

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. M. Simkin, Periodic modes in systems with nonlinear pulse elements, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, Volume 131, Number 6, 1323–1326

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

March 28, 2025, 12:47:52



М. М. СИМКИН

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ
ИМПУЛЬСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 16 X 1959)

1. В импульсной системе ⁽¹⁾ с нелинейным импульсным элементом (НИЭ, см. рис. 1) на вход линейной части ЛЧ поступает последовательность модулированных по амплитуде, ширине либо положению импульсов, $z(\bar{t})$, связанных нелинейной зависимостью с дискретными значениями входного сигнала импульсного элемента $u(\bar{t}) = u[n]$. Задача определения периодических режимов в такой системе сводится к рассмотрению неавтономной системы: импульсный элемент размыкает периодически контур системы, в результате частота колебаний в ней оказывается жестко связанной с частотой повторения импульсного элемента. Эта задача решена для нескольких частных случаев ⁽²⁾. В частотном подходе к ее решению получены результаты: 1) в системе с линейной частью, обладающей свойствами низкочастотного фильтра, и 2) с импульсными элементами: а) амплитудным релейным с зоной нечувствительности ⁽³⁾, б) без зоны нечувствительности ⁽⁴⁾ и в) с широтным импульсным элементом ⁽⁵⁾. Определены по первой гармонике периодические движения, частоты которых ω_1 связаны с частотой повторения импульсного элемента $\omega_0 = 2\pi/T_0$ условием

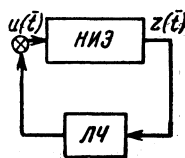


Рис. 1. Система с нелинейным импульсным элементом

$$N = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} \gg 2, \text{ целое.} \quad (1)$$

Ниже изложен частотный подход для приближенного определения периодических движений вида (1) в системе с произвольным амплитудным, широтным либо временным импульсным элементом.

2. Пусть в системе рис. 1 с линейной частью, обладающей свойствами низкочастотного фильтра, установился периодический режим, который на входе импульсного элемента может быть аппроксимирован первой гармоникой частоты $\bar{\omega}_1 = 2\pi/N$, $N \gg 2$, целое (предполагается, что постоянная составляющая в периодическом движении отсутствует; $\bar{t} = t/T_0$ — относительное время):

$$u(\bar{t}) = C \cos\left(\frac{2\pi}{N} \bar{t} + \phi\right), \quad -\frac{\pi}{N} \leq \phi \leq \frac{\pi}{N},$$

или в комплексной форме

$$U = Ce^{i\phi}. \quad (2)$$

При этом на выходе импульсного элемента будет периодическая последовательность импульсов, $z(\bar{t})$, частота которой совпадает с частотой сигнала (2).

Уравнение периодического режима по первой гармонике, согласно методу гармонического баланса (6), можно записать в виде

$$\left[1 + W\left(j \frac{2\pi}{N}\right) J^*\right] U = 0;$$

здесь $W(j\bar{\omega})$ — частотная характеристика ЛЧ; $J^* = Z_1/U$ — эквивалентный комплексный коэффициент усиления НИЭ; Z_1 — комплексная амплитуда первой гармоники на выходе НИЭ. Откуда находим приближенное условие существования периодического режима

$$W\left(j \frac{2\pi}{N}\right) = -\frac{1}{J^*}. \quad (3)$$

3. Комплексная амплитуда первой гармоники реакции импульсного элемента на сигнал (2) может быть представлена суммой вида

$$Z_1 = \sum_{s=0}^{N-1} A_s. \quad (4)$$

Запишем периодическую последовательность δ -функций с периодом T_0 в виде

$$\delta_{T_0}(\bar{t}) = \sum_{s=0}^{N-1} \delta_{NT_0}(\bar{t} - s);$$

здесь

$$\delta_{NT_0}(\bar{t} - s) = \frac{1}{NT_0} \left[1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \cos l \frac{2\pi}{N} (\bar{t} - s)\right]. \quad (5)$$

Первая гармоника (5) имеет вид

$$a_1(s) = \frac{2}{NT_0} e^{-j \frac{2\pi}{N} s},$$

откуда для (4) имеем

$$Z_1 = \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_s K_n \Phi_{\gamma_s} \left(j \frac{2\pi}{N}\right) a_1(s + \beta_s).$$

Здесь $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s = F_{\alpha, \beta, \gamma}(u[s])$ — относительные амплитуда (с учетом знака), смещение и ширина s -го импульса; $x_n = F_x(u[n])$ — модуляционная характеристика импульсного элемента; $K_n = \text{const} > 0$ — номинальная амплитуда импульса; $\Phi_{\gamma_s}(j\bar{\omega})$ — комплексный спектр s -го импульса.

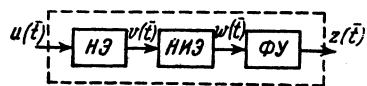


Рис. 2. Амплитудный нелинейный импульсный элемент

Комплексная амплитуда первой гармоники на выходе амплитудного импульсного элемента может быть также записана в виде ряда

$$Z_1 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_{1+lN}, \quad l = \lambda \left[1 + N - 2E\left(\frac{N}{2}\right)\right], \quad (6)$$

где $B_{1+lN} = \frac{1}{T_0} K_n \Phi_{\gamma} \left(j \frac{2\pi}{N}\right) B'_{1+lN}$; B'_{1+lN} — комплексная амплитуда $(1 + lN)$ -й гармоники реакции на сигнал (2) обычного нелинейного элемента, однотипного по характеристике нелинейности рассматриваемому амплитудно-импульсному элементу.

Представим нелинейный амплитудно-импульсный элемент (рис. 2) в виде последовательного соединения обычного нелинейного элемента НЭ, идеального импульсного элемента ИИЭ и формирующего устройства ФУ

с частотной характеристикой $K_n \Phi_\gamma(j\bar{\omega})$. Идеальный импульсный элемент формирует последовательность мгновенных импульсов, площади которых пропорциональны дискретным значениям входного сигнала $v(\bar{t}) = v[n]$.

Реакция нелинейного элемента на сигнал (2) имеет вид

$$v(\bar{t}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B'_{2k-1} e^{j(2k-1) \frac{2\pi}{N} \bar{t}}.$$

Последовательность мгновенных импульсов на выходе идеального импульсного элемента

$$w(\bar{t}) = \frac{1}{2T_0} \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} B'_{2k-1} e^{j(2k-1+lN) \frac{2\pi}{N} \bar{t}},$$

откуда комплексная амплитуда первой гармоники

$$W_1 = \frac{1}{T_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} B'_{1+lN}, \quad l = \lambda \left[1 + N - 2E\left(\frac{N}{2}\right) \right],$$

и, окончательно, для (6)

$$Z_1 = K_n \Phi_\gamma \left(j \frac{2\pi}{N} \right) W_1.$$

Из (6) видно, что комплексная амплитуда первой гармоники на выходе нелинейного амплитудно-импульсного элемента с точностью до постоянного для данного элемента множителя представляет сумму комплексных амплитуд первой гармоники и бесконечного множества высокочастотных составляющих реакции обычного нелинейного элемента на (2).

Существенно, что реакция нелинейного импульсного элемента на синусоидальный сигнал, в отличие от реакции на тот же сигнал обычного нелинейного элемента, зависит не только от амплитуды, но также от частоты и фазы входного сигнала и, кроме того, от формы импульса, частоты повторения и скважности импульсного элемента.

4. Отношения (4) и (6) к (2) определяют эквивалентный комплексный коэффициент усиления НИЭ. Так, из (4)

$$J^*(C, N, \phi, F, \Phi_\gamma, T_0) = \frac{1}{C} \sum_{s=0}^{N-1} A_s e^{-j\psi}. \quad (7)$$

Для каждого значения частоты $\bar{\omega}_1 = 2\pi/N, N = 2, 3, \dots$, образ правой части уравнения (3) представляет множество значений модуля и фазы частотной характеристики, при которых существует периодическое решение данной частоты. В общем случае — это некоторая область в плоскости амплитудно-фазовой характеристики. В пространстве с координатами: модуль, фаза, частота правая часть (3) представляет совокупность областей, отвечающих различным значениям частоты $\bar{\omega}_1 = 2\pi/N, N = 2, 3, \dots$. Графическое решение (3) состоит в отыскании точек встречи частотной характеристики, изображенной в координатах: модуль, фаза, частота, и указанных областей. Наиболее просто задача решается рассмотрением соответствующих проекций на координатные плоскости. При этом в качестве расчетных используются обычные амплитудно-фазовая, амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

5. Определение периодических режимов в системах с амплитудной (и временной) модуляцией удобно проводить, относя формирующее устройство

импульсного элемента к линейной части. Расчетная частотная характеристика при этом принимает вид

$$W_{\Phi}(j\bar{\omega}) = K_{\Phi} \Phi_{\gamma}(j\bar{\omega}) W(j\bar{\omega}),$$

а из выражений (4), (6), (7) исключается множитель $K_{\Phi} \Phi_{\gamma} \left(j \frac{2\pi}{N} \right)$.

6. Аппроксимация периодического сигнала на выходе линейной части первой гармоникой и применение метода гармонического баланса обоснованы лишь при условии, что линейная часть удовлетворяет гипотезе фильтра (7). Это условие может выполняться в импульсных воспроизводящих системах, так как линейная часть последних в силу необходимости удовлетворяет требованию

$$\omega_{\text{ср}} \leq \frac{\omega_0}{2}; \quad (8)$$

здесь $\omega_{\text{ср}}$ — частота среза линейной части. Условие (8) представляет следствие известной импульсной теоремы Котельникова (8).

При выполнении (8) импульсная система близка к непрерывной (1), однако квантование во времени вносит своеобразие в характер протекающих в системе явлений. Описанный выше подход, в пределах ограничений, свойственных приближенным методам, позволяет учесть влияние квантования во времени на характер периодических режимов в системах, удовлетворяющих условию (8).

7. Результаты работы показывают, что задача приближенного определения периодических режимов в системах с нелинейными импульсными элементами решается единообразным путем для различных видов импульсной модуляции и различных видов нелинейностей в импульсных элементах.

Автор выражает благодарность Я. З. Цыпкину за интерес к работе и замечания, сделанные при ее обсуждении и подготовке к печати.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
16 X 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. З. Цыпкин, Теория импульсных систем, М., 1958. ² R. E. Kalman, Proc. Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, 6, 273 (1956). ³ C. K. Chow, AJEE Trans., 71, pt 2, 51 (1954). ⁴ В. П. Казаков, Автоматика и телемеханика, 18, 1, 34 (1957). ⁵ И. В. Пышкин, Конфер. по теории и применению дискретных автоматических систем, Тез. докл., М., 1958. ⁶ Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, 8, 5, 349 (1947). ⁷ М. А. Айзерман, И. М. Смирнова, Сборн. памяти А. А. Андронина, Изд. АН СССР, 1955, стр. 77. ⁸ А. А. Харкевич, Очерки общей теории связи, М., 1954.