



Общероссийский математический портал

А. К. Алексеев, О расчете переноса погрешности параметров течения с помощью сопряженных уравнений,

*Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2007, том 10, номер 4, 325–334

<https://www.mathnet.ru/sjvm89>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

18 мая 2025 г., 19:54:49



# О расчете переноса погрешности параметров течения с помощью сопряженных уравнений

А.К. Алексеев

УДК 533: 519.6

**Алексеев А.К.** О расчете переноса погрешности параметров течения с помощью сопряженных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 4. — С. 325–334.

Расчет погрешности параметров течения в зависимости от ошибки исходных данных (начальных, граничных условий, коэффициентов) может быть выполнен с использованием сопряженных уравнений. Этот подход для оценки точности в некоторой контрольной точке предельно экономичен с вычислительной точки зрения, так как кроме решения уравнений, описывающих течение, требует рассчитать только одну сопряженную систему уравнений. Полученные в результате поля “сопряженной температуры”, “сопряженной плотности” и т. д. позволяют рассчитать влияние погрешности всех исходных данных на точность результата в контрольной точке. Рассматриваемый подход применим к расчету погрешности или вариации функционала под действием малой случайной ошибки или вариации исходных данных на удалении от стационарной точки функционала. В окрестности стационарной точки погрешность также может быть рассчитана с помощью сопряженных уравнений, но при существенно больших затратах компьютерных ресурсов.

**Ключевые слова:** *сопряженные уравнения, перенос погрешности.*

**Alekseev A.K.** On the error transfer calculation via adjoint equations. // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2007. — Vol. 10, № 4. — P. 325–334.

The calculation of a flow parameter uncertainty depending on the error in input data: initial conditions, boundary conditions, coefficients may be conducted using adjoint equations. For the pointwise error estimation, this approach is advantageous from the computational standpoint since it needs solving only one (adjoint) system of equations in addition to the system that simulates a flowfield. The fields of “adjoint temperature”, “adjoint density”, etc. enable the calculation of an impact of any input data error on the uncertainty of a reference pointwise parameter. The considered approach can be applied to the estimation of a functional variation under the action of a small random error or a variation of input data away from a stationary point. In the vicinity of such a stationary point, the error can also be computed using adjoint equations but with much higher computational costs.

**Key words:** *adjoint equations, error transfer.*

---

## 1. Введение

Погрешность параметров течения по известной ошибке исходных данных (начальных, граничных условий, коэффициентов) можно определить, используя методы Монте-Карло или уравнения чувствительности. Однако они отличаются высокими требованиями к быстродействию и памяти, поэтому на практике такие расчеты встречаются достаточно редко. В данной работе для расчета переноса погрешности данных использованы сопряженные уравнения [1]. В соответствии с работами [2, 3] рассмотрен расчет вариации целевого функционала по известной (статистически независимой, нормально распределенной) погрешности исходных данных.

Этот подход для расчета погрешности в некоторой контрольной точке предельно экономичен с вычислительной точки зрения, так как кроме решения уравнений, описывающих течение, требует решить еще только одну (сопряженную) систему уравнений, по затратам ресурсов близкую к основной системе. Полученные в результате расчета поля “сопряженной температуры”, “сопряженной плотности” и т. д. зависят от поля течения и выбора оцениваемого параметра и не зависят от того, какие именно данные содержат ошибку. Поэтому они достаточно универсальны и позволяют рассчитать влияние погрешности всех параметров уравнения. Следует отметить, что здесь мы анализируем перенос погрешности исходных данных по полю течения и не рассматриваем погрешность численной аппроксимации, соответствующий анализ можно найти в [4]. Погрешность исходных данных считается достаточно малой, чтобы была применима линеаризация в окрестности невозмущенного (“точного”) течения.

## 2. Расчет переноса погрешностей исходных данных в поле течения

Рассмотрим схему оценки переноса погрешности для двумерного сверхзвукового вязкого течения, рис. 1.

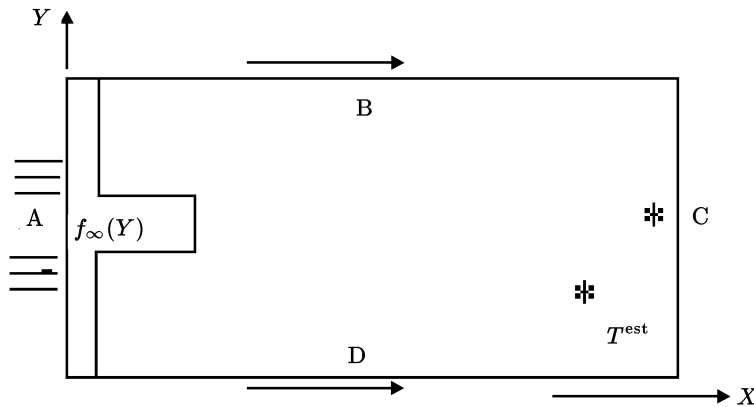


Рис. 1. Схема течения. А — входная граница, С — зона измерения

Для расчета поля течения использовалась недивергентная конечно-разностная аппроксимация параболизированных уравнений Навье–Стокса [5]. Расчет проводился маршевым методом вдоль координаты  $X$ :

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial Y} = 0, \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{\text{Re} \rho} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{4}{3 \text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}, \quad (3)$$

$$U \frac{\partial e}{\partial X} + V \frac{\partial e}{\partial Y} + (\kappa - 1)e \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\kappa}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 e}{\partial Y^2} + \frac{4}{3 \text{Re}} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right), \quad (4)$$

$$P = \rho R T; \quad e = C_v T = R / (\kappa - 1) T; \quad (X, Y) \in \Omega = (0 < X < X_{\max}; 0 < Y < 1),$$

здесь  $Re$  — число Рейнольдса,  $Pr$  — число Прандтля. На входной границе ( $A$  ( $X = 0$ ), рис. 1):

$$e(0, Y) = e_\infty(Y); \quad \rho(0, Y) = \rho_\infty(Y); \quad U(0, Y) = U_\infty(Y); \quad V(0, Y) = V_\infty(Y) \quad (5)$$

на боковых границах  $B$ ,  $D$  ( $Y = 0, Y = 1$ ) выполнены условия  $\partial f / \partial Y = 0$ .

Считаем, что параметры в начальном сечении и число  $Re$  содержат погрешность. Пусть дискретные представления этих параметров содержат независимую, нормально распределенную ошибку ( $\sigma_\rho, \sigma_U, \sigma_V, \sigma_e, \sigma_{1/Re}$ ).

Нам надо рассчитать поле течения и оценить точность расчета некоторого параметра (пусть это будет температура) в некоторой контрольной точке  $T(t_{est}, x_{est})$ , а именно зависимость стандартной ошибки температуры от ошибки исходных данных  $\sigma_T = f(\sigma_\rho, \sigma_U, \sigma_V, \sigma_e, \sigma_{1/Re})$ .

Обозначим  $T(X^{est}, Y^{est})$  как  $\varepsilon(f_\infty(Y), Re)$ . Если оцениваемый параметр расположен на границе вытекания, мы можем записать его в виде функционала

$$\varepsilon(f_\infty(Y)) = \int_T (X_{max}, Y) \delta(Y - Y^{est}) dY. \quad (6)$$

Если  $T(X^{est}, Y^{est})$  расположен внутри поля, запишем его как

$$\varepsilon(f_\infty(Y)) = \int_\Omega T(X, Y) \delta(Y - Y^{est}) \delta(X - X^{est}) dX dY. \quad (7)$$

В случае нормально распределенной статистически независимой ошибки дисперсия ошибки исходных данных трансформируется в дисперсию результата значениями градиента [2, 3], в рассматриваемом случае

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{NY} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T_\infty^i} \sigma_{T_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{NY} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_\infty^i} \sigma_{\rho_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{NY} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial U_\infty^i} \sigma_{U_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{NY} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_\infty^i} \sigma_{V_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial (1/Re)} \sigma_{(1/Re)} \right)^2. \quad (8)$$

Известно, что самый эффективный метод расчета градиента основан на использовании сопряженных уравнений [1]. В нашем случае их можно получить стандартным образом (подробности есть, напр., в [5]), объединяя в единый лагранжиан оцениваемый функционал (напр., в форме (6)) и слабую постановку задачи (1–4). Поле сопряженных параметров позволяет рассчитывать градиент оцениваемого параметра в виде:

$$\begin{aligned} \partial \varepsilon / \partial e_\infty(Y) &= \Psi_e U + (\kappa - 1) \Psi_U, & \partial \varepsilon / \partial \rho_\infty(Y) &= \Psi_\rho U + (\kappa - 1) \Psi_U e / \rho, \\ \partial \varepsilon / \partial U_\infty(Y) &= \Psi_U U + \rho \Psi_\rho + (\kappa - 1) \Psi_e e, & \partial \varepsilon / \partial V_\infty(Y) &= \Psi_V U, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla \varepsilon_{Re} = - \int_\Omega \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \Psi_U + \frac{4}{3\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \Psi_V + \frac{\kappa}{\rho Pr} \frac{\partial^2 e}{\partial Y^2} \Psi_e + \frac{4}{3\rho} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \Psi_e \right) dX dY.$$

Этот градиент позволяет рассчитать перенос случайной погрешности исходных данных или просто вариацию целевого функционала под действием малой вариации исходных данных. Сопряженные параметры получаются из решения сопряженной задачи, близкой по форме и затратам ресурсов к задаче расчета поля течения.

### 3. Сопряженная задача

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial X} + V \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial Y} + (\kappa - 1) \frac{\partial(\Psi_V e / \rho)}{\partial Y} + (\kappa - 1) \frac{\partial(\Psi_U e / \rho)}{\partial X} - \frac{\kappa - 1}{\rho} \left( \frac{\partial e}{\partial Y} \Psi_V + \frac{\partial e}{\partial X} \Psi_U \right) + \\
\left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{1}{\rho^2 \text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \Psi_U + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{4}{3 \text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \Psi_V - \\
\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\kappa}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 e}{\partial Y^2} + \frac{4}{3 \text{Re}} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right) \Psi_e = 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial \Psi_U}{\partial X} + \frac{\partial(\Psi_U V)}{\partial Y} + \rho \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial X} - \left( \frac{\partial V}{\partial X} \Psi_V + \frac{\partial e}{\partial X} \Psi_e \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{P}{\rho} \Psi_e \right) + \\
\frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{1}{\rho \text{Re}} \Psi_U \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{8}{3 \text{Re}} \frac{\partial U}{\partial Y} \Psi_e \right) = 0, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(U \Psi_V)}{\partial X} + V \frac{\partial \Psi_V}{\partial Y} - \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \Psi_U + \frac{\partial e}{\partial Y} \Psi_e \right) + \rho \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{P}{\rho} \Psi_e \right) + \frac{4}{3 \text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\Psi_V}{\rho} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(U \Psi_e)}{\partial X} + \frac{\partial(V \Psi_e)}{\partial Y} - \frac{\kappa - 1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial Y} \Psi_V + \frac{\partial \rho}{\partial X} \Psi_U \right) - (\kappa - 1) \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \Psi_e + \\
(\kappa - 1) \frac{\partial \Psi_V}{\partial Y} + (\kappa - 1) \frac{\partial \Psi_U}{\partial X} + \frac{\kappa}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\Psi_e}{\rho} \right) - \delta(X - X^{\text{est}}) \delta(Y - Y^{\text{est}}) = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Источник в уравнении для  $\Psi_e$  соответствует расположению оцениваемой точки в поле течения.

Начальные условия С ( $X = X_{\text{max}}$ ):

$$\Psi_{\rho, U, V}|_{X=X_{\text{max}}} = 0; \quad U \Psi_e + (\kappa - 1) \Psi_U + \delta(Y - Y^{\text{est}}) = 0. \quad (14)$$

Выражение для  $\Psi_e$  в (14) соответствует расположению оцениваемой точки на границе  $X_{\text{max}}$ .

Граничные условия на  $B, D$  ( $Y = 0; Y = 1$ ):

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial Y} = 0. \quad (15)$$

От сопряженных уравнений, обычно используемых в обратных задачах механики жидкости и газа, постановка (10–15) отличается формой целевого функционала и, соответственно, видом источникового члена в (13). Сопряженная задача решается в обратном направлении по  $X$ . Ее формулировка определяется прямой задачей, положением точки измерения и выбором оцениваемого параметра. Форма сопряженной задачи не зависит от выбора параметров уравнения, содержащих ошибки. Поэтому одно и то же поле сопряженных величин можно использовать для расчета распространения ошибки разных параметров (граничных, начальных условий, коэффициентов, источников). Расчет градиента требует последовательного решения прямой и сопряженной задач. Время, затрачиваемое на расчет погрешности одного параметра в одной точке, таким образом, примерно соответствует двум временам расчета поля течения. Оценка погрешности каждого дополнительного параметра (расчетной точки) требует решения еще одного сопряженного уравнения.

## 4. Результаты тестовых расчетов

Для расчета поля течения использовалась недивергентная конечно-разностная аппроксимация параболизированных уравнений Навье–Стокса [5]. Та же самая схема использована для аппроксимации сопряженных уравнений. Таким образом, в данной работе сопряжение осуществлено на уровне уравнений в частных производных. Точности этого подхода вполне достаточно для расчета переноса ошибки данных, которая здесь достаточно велика по сравнению с погрешностью, вызываемой рассогласованием. Погрешность, вызванная отсутствием точной согласованности, оценивалась в модельных задачах, в которых минимизировался целевой функционал

$$\varepsilon(f_\infty(Y)) = \int_{\Omega} (T(X, Y) - T_{\text{цель}})^2 \delta(Y - Y^{\text{est}}) \delta(X - X^{\text{est}}) dx dy.$$

При этом величину этого функционала удавалось понизить на 5 или 6 порядков по величине (существенно ниже вариации, вызываемой погрешностью, перенос которой рассмотрен в данной статье). Следует отметить, что при этом величина функционала оставалась значительно выше уровня машинной точности, который мог бы быть достигнут при наличии согласования на уровне разностной схемы.

Для проверки алгоритма проведена серия расчетов, в которой распространение ошибки рассчитывалось с помощью сопряженных уравнений. Для сравнения использован метод Монте-Карло, в котором к исходным данным добавлялась случайная нормально распределенная ошибка.

Оценки стандартной ошибки безразмерной температуры на выходе в средней точке ( $N = 50$ ) для погрешности со стандартной ошибкой 0.01–0.1, полученные с помощью сопряженных параметров и метода Монте-Карло (усреднения по 100 расчетам), приведены в табл. 1 для однородного поля течения.

**Таблица 1.** Однородный поток, центр ( $N_{\text{est}}=50$ )

$\sigma_{f_\infty}$	Расчет с помощью градиента $\sigma_T$	усреднение по 100 расчетам $\sigma_T$
0.01	0.0024	0.002613
0.05	0.012	0.0144
0.1	0.024	0.03

**Таблица 2.** Нерасчетная струя, центр ( $N_{\text{est}} = 50$ )

$\sigma_{f_\infty}$	Расчет с помощью градиента $\sigma_T$	усреднение по 100 расчетам $\sigma_T$
0.01	0.0029	0.0029
0.05	0.0145	0.0152
0.1	0.029	0.03

**Таблица 3.** Нерасчетная струя, бок ( $N_{\text{est}} = 20$ )

$\sigma_{f_\infty}$	Расчет с помощью градиента $\sigma_T$	усреднение по 100 расчетам $\sigma_T$
0.01	0.00284	0.00304
0.05	0.0142	0.0148
0.1	0.0284	0.034

Поле “сопряженной плотности”, соответствующей оценке точности в вышеуказанной точке, представлено на рис. 2, а поле “сопряженной температуры” — на рис. 3.

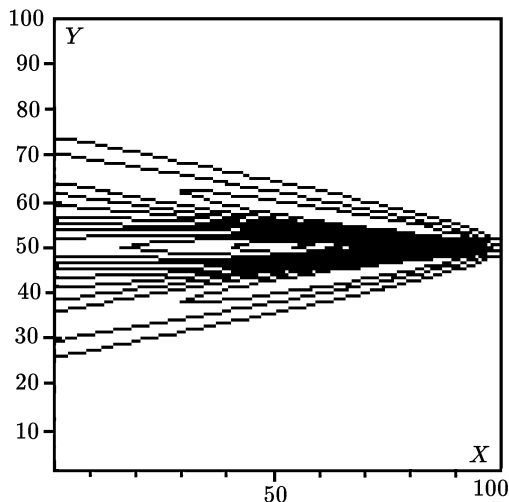


Рис. 2. Поле “сопряженной плотности” для равномерного потока

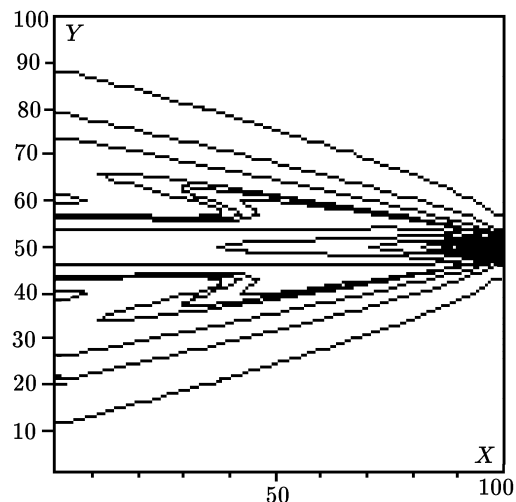


Рис. 3. Поле “сопряженной температуры” для равномерного потока

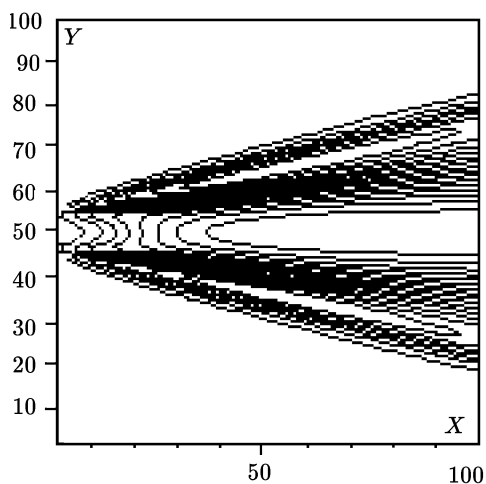


Рис. 4. Поле плотности для нерасчетной струи

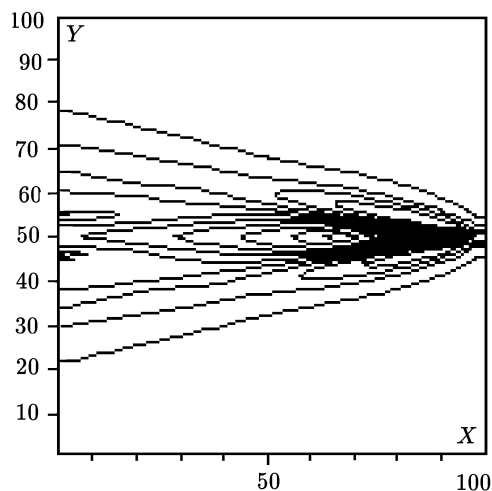


Рис. 5. Поле “сопряженной температуры” для нерасчетной струи, измерение в центре

Газодинамические параметры и их градиенты существенно входят в уравнения сопряженной задачи. Поэтому следующие тесты проведены для неоднородного течения, а именно для нерасчетной струи с соотношением температур в центре  $T_j/T = 3$  (изолинии плотности приведены на рис. 4). Совпадения результатов сопряженного подхода и Монте-Карло примерно те же. Оценки ошибки безразмерной температуры для погрешности со стандартной ошибкой 0.01–0.1, полученные с помощью сопряженных параметров и метода Монте-Карло (усреднения по 100 расчетам), приведены в табл. 2, 3 для двух положений оцениваемой точки (в центре  $N_{\text{est}} = 50$  и на периферии  $N_{\text{est}} = 20$ ). Сравнивая рис. 5 и рис. 6, легко заметить, что зоны, из которых переносится основная часть ошибки, существенно зависят от положения оцениваемой точки ( $N_{\text{est}} = 50$  и  $N_{\text{est}} = 20$ ).

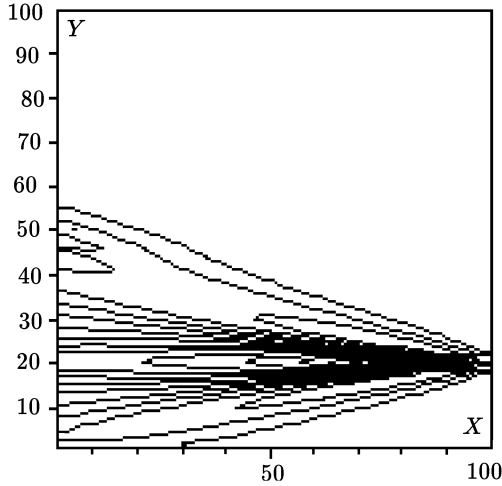


Рис. 6. Поле “сопряженной температуры” для нерасчетной струи, измерение на границе на периферии

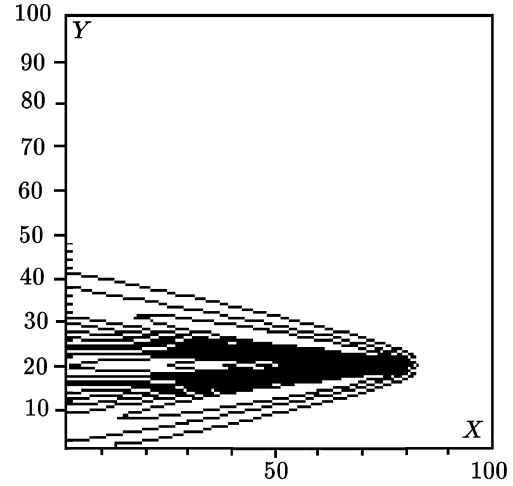


Рис. 7. Поле “сопряженной температуры” для нерасчетной струи, измерение в поле течения на периферии

Рисунки 2, 3, 5, 6 соответствуют оценке чувствительности в граничной точке (форма уравнения (14), рис. 7 соответствуют оценке чувствительности во внутренней точке (форма уравнения (13)). В целом, в диапазоне устойчивого решения оба подхода (Монте-Карло и сопряженные уравнения) дают согласованные результаты.

Расчет погрешности одного параметра ( $T$ ) в одной точке потребовал расчета прямого и сопряженного полей, для определения в данной точке любого другого параметра, например плотности, понадобится расчет еще одного сопряженного поля, имеющего источник уже не в “сопряженной температуре”, а в “сопряженной плотности”.

Расчет погрешности целевого функционала с использование его градиента может быть неприменимым в окрестности оптимального решения, где градиент близок к нулю. В таком случае для оценки погрешности целесообразно использовать оценки второго порядка точности [3]. Они содержат оценку сдвига целевого функционала

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon(\bar{f}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4Ny} \frac{\partial^2 \varepsilon(\bar{f})}{\partial f_{i,\infty}^2} \sigma_{f_{i,\infty}}^2 \quad (16)$$

и оценку дисперсии

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial^2 \varepsilon(\bar{f})}{\partial f_{i,\infty} \partial f_{j,\infty}} \sigma_{f_{i,\infty}} \sigma_{f_{j,\infty}} \right)^2. \quad (17)$$

Для проведения этих оценок необходимо знание гессиана  $H_{ij} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial f_{i,\infty} \partial f_{j,\infty}}$ . Для точечной оценки погрешности (6, 7) необходимости в таком анализе нет, однако при другом выборе целевого функционала (таком, как, например, при решении обратных задач, задач оптимального проектирования) близость к нулю градиента функционала является вполне вероятным случаем. Рассмотрим в качестве примера влияние погрешности параметров на входе  $f_{\infty}(Y)$  на функционал

$$\varepsilon(f_{\infty}) = \int (f(X_{\max}) - f^{\text{exp}})^2 dY \quad (18)$$

в окрестности точки оптимума.



Гессиан будем рассчитывать с помощью прямого численного дифференцирования градиента, полученного из сопряженной задачи первого порядка ( $a$  — параметр дифференцирования)

$$H\delta f = (\nabla\varepsilon(f + a\delta f) - \nabla\varepsilon(f))/a. \quad (19)$$

Этот подход достаточно трудоемок и требует решения  $2N$  задач типа прямой.

При численных экспериментах считаем, что дисперсия ошибки данных постоянна и равна  $\sigma_{f_\infty}$ . Сдвиг целевого функционала определяется выражением  $\bar{\varepsilon}(f_\infty) - \varepsilon(\bar{f}_\infty) = \frac{1}{2}H_{ii}\sigma_{f_\infty}^2$ . Оценки сдвига  $\varepsilon$  для нормально распределенной погрешности исходных данных с помощью следа гессиана и усреднения по 100 расчетам приведены в табл. 4.

**Таблица 4.** Оценка сдвига

$\sigma_{f_\infty}$	Расчет с помощью гессиана $\bar{\varepsilon}(f_\infty) - \varepsilon(\bar{f}_\infty)$	усреднение по 100 расчетам $\bar{\varepsilon}(f_\infty) - \varepsilon(\bar{f}_\infty)$
0.010	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$
0.001	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$

Дисперсия целевого функционала определяется выражением

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial^2 \varepsilon(\bar{f})}{\partial f_{i,\infty} \partial f_{j,\infty}} \right)^2 \sigma_{f_\infty}^4.$$

Оценки дисперсии для нормально распределенной погрешности исходных данных с помощью следа гессиана и усреднения по 100 расчетам приведены в табл. 5.

**Таблица 5.** Оценка дисперсии

$\sigma_{f_\infty}$	$\sigma_\varepsilon^2$ (расчет с помощью гессиана)	$\sigma_\varepsilon^2$ (усреднение по 100 расчетам)
0.010	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$
0.001	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-9}$

Таким образом, оценка погрешности целевого функционала в окрестности стационарного решения, проведенная с помощью расчета гессиана, достаточно близка к оценкам, получаемым с помощью метода Монте-Карло.

## 5. Обсуждение

Рассмотрим вычислительную эффективность различных подходов к расчету погрешности. Дисперсию параметров течения во всем расчетном поле можно рассчитывать, используя уравнения чувствительности. Этот метод подразумевает решение системы более высокого порядка (на размерность пространства параметров, содержащих погрешность) по сравнению с задачей (1–5). В нашем случае расчет чувствительности соответствует проведению  $4N_y$  расчетов прямой задачи. Если мы захотим определить полное поле погрешности с помощью сопряженных уравнений, нам потребуется  $N_x N_y + 1$  расчетов. Таким образом, если нам требуется распределение ошибки во всем расчетном поле, уравнения чувствительности обеспечат более экономичный расчет. Однако при сравнении методов расчета коэффициентов чувствительности и рассматриваемого здесь метода следует учесть, что расчет сопряженных уравнений идеально подходит для использования параллельных компьютеров кластерного типа. При расчете погрешности  $N$  параметров

нам нужно решить  $N$  идентичных независимых задач по расчету сопряженных уравнений (10–15), отличающихся только положением источника. Распараллеливание системы уравнений чувствительности гораздо более сложная задача, связанная с потерями эффективности при росте числа процессоров.

Методы Монте-Карло достаточно дорогостоящи с точки зрения времени счета и дают только асимптотически точные результаты. Это связано с тем, что погрешность результата расчета методом Монте-Карло в зависимости от числа испытаний  $M$  падает как  $C/M^{0.5}$ , где константа зависит от числа параметров, содержащих ошибку, и от коэффициентов чувствительности. Однако методы Монте-Карло дают верные результаты для любой (не только малой) величины погрешности и могут быть реализованы гораздо проще с точки зрения алгоритма, так как не нуждаются в решении вспомогательных задач.

В целом, если нас интересует погрешность параметров течения в некоторой точке (или малом наборе таких точек), сопряженные уравнения наиболее эффективны с точки зрения времени счета и объема хранимых результатов.

Рассматриваемый подход применим к расчету погрешности произвольного функционала (вдали от стационарной точки) под действием случайной ошибки исходных данных. Это относится и к расчету вариации функционала под действием детерминированной малой вариации исходных данных. Изменения коснутся формы функционала (6, 7) и соответствующих ему членов в сопряженных уравнениях или их граничных условиях. Вблизи от стационарной точки погрешность функционала может быть рассчитана с помощью тех же самых сопряженных уравнений, но при существенном увеличении времени счета, что связано с необходимостью расчета гессиана.

## 6. Заключение

Погрешность одного из параметров течения в некоторой точке по данным о погрешности исходных данных может быть рассчитана с помощью решения сопряженной системы уравнений при суммарных затратах времени счета, соответствующих двум расчетам поля течения.

Если нам потребуется оценить погрешность  $n$  параметров в данной точке, необходим расчет  $n + 1$  полей (одно поле течения и  $n$  сопряженных полей). Затраты времени счета также линейно возрастают при увеличении числа точек, в которых нужно оценить погрешность.

Расчет погрешности или вариации произвольного функционала (или набора функционалов) под действием случайной ошибки, или детерминированной малой вариации исходных данных осуществляется аналогично. Расчет погрешности функционала в окрестности стационарной точки под действием малой случайной ошибки исходных данных требует решения  $2N + 1$  задач, близких к прямой, где  $N$  — число параметров, содержащих погрешность.

## Список литературы

- [1] **Марчук Г.И.** Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. — М.: Наука, 1992.
- [2] **Пененко В.В.** Методы численного моделирования атмосферных процессов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

- [3] **Putko M.M., Newmann P.A., Taylor III A.C., and Green L.L.** Approach for Uncertainty Propagation and Robust Design in CFD Using Sensitivity Derivatives // AIAA paper. — 2001. — № 2528. — P. 1–14.
- [4] **Алексеев А.К.** Апостериорная оценка погрешности конечно-разностного решения с помощью сопряженных уравнений и дифференциального представления // ЖВМ. — 2005. — Т. 45, № 7. — С. 1213–1225.
- [5] **Алексеев А.К.** К определению пространственного распределения параметров на входной границе сверхзвукового потока по измерениям в поле течения // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 12. — С. 33–44.

ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия"  
имени С.П. Королева",  
ул. Ленина, д. 4а,  
г. Королев, Московская обл.,  
141070  
E-mail: aleksey.alekseev@relcom.ru

*Статья поступила  
27 июля 2004 г.  
Переработанный вариант  
16 октября 2006 г.*