А. И. Виноградов, Обобщение формулы Клостермана, *Докл. АН СССР*, 1962, том 146, номер 4, 754–756

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 146, № 4

МАТЕМАТИКА

А. И. ВИНОГРАДОВ

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ КЛОСТЕРМАНА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 IV 1962)

В 1926 г. Клостерман дополнил круговой метод Харди — Литтльвуда своими соображениями из теории тэта-рядов и доказал разрешимость уравнения

$$n = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2, \tag{1}$$

где n — целое число; a_1, a_2, a_3, a_4 — целые фиксированные числа и $\left(n, \prod\limits_1^4 a_i\right) = 1$.

Ю. В. Линник в ([1]) дал условное решение обобщенного уравнения Клостермана:

$$n = N(\mathfrak{a}) + N(\mathfrak{b}), \tag{2}$$

где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — целые идеалы заданных классов некоторых алгебраических числовых полей K и K_1, причем одно из этих полей, скажем K_1, должно быть квадратичным, другое K произвольной степени n.

Условность доказательства Ю. В. Линника заключалась в том, что он существенно использовал недоказанную теорему Зигеля об особом нуле для L-рядов вида:

$$L_K(s, \chi_1\chi_2) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi_1 N(\mathfrak{a}))\chi_2(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \tag{3}$$

где χ_1 — реальный характер группы норменных вычетов по $\operatorname{mod} q$ (q — целое рациональное число), χ_2 — реальный характер группы характеров, построенной на группе классов идеалов поля K. Кроме того в асимптотической формуле для числа решений уравнения (2), данной Ю. В. Линником в ([1]):

$$Q(n) = \sigma(n, d, d_2)\, n + O\left(\frac{n}{\ln n} \ln\ln n\right), \tag{4}$$

априори не было ясно, является ли особый ряд $\sigma(n, d, d_2)$ отличным от нуля или нет (d и d_2 — дискриминанты полей K и K_1 соответственно).

В этой заметке мы кратко наметим доказательства теоремы Зигеля для L-рядов (3) и теоремы о числе решений уравнения

$$n = N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) + \varphi(x, y), \tag{5}$$

где $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ — простые идеалы поля K и, кроме того, их произведение принадлежит заданному классу C,

$$\varphi(x, y) = ax^2 + by^2, \quad (n, ab) = 1, \quad (a, b) = 1.$$

Теорема 1. *Если L-ряд (3) имеет реальные нули, то максимальный реальный нуль удовлетворяет неравенству*

$$1 - \gamma > \frac{c(\varepsilon)}{|d^2q^n|^{\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$ — *произвольная абсолютная константа*; $c(\varepsilon) > 0$ — *абсолютная константа, зависящая только от* ε.

Доказательство осуществляется по следующей схеме: рассмотрим два произведения

$$\zeta_K(s) L_K(s, \chi_1\chi_2) = \zeta_{K^*}(s),$$
$$\zeta_K(s) L_K(s, \chi_1) = \zeta_{K_1^*}(s). \tag{6}$$

Эти два равенства соответствуют двум квадратичным расширениям поля K:

$$K \begin{smallmatrix} \nearrow K^* \\ \searrow K_1^* \end{smallmatrix},$$

причем из теории полей классов следует, что дискриминанты полей K^* и K_1^* одинаковы. Но дискриминант поля K_1^* не превосходит по абсолютной величине числа $|d^2q^n|$.

Следовательно, на основании первого равенства (6), аналогично тому как это сделано в работе [2], мы получаем теорему Зигеля для L-рядов (3).

Теорема 2. *Если мы обозначим через* $P(n)$ *число решений уравнения* (5) *при условии, что*

$$\tfrac{1}{2} n^\theta \leqslant N(\mathfrak{p}_1) \leqslant n^\theta, \quad \tfrac{1}{2} n^{1-\theta} \leqslant N(\mathfrak{p}_2) \leqslant n^{1-\theta}, \quad 0 < \theta \leqslant 0{,}01,$$

то

$$P(n) = \frac{c_0}{H\sqrt{ab}} \frac{n}{\ln^2 n} \sigma_1(n, d, a, b) + O\left(\frac{n}{\ln^3 n} \ln\ln n\right),$$

где $\sigma_1(n, d, a, b)$ — *абсолютно сходящийся ряд*;

$$\sigma_1(n, d, a, b) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\omega(q, n, a, b)}{q_1\varphi(q_1)} \frac{(-1)^{\left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2}\left(\frac{ab}{\delta}\right)}{\delta\varphi_K(\delta)} \sum_{(l,\delta)=1} \tau(l, \delta) e^{-2\pi i \frac{l}{\delta} n}, \tag{7}$$
$$q = q_1\delta, \quad (q_1, d) = 1;$$

$\omega(q, n, a, b)$ — *некоторая, довольно громоздкая мультипликативная функция;* δ *пробегает все числа, простые делители которых делят* d — *дискриминант* K; $\varphi_K(\delta)$ — *степень группы норменных вычетов по* δ;

$$\tau(l, \delta) = \sum_{(l_{K,\delta})} e^{2\pi i \frac{l_{K,\delta}}{\delta} l}; \tag{8}$$

$(l_{K,\delta})$ *означает, что* $l_{k,\delta}$ *пробегает полную систему норменных вычетов поля* K *по* $\operatorname{mod} \delta$.

Доказательство этой теоремы проводится по схеме дисперсионного метода, подробно изложенной в [1], с привлечением теоремы 1 Зигеля об особом нуле, приведенной здесь, теоремы Пейджа о редком расположении нулей Зигеля и теоремы Фогелса о границе всех нулей для L-рядов Гекке.

Из точной формулы (6) для $\sigma_1(n, d, a, b)$, ясно видно, почему априори нельзя сказать, обращается ли в нуль особый ряд обобщенной формулы Клостермана или нет. Все дело в сумме (8). Для произвольного поля K нет возможности вычислить эту сумму, так как неизвестен закон распределения $l_{K,\delta}$ в группе всех вычетов по $\operatorname{mod} \delta$. Известна только оценка снизу для

$$\varphi_K(\delta) \geqslant \frac{\varphi(\delta)}{n^{\omega(\delta)}},$$

где $\omega(\delta)$ — число простых множителей δ; n — степень поля. В случае уравнения (2) сумма (8) также входит в особый ряд формулы (4) Ю. В. Линника. Этим и объясняется невозможность априорного утверждения о том, что можно решить уравнения (2) и (5) для всех достаточно больших n при любом поле K. Поэтому и для уравнения (5) можно только утверждать, что при заданном поле K с дискриминантом d и группой норменных вычетов $(l_{K,\delta})$ мы можем в конечное число действий установить, обращается особый ряд решения уравнения в нуль или нет.

Можно заметить, что есть исключения из этого правила. Если дискриминант поля K — простое число или его степень, то исследование особого ряда можно провести до конца и показать, что он превосходит величину $\frac{c_0'}{\ln\ln n}$, где c_0' — абсолютная положительная постоянная, зависящая только от степени поля K и дискриминанта d.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
11 IV 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, 1961.
[2] А. И. Виноградов, ДАН, 146, № 2 (1962).