ge 0$, откуда после упрощения получаем неравенство

$$x^2 - dx + \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} \ge 0.$$

Графиком левой части этого неравенства является парабола с вершиной $x_4 = d/2$, лежащей в рассматриваемом промежутке, поэтому для нахождения минимального U_4 достаточно наложить на дискриминант условие

$$D = d^2 - \frac{4\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} = 0,$$

откуда получим

$$U_4 = \sqrt{\frac{kd^3}{4\varepsilon_0 S}}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Л.В.Калиничева, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь www.Pareto-print.ru