И.Ш.Хабибуллин

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УРЫСОНА

1. В пространстве $X = C[-1,1]$ рассмотрим класс $\mathcal{F}$ однозначно разрешимых интегральных уравнений вида

$$Kx \equiv x - Hx = y, \tag{1}$$

где $Hx(t) = \int_{-1}^{1} h(t,s,x(s))\,ds$ – интегральный оператор Урысона. Класс $\mathcal{F}$ определяется следующими условиями гладкости коэффициентов $h(t,s,x)$ и $y(t)$: 1) ядро $h(t,s,x)$ непрерывно по совокупности переменных, имеет $\tau\ (\tau \geqslant 0)$ непрерывных производных по переменной t и удовлетворяет условию Липшица по переменной x

$$|h(t,s,x_1) - h(t,s,x_2)| \leqslant q\,|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

равномерно относительно $t,s \in [-1,1]$; 2) свободный член $y(t)$ имеет τ непрерывных производных на $[-1,1]$.

При этих условиях уравнение (1) будет однозначно разрешимо на всем пространстве X, например, при $q < 1/2$.

Рассмотрим произвольные конечномерные подпространства $X_n \subset X$ одинаковой размерности N и всевозможные аддитивные и однородные операторы $P_n : X \longrightarrow X_n$ из некоторого класса $\mathcal{P}_n$. Приближенное решение уравнения (1) будем искать как точное решение $x_n^* \in X_n$ приближенного уравнения вида

$$K_n x_n \equiv x_n - P_n H x_n = P_n y \tag{2}$$

в пространстве X_n.

По аналогии с [1] введем оптимальную оценку погрешности класса методов, определяемых уравнениями (2), на классе уравнений $\mathcal{F}$

$$V_n(\mathcal{F}) = \inf_{X_n \subset X}\ \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n}\ \sup_{h,y \in \mathcal{F}} \|x^* - x_n^*\|_X, \tag{3}$$

где x^* – решение уравнения (1).

Метод (2), определяемый подпространством $X_n^0 \subset X$ и операто -

ром $P_n^0 : X \longrightarrow X_n^0$, на котором достигается, хотя бы по порядку, оптимальная оценка погрешности (3), назовем оптимальным по порядку на классе уравнений $\mathfrak{F}$.

Теорема I. При $\alpha \equiv 2\|P_n\| q < 1$ приближенное уравнение (2) однозначно разрешимо на всем пространстве X_n, и для оптимальной оценки погрешности справедливо соотношение

$$V_n(\mathfrak{F}) \asymp N^{-r}.$$

При этом оптимальным по порядку на классе $\mathfrak{F}$ является оператор P_n^0, имеющий вид

$$P_n^0 \varphi(t) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[1 - (1 - \lambda_k^{(n)})^{r+1} \right] T_k(t) T_k(t_j) \right\},$$

где $t_j = \cos \frac{2j-1}{2n}\pi$, $j = \overline{1,n}$, $T_k(t) = \cos k \arccos t$ – многочлены Чебышева I рода, а $\lambda_k^{(n)}$ определяются одним из следующих соотношений:

$$\lambda_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{2n-1}, \quad \lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n},$$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{n+k}{n+1} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \frac{\sin(k+1)\pi/(n+1)}{(n+1)\sin\pi/(n+1)}.$$

Доказательство. При $\alpha < 1$ оператор $A_n x_n \equiv P_n H x_n + P_n y$ является оператором сжатия на X_n, что следует из оценки

$$\|P_n H x - P_n H y\| = \|P_n (Hx - Hy)\| \leqslant \|P_n\| \cdot \|Hx - Hy\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|P_n\| q \|x - y\| \leqslant \alpha \|x - y\|, \qquad x, y \in X_n.$$

Отсюда следует однозначная разрешимость уравнения (2) на X_n. Оценка снизу для величины $V_n(\mathfrak{F})$ вытекает из аналогичной оценки [I] для линейных интегральных уравнений, входящих в класс $\mathfrak{F}$. Для оценки сверху заметим, что оператор P_n^0 приближает функции класса $C^{(r)}[-1,1]$ с порядком N^{-r} и что решения x^* уравнений

(I) из класса $\mathfrak{F}$ лежат в классе $C^{(\tau)}[-1,1]$, а тем более функции $Hx^* \in C^{(\tau)}[-1,1]$. Далее имеем

$$\|x^*-x_n^*\| = \|Hx^* + y - P_n^0 H_n^* - P_n^0 y\| \leq \|y - P_n^0 y\| +$$

$$+\|Hx^* - P_n^0 Hx^* + P_n^0 Hx^* - P_n^0 Hx_n^*\| \leq c_1 N^{-\tau} + \|Hx^* -$$

$$-P_n^0 Hx^*\| + \|P_n^0(Hx^* - Hx_n^*)\| \leq c_1 N^{-\tau} + c_2 N^{-\tau} + \alpha\|x^* - x_n^*\|,$$

где C_1 и C_2 – некоторые константы. Отсюда при $\alpha < 1$

$$\|x^*-x_n^*\| \leq \frac{c_1+c_2}{1-\alpha} N^{\tau},$$

что дает оценку сверху величины $V_n(\mathfrak{F})$ и доказывает оптимальность по порядку метода (2) с оператором P_n^0. Теорема доказана.

Частный случай этой теоремы при $\tau=2$ доказан в работе [2], где предложен оптимальный по порядку сплайн-метод решения уравнений из класса $\mathfrak{F}$.

2. Рассмотрим теперь приближенные методы решения уравнения (I), описываемые уравнениями вида

$$x_n(t) - P_n^t \int_{-1}^{1} P_n^s(h(t,s,x_n(s)))\,ds = P_n^t y(t), \quad x_n \in X_n, \tag{4}$$

где P_n^t, $P_n^s \in \mathcal{P}_n$, а значки t или S означают переменную, по которой применяется оператор P_n. Сузим класс $\mathfrak{F}$, введя дополнительное условие: $h(t,s,x)$ непрерывно дифференцируема τ раз также и по переменной S. Обозначим полученный класс уравнений $\mathfrak{F}'$.

<u>Теорема 2</u>. При $\alpha' \equiv 2\|P_n\|^2 q < 1$ уравнение (4) однозначно разрешимо на всем пространстве X_n, справедлива оценка

$$V_n(\mathfrak{F}) \asymp N^{-\tau}$$

и метод (4), основанный на применении оператора P_n^0 из теоремы I, является оптимальным по порядку на классе $\mathfrak{F}'$ среди всех методов (4).

Доказательство. При $\alpha' < 1$ оператор $A_n x_n \equiv$ $\equiv P_n^t y(t) + P_n^t \int_{-1}^{1} P_n^s h(t,s,x_n(s))ds$ является оператором сжатия на X_n. Действительно,

$$\|A_n x_n' - A_n x_n''\| = \|P_n^t \int_{-1}^{1} P_n^s [h(t,s,x_n'(s)) - h(t,s,x_n''(s))] ds\| \leq$$

$$\leq \|P_n^t\| \cdot \|\int_{-1}^{1} | P_n^s [h(t,s,x_n'(s)) - h(t,s,x_n''(s))] | ds\| \leq$$

$$\leq \|P_n^t\| \cdot \|\int_{-1}^{1} P_n^s [q |x_n'(s) - x_n''(s)|] ds \leq 2 \|P_n\|^2 q \|x_n' - x_n''\| \leq$$

$$\leq \alpha' \|x_n' - x_n''\| , \quad x_n', x_n'' \in \mathfrak{X}_n .$$

Следовательно, уравнение (4) однозначно разрешимо на X_n. Оценка снизу, как и в теореме I, следует из результатов [I]. Оценка сверху величины $V_n(\mathfrak{F})$, учитывая аппроксимационные свойства оператора P_n^0, отмеченные в теореме I, вытекает из соотношений (в которых опущен надстрочный знак 0 у оператора P_n^0):

$$\| x^* - x_n^*\| = \|y + Hh(x^*) - P_n^t y - P_n^t H P_n^s h(x_n^*)\| \leq$$

$$\leq \|y - P_n^t y\| + \|P_n^t Hh(x^*) - P_n^t H P_n^s h(x_n^*) + Hh(x^*) - P_n^t Hh(x^*)\| \leq$$

$$\leq c_1 N^{-r} + \|Hh(x^*) - P_n^t Hh(x^*)\| + \|P_n^t (H P_n^s h(x_n^*) - Hh(x^*))\| \leq$$

$$\leq c_1 N^{-r} + c_2 N^{-r} + 2\|P_n^t\| q \, \|P_n^s h(x_n^*) - Hh(x^*)\| \leq$$

$$\leq (c_1 + c_2) N^{-r} + \alpha \|P_n^s h(x_n^*) - P_n^s h(x^*) + P_n^s h(x^*) - h(x^*)\| \leq$$

$$\leq (c_1 + c_2) N^{-r} + \alpha \left(\|P_n^s h(x^*) - h(x^*)\| + \|P_n^s h(x_n^*) - P_n^s h(x^*)\|\right) \leq$$

$$\leq (c_1 + c_2) N^{-r} + \alpha \left(c_3 N^{-r} + \alpha \|x_n^* - x^*\|\right) .$$

Отсюда $\|x^* - x_n^*\| \leq \dfrac{c_1 + c_2 + \alpha c_3}{1 - \alpha^2} N^{-r}$, что дает требуемую оценку и доказывает теорему.

Л и т е р а т у р а

1. Г а б д у л х а е в Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1980.

2. Х а б и б у л л и н И.Ш. Об оптимизации прямых методов решения нелинейных интегральных уравнений / Ред.журн. "Дифференциальные уравнения. - Минск, 1983. - 7 с. - Деп. в ВИНИТИ 01.06.1983, № 4884.

Е.А.Широкова

ПОЛУЧЕНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ВИДЕ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Рассмотрим внешнюю обратную краевую задачу (ОКЗ) по параметру S [1, с.29, 33]. Пусть функция $w(s)=u(s)+iv(s)$, $s\in[0,\ell]$ со свойствами $w(0)=w(\ell)$, $w(s_1)\neq w(s_2)$ при $s_1\neq s_2$ является граничным значением функции $w(z)$, аналитической в области $\mathcal{D}_z$, содержащей бесконечно удаленную точку. Следует найти $\mathcal{D}_z$ и $w(z)$, если известно, что S - дуговая абсцисса границы неизвестной области.

Функция $f(\zeta)$, отображающая единичный круг $|\zeta|<1$ на искомую область, ищется следующим образом [1, с.34]. Сначала определяется $f_0(\zeta)$ - решение внутренней ОКЗ с теми же исходными данными. Затем находится корень ζ_0 уравнения Гахова

$$\frac{f_0''(\zeta)}{f_0'(\zeta)}=\frac{2\cdot\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2}, \quad |\zeta|<1. \tag{1}$$

Получив ζ_0, найдем $f(\zeta)$: $f(\zeta)=\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta} f_0'(\zeta)\cdot\left(\frac{1-\bar{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 d\zeta + C$.

Уравнение (1), как показано в [2], в случае, если $w'(s)$ гельдерова, имеет хотя бы один корень. Единственность корня уравнения (1) обеспечивает единственность решения внешней ОКЗ, и наоборот,су-