Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Фрейдзон, О представимости алгорифмически разрешимых предикатов машинами Рабина, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1967, том 4, 209–218

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

8 февраля 2025 г., 17:02:20

Р.И.Фрейдзон

О ПРЕДСТАВИМОСТИ АЛГОРИФМИЧЕСКИ РАЗРЕШИМЫХ ПРЕДИКАТОВ МАШИНАМИ РАБИНА*)

Машинами Рабина будем называть многоленточные машины Тьюринга с входом, описанные в [1]**). В настоящей заметке доказывается, что какова бы ни была функция замедления, можно построить алгорифмически разрешимый предикат π такой, что для любого натурального k предикат π не представим никакой k-ленточной машиной Рабина с этим замедлением. Кроме того, описывается некоторый класс предикатов, представимых в реальном времени машинами Рабина.

1. В дальнейшем предполагается, что фиксирован некоторый алфавит A. Под "словами" будем понимать "слова в алфавите A", а под "алгорифмами" - "машины Тьюринга в алфавите A". Если $\mathfrak{A}$ - алгорифм и P - слово, то выражение $!\,\mathfrak{A}(P)$ читается: "алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P". Термин "множество" применяется ниже в том смысле, в каком он используется в конструктивной математике.

---

*) Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 17 ноября 1966 г.

**) Будем рассматривать и 0-ленточные машины Рабина, представляющие собой, по определению, конечные автоматы.

Опишем процесс переработки слова P k-ленточной машиной Рабина R. В начальный момент все ленты машины R пусты и машина находится в начальном состоянии q_0. На вход машины последовательно, буква за буквой, поступает слово P. Получив очередную входную букву, машина анализирует свое состояние и слово, обозреваемое глазками на лентах машины. Затем машина переходит в новое состояние, печатает в каждой из обозреваемых клеток определенную букву и на каждой из лент сдвигает глазок влево, вправо или оставляет неподвижным. После прихода последней буквы слова P, на вход машины начинает последовательно поступать символ $*$, не принадлежащий алфавиту A. Процесс переработки слова P машиной R заканчивается, если машина приходит в состояние $q_{стоп}$.

<u>Определение 1.</u> Будем говорить, что машина Рабина R р а с п о з н а е т слово P с замедлением ℓ, если процесс переработки слова P заканчивается не более чем за ℓ шагов.

Пусть f - всюду применимый алгорифм, перерабатывающий слова в натуральные числа. Множество слов M назовем п р е д с т а в и м ы м машиной R с замедлением f, если M состоит из тех и только тех слов P, которые распознаются машиной R с замедлением $f(P)$.

<u>Определение 2.</u> Будем говорить, что одноленточная машина Тьюринга T распознает слово P, если в начальный момент машина находится в исходном состоянии, слово P выписано на ленте, все остальные клетки ленты пусты, и глазок обозревает

первую букву слова P ; после остановки машины все клетки ленты пусты.

Множество слов M назовем представимым одноленточной машиной Тьюринга T , если оно состоит из всех тех и только тех слов P , которые распознаются машиной T .

Очевидно, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть k-ленточная машина Рабина R представляет множество слов M с замедлением f . Тогда можно построить одноленточную машину Тьюринга T , представляющую множество M , и алгорифм g , перерабатывающий слова в натуральные числа (причем g строится только по f), такой что длина рабочей зоны процесса распознавания слова P машиной T не превосходит $2K\cdot f(P)+g(P)$.

Г.С.Цейтиным введены следующие определения.

1. Пусть α - алгорифм, перерабатывающий пары вида $\mathfrak{A}, P$ (где $\mathfrak{A}$ - алгорифм рассматриваемого стандартного типа, P - слово) в натуральные числа. Будем говорить, что α определяет сложность работы алгорифмов, если, каков бы ни был алгорифм $\mathfrak{A}$ и слово P , во-первых, $!\alpha(\mathfrak{A},P)\equiv\,!\mathfrak{A}(P)$ и, во-вторых, для любого натурального n разрешимо равенство $\alpha(\mathfrak{A},P)=n$.

2. Пусть α - алгорифм, определяющий сложность работы алгорифмов, π - алгорифмически разрешимый предикат и φ -

всюду применимый алгорифм, перерабатывающий слова в натуральные числа. Будем говорить, что сложность предиката π оценивается алгорифмом φ, если можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$, вычисляющий значения π, такой что, каково бы ни было слово P,

$$!\,\alpha(\mathfrak{A}, P) \supset \alpha(\mathfrak{A}, P) \leqslant \varphi(P).$$

Г.С.Цейтиным доказана следующая теорема*): какова бы ни была последовательность всюду применимых алгорифмов $\{\varphi_n\}$, перерабатывающих слова в натуральные числа, можно построить алгорифмически разрешимый предикат π, сложность которого не оценивается ни одним из алгорифмов φ_n.

Используя этот результат Г.С.Цейтина, можно получить следующую теорему.

<u>Теорема 1</u>. Каково бы ни было замедление f, можно построить алгорифмически разрешимый предикат π, такой что для любого натурального k предикат π не представим никакой k-ленточной машиной Рабина с замедлением f.

---

*)Этот результат был доложен Г.С.Цейтиным на заседании Ленинградского семинара по конструктивной математике 9 июня 1966 г. (печатается с разрешения автора). Вариант этой теоремы, в котором в качестве $\alpha(\mathfrak{A}, P)$ берется число шагов применения нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ к слову P, был получен Г.С. Цейтиным еще в 1954 г.

Доказательство. В качестве алгорифма α, оценивающего сложность работы одноленточной машины Тьюринга, выбираем длину рабочей зоны процесса переработки слова. Построим алгорифм, удовлетворяющий условиям леммы 1. Рассмотрим последовательность всюду применимых алгорифмов $\{\varphi_n\}$, где φ_n таков, что для любого P $\varphi_n(P)=2n\cdot f(P)+g(P)$. В силу теоремы Г.С.Цейтина, можно построить предикат π, сложность вычисления которого одноленточной машиной Тьюринга не оценивается ни одним из φ_n. Покажем, что каково бы ни было натуральное число k, этот предикат не представим никакой k-ленточной машиной Рабина с замедлением f. Действительно, предположим, что π представим некоторой k-ленточной машиной Рабина с замедлением f. Тогда, в силу леммы 1, получим, что существует одноленточная машина Тьюринга T, представляющая предикат π, причем сложность работы машины T оценивается алгорифмом φ_n. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

Таким образом, показано, что класс множеств, представимых машинами Рабина с данным замедлением, у́же класса всех разрешимых множеств.

II. Через $\partial\lambda(P)$ будем обозначать длину слова P. Будем говорить, что множество слов M представимо машиной Рабина в р е а л ь н о м в р е м е н и, если оно представимо с замедлением f, таким что для любого слова P $f(P)=\partial\lambda(P)$.

Сформулируем некоторое достаточное условие представимости множеств машинами Рабина в реальном времени.

Определение 3. Каноническое исчисление Поста в алфавите A (см. [2]) назовем исчислением типа $\mathfrak{R}$, если

1. i -ое правило исчисления имеет вид

$$\frac{\begin{matrix} \mathfrak{X}_1 \\ \mathfrak{X}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{X}_{z_i} \end{matrix}}{Q_i \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \cdots \mathfrak{X}_{z_i}}$$

где Q_i - некоторое слово в алфавите A, а $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_{z_i}$ - схемные переменные ($i = 1, \ldots, m$; m - число правил рассматриваемого исчисления);

2. $\mathfrak{A} \cap Q = \phi$ и ни один из элементов множества $\mathfrak{A} \cup Q$ не является собственным началом другого (здесь $\mathfrak{A}$ - множество аксиом исчисления и $Q = \{ Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \}$).

Способ порождения слов в этом исчислении обобщает способ построения формул в бесскобочной форме записи, введенной Лукасевичем (см. [3]). В дальнейшем будем считать фиксированным некоторое исчисление $\mathfrak{P}$ типа $\mathfrak{R}$.

Слово P назовем п р а в и л ь н ы м, если его можно представить в виде соединения некоторых слов из множества $\mathfrak{A} \cup Q$. Очевидно, в силу пункта 2 определения 3, осуществимость такого представления влечет его единственность.

Каждому правильному слову P поставим в соответствие целое число $\lambda(P)$ (и з б ы т о ч н о с т ь слова P) по следующему правилу:

1. если $P \in \mathfrak{A}$, то $\lambda(P) = -1$, если $P \doteq Q_i$, то $\lambda(P) = z_i - 1$;

2. если P_1 и P_2 - правильные слова, то $\lambda(P_1 P_2) = \lambda(P_1) + \lambda(P_2)$.

Будем говорить, что слово P удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$, если оно правильное, $\lambda(P) = -1$ и любое собственное начало P' слова P удовлетворяет условию $\lambda(P') > -1$.

Будем говорить, что правильное слово P продуцируемо i-ым правилом исчисления $\mathfrak{P}$, если можно построить слова $W_1, W_2, \ldots, W_{r_i}$, удовлетворяющие условию $\mathfrak{T}$, такие, что $P \eqcirc Q_i W_1 W_2 \ldots W_{r_i}$.

Лемма 2. Пусть слово P удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$. Тогда или $P \in \mathfrak{A}$, или найдется такое i, что P продуцируемо i-ым правилом исчисления $\mathfrak{P}$.

Доказательство. Пусть слово P удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$. Тогда P - правильное, и найдутся такие слова $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$ $(\ell \geqslant 1)$ из множества $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{Q}$, что $P \eqcirc P_1 P_2 \cdots P_\ell$. Если $\ell = 1$, то $P \in \mathfrak{A}$. Пусть $\ell > 1$. Тогда, поскольку P удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$, найдется такое i, что $P_1 \eqcirc Q_i$. Докажем, что слово P продуцируемо i-ым правилом исчисления $\mathfrak{P}$.

Найдем в слове $P_2 P_3 \ldots P_\ell$ кратчайшее правильное собственное начало, избыточность которого равна —1. Очевидно, такое начало всегда можно найти, и оно удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$. Обозначим его посредством W_1. Тогда найдется слово S, такое что $P_2 P_3 \cdots P_\ell \eqcirc W_1 S$. Кратчайшее собственное начало S , избыточность которого равна -1, обозначим через W_2. Оно также удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$. Продолжая процесс аналогичным образом, найдем представление слова в виде $Q_i W_1 W_2 \cdots W_k$; причем, поскольку $\lambda(Q_i) = z_i - 1$, то $k = z_i$.

Лемма 3. Слово P выводимо в исчислении $\mathfrak{P}$ типа $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$.

Доказательство. Пусть слово P выводимо в исчислении $\mathfrak{P}$ типа $\mathfrak{R}$. Индукцией по длине вывода слова P легко показать, что P удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$.

Пусть теперь слово P удовлетворяет условию $\mathfrak{T}$. Если $P \in \mathfrak{A}$, то утверждение леммы очевидно. В противоположном случае, в силу леммы 2, найдется такое число i и слова W_1 , $W_2, \ldots, W_{z_i}$, удовлетворяющие условию $\mathfrak{T}$, что $P \equiv Q_i W_1 W_2 \cdots W_z$. Таким образом, выводимость P легко доказывается индукцией по длине слова.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{P}$ - исчисление типа $\mathfrak{R}$. Тогда можно построить машину Рабина R с числом лент, равным $\max\limits_{1 \le i \le m} \{\lambda(Q_i)\}$, представляющую в реальном времени множество всех слов P , удовлетворяющих условию $\mathfrak{T}$.

Идея доказательства леммы, в основном, сводится к следующему. Поскольку слово P удовлетворяет условию $\mathcal{T}$, то P представимо в виде $P_1 P_2 \ldots P_\ell$, где $P_i \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{Q}$ $(i=1,\ldots,\ell)$. Конструкция машины R, представляющей в реальном времени множество всех слов, удовлетворяющих условию $\mathcal{T}$, такова, что каждое слово из множества $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{Q}$ представляется некоторым состоянием машины R; при поступлении на вход машины слова P_i из множества $\mathfrak{A}$, глазок на первой непустой ленте сдвигается влево, если же $P_i \equiv Q_j$, то глазки на первых $\tau_i - 1$ лентах сдвигаются вправо. Процесс распознавания слова P заканчивается, когда все глазки вернулись в первоначальное положение, и пришел сигнал сдвига одного из глазков влево.

Из лемм 3 и 4 непосредственно вытекает

<u>Теорема 4.</u> Каково бы ни было исчисление $\mathfrak{P}$ типа $\mathfrak{R}$, можно построить машину Рабина R с числом лент, равным $\max\limits_{1\le i\le m}\{\lambda(Q_i)\}$, представляющую в реальном времени множество всех слов, выводимых в исчислении $\mathfrak{P}$.

Если $\max\limits_{1\le i\le m}\{\lambda(Q_i)\}=0$, то исчисление $\mathfrak{P}$ регулярно в смысле Бюхи (см. [4]), поскольку все правила его имеют вид

$$\frac{x_1}{Q_i x_1} \quad (i=1,\ldots,m).$$

Машина Рабина, представляющая в реальном времени множество всех слов, выводимых в этом исчислении, является конечным автоматом.

Литература

1. Rabin M.O. Real-time computation. "Israel J.Math.", 1963, 1, № 4, 203-211.
2. Маслов С.Ю. Некоторые свойства аппарата канонических исчислений Э.Л.Поста. "Тр.Матем. ин-та АН СССР", 1964, 7 5 - 68.
3. Lukasiewicz J., Sur la formalisation des théories mathématiques. "Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique", Paris, 1950, 26, 11-19.
4. Büchi R.J. Regular canonical systems. "Arch. math. Logik und Grundlagenforsch.", 1964, 6, 3-4.