С. В. Агапов, Ж. Ш. Фахриддинов, О некоторых свойствах полугамильтоновых систем, возникающих в задаче об интегрируемых геодезических потоках на двумерном торе,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 5, 881–894

https://www.mathnet.ru/smj7803

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5

УДК 517.938

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛУГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКАХ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

С. В. Агапов, Ж. Ш. Фахриддинов

Аннотация. В недавней серии работ М. Бялого и А. Е. Миронова было продемонстрировано, что поиск полиномиальных первых интегралов геодезического потока на двумерном торе сводится к поиску решений некоторой системы квазилинейных уравнений, которая является полугамильтоновой. Данная работа направлена на изучение различных свойств этой системы.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.501

Ключевые слова: интегрируемый геодезический поток, полиномиальный первый интеграл, слабо нелинейная система, полугамильтонова система, инварианты Римана, обобщенный метод годографа, уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу.

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим двумерную поверхность M с координатами q^1, q^2 и римановой метрикой $ds^2 = g_{ij}(q)\,dq^i dq^j$. Геодезический поток этой метрики на M называется *вполне интегрируемым*, если гамильтонова система

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \quad H = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j, \quad i, j = 1, 2,$$

обладает дополнительным *первым интегралом*, т. е. функцией $F : T^*M \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\dot{F} = \{F, H\} = \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) = 0$$

и при этом F почти всюду функционально независима с H.

Поиск римановых метрик на двумерных поверхностях с интегрируемым геодезическим потоком относится к классическим задачам дифференциальной геометрии. Обзор известных результатов, а также многочисленные ссылки на различные работы по этой тематике можно найти в [1].

На двумерном торе, *который только и будет интересовать нас в дальнейшем*, известны два вида метрик, для которых соответствующий им геодезический поток интегрируем. В изотермических координатах эти метрики и дополнительные интегралы имеют вид

С. В. Агапов поддержан грантом Российского научного фонда (проект № 19-11-00044-П).

1) $ds^2 = f(x)(dx^2 + dy^2)$, $\quad F_1 = p_2$;

2) $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$, $\quad F_2 = \frac{g(y)p_1^2 - f(x)p_2^2}{f(x)+g(y)}$.

В первом примере координата y циклическая и потому имеется линейный по импульсам первый интеграл; во втором примере (метрика Лиувилля) имеется квадратичный интеграл. Вопрос о существовании других метрик на двумерном торе с интегрируемым геодезическим потоком в классе аналитических функций в общем случае на данный момент открыт, хотя и активно исследуется (см., например, [2–4] и ссылки в них). Отдельно упомянем серию работ [5–7] (см. также [8]), где было установлено, что поиск дополнительного полиномиального интеграла в этой задаче сводится к поиску решений определенной квазилинейной системы, обладающей рядом замечательных свойств. В частности, в [5] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 [5]. *Предположим, что геодезический поток римановой метрики на двумерном торе допускает полиномиальный по импульсам однородный интеграл F степени n. Тогда на накрывающей плоскости существуют глобальные полугеодезические координаты (t, x), в которых метрика имеет следующий вид:*

$$ds^2 = g^2(t,x)\,dt^2 + dx^2,$$

а интеграл F принимает вид

$$F = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(t,x)}{g^{n-k}} p_1^{n-k} p_2^k,$$

причем $a_{n-1} \equiv g$ и $a_n \equiv 1$. Тогда соотношение $\{F, H\} = 0$ эквивалентно квазилинейной системе дифференциальных уравнений на функции $a_0, \dots, a_{n-1}$ вида

$$u_t^i + v_j^i(u) u_x^j = 0, \tag{1.1}$$

где $u^i = (a_0, \dots, a_{n-1})^T$, а матрица v_j^i имеет вид

$$v_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2a_2 - na_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & (n-1)a_{n-1} - 3a_{n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & na_n - 2a_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Функции a_i, g периодические по x и квазипериодические по t.

Теорема 2 [5]. *Система (1.1) полугамильтонова, а именно,*

(1) в гиперболической области (т. е. там, где все собственные числа матрицы v_j^i вещественны и различны) существует замена переменных (инварианты Римана) $(a_0, \dots, a_{n-1}) \to (r_1, \dots, r_n)$, которая преобразует систему (1.1) в диагональный вид:

$$(r_i)_t + \lambda_i(r_1, \dots, r_n)(r_i)_x = 0, \quad i = 1, \dots, n;$$

(2) существует невырожденная замена переменных

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \to (G_1, \dots, G_n)$$

такая, что система (1.1) записывается в виде законов сохранения:

$$(G_i(a_0, \dots, a_{n-1}))_t + (H_i(a_0, \dots, a_{n-1}))_x = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Данная работа в целом направлена на исследование различных свойств системы (1.1). В разд. 2 мы напоминаем суть обобщенного метода годографа. В разд. 3 переписываем систему (1.1) при $n = 2$ в инвариантах Римана и ради полноты изложения демонстрируем, как при помощи обобщенного метода годографа построить ее общее решение. Также исследуем частное решение системы (1.1) при $n = 4$, построенное в [9], и доказываем, что геодезический поток построенной метрики не допускает полиномиальных интегралов степени 1 или 2. В разд. 4, опираясь на работу [10], доказываем, что система (1.1) не является слабо нелинейной ни при каких $n > 2$. Наконец, в разд. 5 исследуем *симметрии* системы (1.1) в случае $n = 2$.

2. Полугамильтоновы системы и обобщенный метод годографа

Диагональная система квазилинейных уравнений

$$r^i_t = v_i(r) r^i_x, \quad i = 1, \dots, n, \quad v_i \neq v_j, \tag{2.1}$$

называется *полугамильтоновой* [11], если для нее выполнены тождества

$$\partial_i \left(\frac{\partial_j v_k}{v_j - v_k} \right) = \partial_j \left(\frac{\partial_i v_k}{v_i - v_k} \right), \quad i \neq j \neq k.$$

Отметим, что если недиагональная, вообще говоря, система квазилинейных уравнений обладает инвариантами Римана, а также может быть записана в виде законов сохранения (см. теорему 2 выше), то она автоматически полугамильтонова (см. [12]).

Полугамильтоновы системы (2.1) обладают бесконечным числом *симметрий*, т. е. коммутирующих с (2.1) потоков вида $r^i_\tau = w_i(r) r^i_x$, $i = 1, \dots, n$, где w_i и v_i связаны соотношениями

$$\frac{\partial_k v_i}{v_k - v_i} = \frac{\partial_k w_i}{w_k - w_i}, \quad i \neq k. \tag{2.2}$$

Пусть функции $w_i(r)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют (2.2), т. е. задают некоторую симметрию системы (2.1). Запишем следующую систему из n уравнений:

$$w_i(r) = v_i(r) t + x. \tag{2.3}$$

В [11] доказано, что если удается разрешить систему (2.3) относительно функций $r^i(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, то эти функции автоматически будут удовлетворять исходной полугамильтоновой системе (2.1). В этом и заключается обобщенный метод годографа.

Для полугамильтоновой системы, которая записана в недиагональной форме:

$$u^i_t = \sum_{j=1}^{n} v^i_j(u) u^j_x, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.4}$$

симметрии можно искать в виде

$$u^i_\tau = \sum_{j=1}^{n} w^i_j(u) u^j_x, \quad i = 1, \dots, n,$$

с учетом условия равенства смешанных производных:

$$\partial_\tau \big(u^i_t\big) = \partial_\tau \left(\sum_{j=1}^{n} v^i_j(u) u^j_x \right) = \partial_t \big(u^i_\tau\big) = \partial_t \left(\sum_{j=1}^{n} w^i_j(u) u^j_x \right). \tag{2.5}$$

В этом случае решение системы (2.4) находится из системы уравнений

$$x \delta^i_k + t v^i_k = w^i_k. \tag{2.6}$$

3. Решения системы (1.1) при малых степенях n

В этом разделе напоминаем, как строятся общие решения системы (1.1) в случаях $n = 1$, $n = 2$, а также исследуем частное решение в случае $n = 4$, построенное в [9].

Случай $n = 1$. Из теоремы 1 при $n = 1$ имеем

$$ds^2 = g^2(t,x)\,dt^2 + dx^2, \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{g^2(t,x)} + p_2^2\right), \quad F = \frac{a_0(t,x)}{g(t,x)}p_1 + a_1(t,x)p_2,$$

причем $a_0(t,x) \equiv g(t,x)$, $a_1(t,x) \equiv 1$. Условие $\{F,H\} = 0$ эквивалентно тому, что

$$g_t + g_x = 0, \tag{3.1}$$

т. е. $g(t,x) = f(t-x)$, где f — произвольная функция одного аргумента. В итоге получим

$$F = p_1 + p_2, \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{f^2(t-x)} + p_2^2\right), \quad \{F,H\} = 0.$$

Случай $n = 2$. Из теоремы 1 при $n = 2$ имеем

$$ds^2 = g^2(t,x)\,dt^2 + dx^2, \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{g^2(t,x)} + p_2^2\right),$$

$$F = \frac{a_0(t,x)}{g^2}p_1^2 + \frac{a_1(t,x)}{g}p_1p_2 + a_2(t,x)p_2^2.$$

С учетом $a_1(t,x) \equiv g(t,x)$, $a_2(t,x) \equiv 1$ получим, что условие $\{F,H\} = 0$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$(a_0)_t + gg_x = 0, \quad g_t + 2(1-a_0)g_x + g(a_0)_x = 0. \tag{3.2}$$

Эта система полугамильтонова. Ее можно записать в виде законов сохранения:

$$(a_0)_t + \left(\frac{g^2}{2}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{1}{2g^2}\right)_t + \left(\frac{1-a_0}{g^2}\right)_x = 0.$$

Кроме того, она допускает инварианты Римана r^1, r^2:

$$a_0(t,x) = 1 - r^1(t,x) - r^2(t,x), \quad g^2(t,x) = -4r^1(t,x)r^2(t,x),$$

в которых принимает диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 2r^2 & 0 \\ 0 & 2r^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \end{pmatrix}_x = 0, \tag{3.3}$$

т. е. $r^i_t + v_i(r)r^i_x = 0$, где $v_1 = 2r^2$, $v_2 = 2r^1$.

Для построения решений системы (3.3) применим обобщенный метод годографа. Будем искать симметрии системы (3.3) в виде

$$\begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \end{pmatrix}_x,$$

где $w_1(r)$, $w_2(r)$ — неизвестные пока функции. Соотношения (2.2) принимают вид

$$\frac{\partial w_1}{\partial r^2} = \frac{w_1 - w_2}{r^2 - r^1}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial r^1} = \frac{w_2 - w_1}{r^1 - r^2},$$

откуда, в частности, следует, что $\partial w_1/\partial r^2 = \partial w_2/\partial r^1$. Следовательно, существует такая функция $\Psi(r^1, r^2)$, что $\Psi_{r^1} = w_1$, $\Psi_{r^2} = w_2$, при этом Ψ удовлетворяет уравнению Эйлера — Пуассона — Дарбу:

$$\Psi_{r^1 r^2} + \frac{\Psi_{r^1} - \Psi_{r^2}}{r^1 - r^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (см., например, [13])

$$\Psi(r^1, r^2) = 2u(r^1) + 2v(r^2) + (r^1 - r^2)(v'(r^2) - u'(r^1)),$$

где $u(r^1)$, $v(r^2)$ — две произвольные функции одного аргумента. Находя отсюда функции w_1, w_2 и подставляя их в систему (2.3), получим общее решение системы (3.3) (а заодно и системы (1.1)) при $n = 2$, записанное в неявном виде:

$$t = -\frac{1}{2}(u''(r^1) + v''(r^2)), \quad x = u'(r^1) + v'(r^2) - r^1 u''(r^1) - r^2 v''(r^2). \tag{3.4}$$

Случай $n = 4$. В [9] при помощи обобщенного метода годографа были построены точные локальные решения системы (1.1) в случае $n = 4$.

Теорема 3 [9]. *Система* (1.1) *при* $n = 4$ *имеет следующее решение:*

$$a_0 = \frac{3\big(c_2 + t + 3c_3^2\big)}{5c_3^2},\ a_1 = -\frac{3\sqrt{c_3^2\big(-5c_1 - 4(3c_2 + 8t) - 18c_3^2 + 5x\big) - 12(c_2 + t)^2}}{5c_3^2},$$

$$a_2 = \frac{-6\big(2c_2 + 2t + c_3^2\big)}{5c_3^2},\ g = \frac{2\sqrt{c_3^2(-5c_1 - 4(3c_2 + 8t) - 18c_3^2 + 5x) - 12(c_2 + t)^2}}{5c_3^2};$$

где c_1, c_2, c_3 *— произвольные постоянные.*

Исследуем вопрос о том, является ли построенный интеграл четвертой степени неприводимым. А именно, проверим, может ли геодезический поток построенной в [9] метрики обладать дополнительным полиномиальным интегралом степени 1 или 2.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 1 *геодезический поток метрики*

$$ds^2 = g^2(t, x)\, dt^2 + dx^2, \tag{3.5}$$

$$g(t, x) = \frac{2\sqrt{c_3^2(-5c_1 - 4(3c_2 + 8t) - 18c_3^2 + 5x) - 12(c_2 + t)^2}}{5c_3^2}$$

не допускает линейных и квадратичных по импульсам первых интегралов.

Доказательство. Как показано выше (случай $n = 1$), линейный интеграл существует лишь для метрик вида $ds^2 = g^2(t, x)\, dt^2 + dx^2$, удовлетворяющих уравнению (3.1). Метрика (3.5) этому уравнению не удовлетворяет, откуда следует отсутствие линейных интегралов.

В случае квадратичного интеграла (случай $n = 2$) должны выполняться соотношения (3.2). Подставим метрику (3.5) в систему (3.2) и получим, что

$$a_0(t, x) = -\frac{2t}{5c_3^2} + A(x),$$

а функция $A(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$12c_2 + 11c_3^2 + 10t + 5c_3^2 A(x) + \big(5c_1 c_3^2 + 2\big(6c_2^2 + 9c_3^4 + 16c_3^2 t + 6t^2 + 6c_2\big(c_3^2 + 2t\big)\big) - 5c_3^2 x\big)A'(x) = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$t^2\left(12A'(x)\right)+t\big(10+8\big(3c_2+4c_3^2\big)A'(x)\big)+5c_1c_3^2A'(x)+12c_2^3A'(x)$$
$$+18c_3^4A'(x)+12c_2c_3^2A'(x)-5c_3^2xA'(x)+5c_3^2A(x)+12c_2+11c_3^2=0.$$

Чтобы это выражение тождественно обращалось в нуль, необходимо, чтобы коэффициенты перед всеми степенями t были равны нулю. Видно, что это невозможно ни при каких $A(x)$. Следовательно, метрика (3.5) не допускает квадратичных интегралов.

Теорема 4 доказана.

4. Слабо нелинейные системы

Диагональная система (2.1) называется *слабо нелинейной,* если она удовлетворяет условию

$$\frac{\partial v_i}{\partial r^i}=0$$

для любого $i=1,\dots,n$ (см., например, [14]). Замечательную особенность таких систем выражает следующий факт: при условии ограниченности самого решения слабо нелинейной системы на любом конечном временном интервале производные решения также остаются ограниченными. Таким образом, для решений таких систем характерно отсутствие градиентной катастрофы [15].

Записанные в инвариантах Римана слабо нелинейные полугамильтоновы системы (2.1) были полностью описаны в [10]. В частности, в [10] было показано, что характеристические скорости $v_i(r)$ таких систем могут быть выражены явным образом в терминах инвариантов Римана r. В [10] также описаны различные способы построения решений таких систем (см. также [16, 17]).

Системы, возникающие в приложениях, обычно имеют недиагональный вид (2.4). Поэтому возникает естественный вопрос о том, как можно понять, является ли система вида (2.4) слабо нелинейной, не находя в явном виде инвариантов Римана. В [10] предложена следующая процедура проверки свойства слабой нелинейности.

Рассмотрим недиагональную систему вида

$$u_t^i+v_j^i(u)u_x^j=0,\quad i,j=1,\dots,n. \tag{4.1}$$

Вычислим характеристический полином матрицы v_j^i:

$$\det\big(\lambda E-v_j^i\big)=\lambda^n+f_1(u)\lambda^{n-1}+f_2(u)\lambda^{n-2}+\dots+f_n(u), \tag{4.2}$$

и рассмотрим следующий ковектор:

$$(\nabla f_1)v^{n-1}+(\nabla f_2)v^{n-2}+\dots+(\nabla f_n), \tag{4.3}$$

где

$$\nabla f_k=\left(\frac{\partial f_k}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial f_k}{\partial u^n}\right),$$

а v^n означает n-ю степень матрицы v_j^i.

Предложение 1 [10]. *Система* (4.1) *слабо нелинейна тогда и только тогда, когда ковектор* (4.3) *тождественно нулевой.*

Применим указанную процедуру для проверки того, является ли система (1.1) слабо нелинейной. Имеем

$$(u^1,\dots,u^n)=(a_0,\dots,a_{n-1}),\quad \nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial a_0},\dots,\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\right).$$

Утверждение 1. *Система* (1.1) *слабо нелинейна при* $n = 2$.

Доказательство. Это утверждение верно, поскольку при $n = 2$ записанная в инвариантах Римана система (1.1) имеет вид (3.3), для которого, очевидно, выполнено условие слабой нелинейности. Тем не менее убедимся, что вышеописанный критерий также дает верный ответ. При $n = 2$ матрица (1.2) имеет следующий вид:

$$v_j^i = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 2-2a_0 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический полином:

$$\det(\lambda E - v_j^i) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 2-2a_0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda & -a_1 \\ -a_1 & \lambda + 2a_0 - 2 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + (2a_0 - 2)\lambda - a_1^2,$$

где $f_1(u) = 2a_0 - 2$ и $f_2(u) = -a_1^2$;

$$\nabla f_1 = (2, 0), \quad \nabla f_2 = (0, -2a_1).$$

Строим ковектор (4.3):

$$\nabla f_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 2-2a_0 \end{pmatrix} + \nabla f_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 2-2a_0 \end{pmatrix}^0$$

$$= (2,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 2-2a_0 \end{pmatrix} + (0, -2a_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 2a_1) + (0, -2a_1) = (0, 0).$$

Следовательно, система (1.1) слабо нелинейна при $n = 2$.

Утверждение 2. *Система* (1.1) *не является слабо нелинейной при* $n = 3$.

Доказательство. При $n = 3$ матрица (1.2) имеет следующий вид:

$$v_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 2a_2 - 3a_0 \\ 0 & a_2 & 3 - 2a_1 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический полином:

$$\det\bigl(\lambda E - v_j^i\bigr) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 2a_2 - 3a_0 \\ 0 & a_2 & 3 - 2a_1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -a_1 \\ -a_2 & \lambda & 3a_0 - 2a_2 \\ 0 & -a_2 & \lambda + 2a_1 - 3 \end{pmatrix} \right| = \lambda^3 + (-3 + 2a_1)\lambda^2 + (3a_0a_2 - 2a_2^2)\lambda - a_1a_2^2,$$

т. е.

$$f_1(u) = -3 + 2a_1, \quad f_2(u) = 3a_0a_2 - 2a_2^2, \quad f_3 = -a_1a_2^2.$$

Следовательно,

$$\nabla f_1 = (0, 2, 0), \quad \nabla f_2 = (3a_2, 0, 3a_0 - 4a_2), \quad \nabla f_3 = \bigl(0, -a_2^2, -2a_1a_2\bigr).$$

Строим ковектор (4.3):

$$\nabla f_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 2a_2 - 3a_0 \\ 0 & a_2 & 3 - 2a_1 \end{pmatrix}^2 + \nabla f_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 2a_2 - 3a_0 \\ 0 & a_2 & 3 - 2a_1 \end{pmatrix}^1$$

$$+ \nabla f_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 2a_2 - 3a_0 \\ 0 & a_2 & 3 - 2a_1 \end{pmatrix}^0 = (0, -a_2(3a_0 + a_2), a_0(-9 + 6a_1) + 3a_1a_2).$$

Следовательно, система (1.1) не является слабо нелинейной при $n = 3$.

Теорема 5. *Система* (1.1) *не является слабо нелинейной при* $n > 2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что ковектор (4.3) имеет ненулевую компоненту. Введем для удобства следующие обозначения:

$$A_n^l = la_l - (n-l+2)a_{l-2}, \quad l = \overline{1,n},$$

здесь $a_j = 0$ при $j < 0$.

Лемма 1. *При* $1 < m \leq n-1$ *матрица* $\left(v_j^i\right)^m$ *имеет следующий блочный вид:*

$$\left(v_j^i\right)^m = \left(\frac{O_{m\times l}}{D_{l\times l}}\middle| A\cdot a_{n-1}^{m-1} \middle| \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right)$$

здесь $l = n-m$, $O_{m\times l}$ — *нулевая матрица, имеющая* m *строк и* l *столбцов,* $D_{l\times l}$ — *диагональная матрица с элементами* a_{n-1}^m *на диагонали,* A — *вектор-столбец вида* $A = \left(A_n^1, A_n^2, \cdots, A_n^n\right)^T$.

Доказательство этой леммы проведем по индукции.

Шаг 1. Проверяем при $m = 2$. Имеем

$$\left(v_j^i\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^1 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & A_n^2 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & A_n^3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & A_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^1 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & A_n^2 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & A_n^3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & A_n^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_n^1\cdot a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_n^2\cdot a_{n-1} & * \\ a_{n-1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_n^3\cdot a_{n-1} & * \\ 0 & a_{n-1}^2 & \cdots & 0 & 0 & A_n^4\cdot a_{n-1} & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_n^{n-2}\cdot a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^2 & 0 & A_n^{n-1}\cdot a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^2 & A_n^n\cdot a_{n-1} & * \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{O_{2\times(n-2)}}{D_{(n-2)\times(n-2)}}\middle| A\cdot a_{n-1} \middle| \begin{matrix}*\\ *\end{matrix}\right)$$

Шаг 2. Предположим, что лемма верна при $m = k$, т. е.

$$\left(v_j^i\right)^k = \left(\frac{O_{k\times(n-k)}}{D_{(n-k)\times(n-k)}}\middle| A\cdot a_{n-1}^{k-1} \middle| \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right).$$

Шаг 3. Докажем, что лемма верна при $m = k+1$. Легко видеть, что

$$\left(v_j^i\right)^{k+1} = \left(v_j^i\right)^k \cdot \left(v_j^i\right) = \left(\frac{O_{k\times(n-k)}}{D_{(n-k)\times(n-k)}}\middle| A\cdot a_{n-1}^{k-1} \middle| \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right) \cdot \left(\frac{O_{1\times(n-1)}}{D_{(n-1)\times(n-1)}}\middle| A\right)$$

Лемма 1 доказана $\square$

Заметим, что согласно лемме 1 матрица $\left(v_j^i\right)^{n-1}$ имеет следующий вид:

$$\left(v_j^i\right)^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_n^1 \cdot a_{n-1}^{n-2} & \cdots \\ 0 & A_n^2 \cdot a_{n-1}^{n-2} & \cdots \\ 0 & A_n^3 \cdot a_{n-1}^{n-2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_n^{n-2} \cdot a_{n-1}^{n-2} & \cdots \\ 0 & A_n^{n-1} \cdot a_{n-1}^{n-2} & \cdots \\ a_{n-1}^{n-1} & A_n^{n} \cdot a_{n-1}^{n-2} & \cdots \end{pmatrix} = \left(\frac{O_{(n-1)\times 1}}{D_{1\times 1}} \middle| A \cdot a_{n-1}^{n-2} \middle| \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \right).$$

Найдем характеристический полином матрицы (1.2).

Лемма 2. *Характеристический полином матрицы* (1.2) *равен*

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f_k \cdot \lambda^{n-k}\right) + f_n,$$

где $f_k = (k+1)a_{n-(k+1)}a_{n-1}^{k-1} - (n-(k-1))a_{n-(k-1)}a_{n-1}^{k-1}$, $k = 1, \dots, n-1$, *и* $f_n = -a_{n-1}^{n-1}a_1$.

Доказательство. Вычислим соответствующий определитель, раскладывая его по последней строке:

$$\det(\lambda E - v_j^i)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -A_n^1 \\ -a_{n-1} & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -A_n^2 \\ 0 & -a_{n-1} & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & -A_n^3 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & -A_n^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & -A_n^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & \lambda & 0 & -A_n^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & \lambda & -A_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & \lambda - A_n^n \end{pmatrix} \right|$$

$$= (\lambda - (na_n - 2a_{n-2}))\lambda^{n-1} + a_{n-1}((-(n-1)a_{n-1} + 3a_{n-3})\lambda^{n-2}$$
$$+ a_{n-1}((-(n-2)a_{n-2} + 4a_{n-4})\lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1}((-3a_3 + (n-1)a_1)\lambda^2$$
$$+ a_{n-1}((-2a_2 + na_0)\lambda - a_{n-1}a_1))\cdots))$$
$$= \lambda^n + (2a_{n-2} - na_n)\lambda^{n-1} + a_{n-1}(3a_{n-3} - (n-1)a_{n-1})\lambda^{n-2}$$
$$+ a_{n-1}^2(4a_{n-4} - (n-2)a_{n-2})\lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1}^{n-4}((n-2)a_2 - 4a_4)\lambda^3$$
$$+ a_{n-1}^{n-3}((n-1)a_1 - 3a_3)\lambda^2 + a_{n-1}^{n-2}(na_0 - 2a_2)\lambda - a_{n-1}^{n-1}a_1$$
$$= \lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{n-1}^{k-1}((k+1)a_{n-(k+1)} - (n-(k-1))a_{n-(k-1)})\lambda^{n-k}\right) - a_{n-1}^{n-1}a_1$$
$$= \lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1}(f_k \cdot \lambda^{n-k}) + f_n,$$

где $f_k = (k+1)a_{n-(k+1)}a_{n-1}^{k-1} - (n-(k-1))a_{n-(k-1)}a_{n-1}^{k-1}$, $k = 1, \dots, (n-1)$, и $f_n = -a_{n-1}^{n-1}a_1$.

Лемма 2 доказана □

Лемма 3. *Градиенты ∇f_i, $i = 1, \dots, n$, имеют следующий вид:*

$$\nabla f_1 = (\underbrace{0, \ \dots \ , \ 0}_{n-2}, 2, 0), \quad \nabla f_2 = (\underbrace{0, \ \dots \ , \ 0}_{n-3}, \ 3a_{n-1}, \ 0, \ 3a_{n-3} - 2(n-1)a_{n-1}),$$

$$\nabla f_k = \big(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-(k+1)}, \ (k+1)a_{n-1}^{k-1}, \ 0, \ -(n-(k-1))a_{n-1}^{k-1}, \ \underbrace{0, \dots, 0}_{k-3},$$
$$(k^2-1)a_{n-(k+1)}a_{n-1}^{k-2} - (k-1)(n-(k-1))a_{n-(k-1)}a_{n-1}^{k-2}\big)$$

при $2 < k < n$,

$$\nabla f_n = \big(0, \ -a_{n-1}^{n-1}, \ \underbrace{0, \ \dots \ , \ 0}_{n-3}, \ -(n-1)\cdot a_1 \cdot a_{n-1}^{n-2}\big).$$

Доказательство. 1. Если $k = 1$, то ввиду $a_n \equiv 1$ получим $f_1 = 2a_{n-2} - n$ и, следовательно,

$$\nabla f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_0}, \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, ..., \frac{\partial f_1}{\partial a_{n-2}}, \ \frac{\partial f_1}{\partial a_{n-1}}\right) = (\underbrace{0, \ \dots \ , \ 0}_{n-2}, 2, 0).$$

2. Если $k = 2$, то $n - (k-1) = n - 1$. В этом случае $f_2 = 3a_{n-3} \cdot a_{n-1} - (n-1) \cdot a_{n-1}^2$ и

$$\nabla f_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial a_{n-4}}, \frac{\partial f_2}{\partial a_{n-3}}, \frac{\partial f_2}{\partial a_{n-2}}, \frac{\partial f_2}{\partial a_{n-1}}\right)$$
$$= (\underbrace{0, \ \dots \ , \ 0}_{n-3}, \ 3a_{n-1}, \ 0, \ 3a_{n-3} - 2(n-1)a_{n-1}).$$

3. Если $2 < k < n$, то

$$f_k = (k+1)a_{n-(k+1)}a_{n-1}^{k-1} - (n-(k-1))a_{n-(k-1)}a_{n-1}^{k-1},$$
$$\frac{\partial f_k}{\partial a_{n-1}} = (k-1)(k+1)a_{n-(k+1)}a_{n-1}^{k-2} - (k-1)(n-(k-1))a_{n-(k-1)}a_{n-1}^{k-2},$$
$$\frac{\partial f_k}{\partial a_{n-(k-1)}} = -(n-(k-1))a_{n-1}^{k-1}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-(k+1)}} = (k+1)a_{n-1}^{k-1},$$
$$\frac{\partial f_k}{\partial a_i} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq n-1 \quad \text{и} \quad i \neq n-(k\pm 1).$$

Тогда

$$\nabla f_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-(k+1)}}, \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-k}}, \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-(k-1)}}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-2}}, \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-1}}\right)$$
$$= \big(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-(k+1)}, (k+1)a_{n-1}^{k-1}, 0, -(n-(k-1))a_{n-1}^{k-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-3},$$
$$(k^2-1)a_{n-(k+1)}a_{n-1}^{k-2} - (k-1)(n-(k-1))a_{n-(k-1)}a_{n-1}^{k-2}\big).$$

4. При $k = n$ имеем $f_n = -a_{n-1}^{n-1}a_1$ и

$$\nabla f_n = \left(\frac{\partial f_n}{\partial a_0}, \frac{\partial f_n}{\partial a_1}, \frac{\partial f_n}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial a_{n-2}}, \frac{\partial f_n}{\partial a_{n-1}}\right)$$
$$= \big(0, \ -a_{n-1}^{n-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-3}, -(n-1)\cdot a_1 \cdot a_{n-1}^{n-2}\big).$$

Лемма 3 доказана. $\square$

Для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что ковектор (4.3) имеет хотя бы одну ненулевую компоненту. Покажем, что его вторая компонента отлична от нуля. Согласно леммам 1, 3 при $2 < k < n-1$ имеем

$$\nabla f_k \cdot (v^i_j)^{n-k} = \big(\underbrace{0,\dots,0}_{n-(k+1)}, (k+1)a^{k-1}_{n-1}, 0, -(n-(k-1))a^{k-1}_{n-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{k-3},$$

$$(k^2-1)a_{n-(k+1)}a^{k-2}_{n-1} - (k-1)\big(n-(k-1)\big)a_{n-(k-1)}a^{k-2}_{n-1}\big) \cdot \left(\frac{O_{(n-k)\times k}}{D_{k\times k}} \,\middle|\, A\cdot a^{n-k-1}_{n-1} \,\middle|\, \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right)$$
$$= \big(0, \big(-(n-(k-1))a^{k-1}_{n-1}\big)\cdot a^{n-k}_{n-1}, \dots\big).$$

Следовательно, ковектор (4.3) имеет вид

$$(\nabla f_1)v^{n-1} + (\nabla f_2)v^{n-2} + \sum_{k=3}^{n-1} \nabla f_k \cdot \big(v^i_j\big)^{n-k} + (\nabla f_n)$$
$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{n-2}, 2, 0) \cdot \left(\frac{O_{(n-1)\times 1}}{D_{1\times 1}} \,\middle|\, A\cdot a^{n-2}_{n-1} \,\middle|\, \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right)$$
$$+ (\underbrace{0,\dots,0}_{n-3}, 3a_{n-1}, 0, 3a_{n-3} - 2(n-1)a_{n-1}) \cdot \left(\frac{O_{(n-2)\times 2}}{D_{2\times 2}} \,\middle|\, A\cdot a^{n-3}_{n-1} \,\middle|\, \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right)$$
$$+\left(0, \sum_{k=3}^{n-1}\big(\big(-(n-(k-1))a^{k-1}_{n-1}\big)\cdot a^{n-k}_{n-1}\big), \dots\right) + \big(0,\ -a^{n-1}_{n-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-3}, -(n-1)\cdot a_1\cdot a^{n-2}_{n-1}\big)$$
$$= \big(0, 2a^{n-2}_{n-1}\cdot((n-1)a_{n-1} - 3a_{n-3}), \dots\big) + \big(0, a^{n-2}_{n-1}\cdot(3a_{n-3} - 2(n-1)a_{n-1}), \dots\big)$$
$$+\left(0, \sum_{k=3}^{n-1}\big(\big(-(n-(k-1))\cdot a^{k-1}_{n-1}\big)\cdot a^{n-k}_{n-1}\big), \dots\right) + \big(0, -a^{n-1}_{n-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-3}, -(n-1)\cdot a_1\cdot a^{n-2}_{n-1}\big)$$
$$= \left(0,\ \ -a^{n-2}_{n-1}\cdot\left(3a_{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot a_{n-1}\right), \dots\right).$$

Итак, при любом $n > 2$ вторая компонента ковектора (4.3) равна

$$-a^{n-2}_{n-1}\cdot\left(3a_{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot a_{n-1}\right),$$

т. е., вообще говоря, отлична от нуля.

Теорема 5 доказана. $\square$

5. Описание коммутирующих потоков

Исследуем структуру коммутирующих потоков (симметрий) системы (1.1). При $n = 2$ для системы, записанной в инвариантах Римана (3.3), симметрии описаны в разд. 3. При $n > 2$ поиск инвариантов Римана и явное приведение системы к диагональному виду становится, вообще говоря, сложной задачей. Поэтому в этом случае для построения решений методом обобщенного годографа, возможно, имеет смысл попробовать описать симметрии исходной недиагональной системы (1.1). В данном разделе продемонстрировано, как это можно сделать в случае $n = 2$.

Итак, при $n = 2$ система (1.1) имеет вид

$$u_t^i + v_j^i(u)u_x^j = 0, \quad v_j^i = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 2 - 2a_0 \end{pmatrix}.$$

Будем искать симметрии этой системы в виде

$$u_\tau^i + b_j^i(u)u_x^j = 0, \quad b_j^i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $b_j^i(u) = b_j^i(a_0, a_1)$. По определению симметрий имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\big(v_j^i(u)u_x^j\big) = \frac{\partial}{\partial t}\big(b_j^i(u)u_x^j\big)$$

при всех $i = 1, 2$. Прямыми вычислениями получаем следующие соотношения:

$$b_{21} = b_{12}, \quad b_{22} = b_{11} - \frac{2(-1 + a_0)b_{12}}{a_1},$$

$$(b_{11})_{a_1} - (b_{12})_{a_0} = 0, \quad b_{12} - a_1(b_{12})_{a_1} + a_1(b_{11})_{a_0} - 2(-1 + a_0)(b_{12})_{a_0} = 0.$$

Следовательно, существует функция $\Psi(a_0, a_1)$ такая, что

$$b_{11} = \Psi_{a_0}, \quad b_{12} = \Psi_{a_1}, \tag{5.2}$$

при этом $\Psi(a_0, a_1)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$a_1\Psi_{a_0a_0} - 2(a_0 - 1)\Psi_{a_0a_1} - a_1\Psi_{a_1a_1} + \Psi_{a_1} = 0. \tag{5.3}$$

Это уравнение всюду, кроме одной точки, имеет гиперболический тип:

$$D = (a_0 - 1)^2 + a_1^2 \geq 0.$$

Приведем его к каноническому виду. Характеристическое уравнение имеет вид

$$a_1(da_1)^2 + 2(a_0 - 1)\, da_0da_1 - a_1(da_0)^2 = 0,$$

т. е.

$$\frac{da_1}{da_0} = \frac{1 - a_0 \pm \sqrt{(1 - a_0)^2 + a_1^2}}{a_1}. \tag{5.4}$$

После замены переменных

$$1 - a_0 = r\cos\phi, \quad a_1 = r\sin\phi \tag{5.5}$$

уравнение (5.4) принимает следующий вид:

$$r\sin\phi\, d\phi = (\cos\phi \pm 1)\, dr.$$

Переменные разделяются, и после интегрирования получим

$$r = \frac{C}{\cos\phi \pm 1}. \tag{5.6}$$

С учетом (5.5), (5.6) найдем общее решение дифференциального уравнения (5.4) в виде

$$a_1 = \pm\sqrt{C^2 + 2C(a_0 - 1)}.$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения и решая получившееся квадратное уравнение относительно C, получим

$$C_1 = 1 - a_0 - \sqrt{(1-a_0)^2 + a_1^2}, \quad C_2 = 1 - a_0 + \sqrt{(1-a_0)^2 + a_1^2}. \tag{5.7}$$

Отметим, что найденные таким образом C_1, C_2 — это по сути инварианты Римана исходной системы (1.1) (см. разд. 3, случай $n = 2$). Сделав теперь соответствующую замену переменных в уравнении (5.3), запишем его в каноническом виде и получим уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$\Psi_{C_1C_2} + \frac{\Psi_{C_1} - \Psi_{C_2}}{C_1 - C_2} = 0. \tag{5.8}$$

Общее решение уравнения (5.8) имеет следующий вид (см. [13]):

$$\Psi(C_1, C_2) = 2u(C_1) + 2v(C_2) + (C_1 - C_2)(v'(C_2) - u'(C_1)),$$

где u, v — произвольные функции одного аргумента. С учетом (5.2) получим итоговый вид симметрий (5.1):

$$b_{11} = -2(u'(C_1) + v'(C_2) - C_1u''(C_1) - C_2v''(C_2)),$$
$$b_{12} = b_{21} = -2a_1(u''(C_1) + v''(C_2)),$$
$$b_{22} = -2(u'(C_1) + v'(C_2) + C_2u''(C_1) + C_1v''(C_2)).$$

Общее решение исходной системы (1.1) задается соотношениями (2.6) и с учетом найденных симметрий принимает следующий вид:

$$x = -2(u'(C_1) + v'(C_2) - C_1u''(C_1) - C_2v''(C_2)), \quad t = -2(u''(C_1) + v''(C_2)),$$

что вполне согласуется с общим решением (3.4), построенным выше. Здесь C_1, C_2 имеют вид (5.7).

Итак, для системы (1.1) при $n = 2$ в общем виде описаны симметрии и обобщенным методом годографа построено общее решение.

6. Заключение

В данной работе исследована задача об интегрируемых геодезических потоках на двумерном торе. Согласно фундаментальному наблюдению, сделанному в [5], поиск дополнительного полиномиального интеграла такого потока сводится к поиску решений квазилинейной системы дифференциальных уравнений вида (1.1), обладающей рядом замечательных свойств. В частности, в [5] доказано, что эта система полугамильтонова.

Целью данной работы является исследование различных свойств системы (1.1). В частности, получены следующие результаты.

1. Доказано, что решение системы (1.1) при $n = 4$, построенное в [9], нетривиальное, т. е. геодезический поток построенной в [9] метрики не допускает полиномиальных интегралов степени 1 или 2.

2. Доказано, что система (1.1) слабо нелинейна лишь при $n = 2$.

3. Описаны симметрии системы (1.1) при $n = 2$.

Было бы очень интересно построить решение системы (1.1) при $n = 3$ или $n = 5$. Возможно, это удастся сделать, описав ее симметрии в общем виде и воспользовавшись обобщенным методом годографа (аналогично тому, как это сделано в данной работе в разд. 5 при $n = 2$).

Благодарность. Авторы благодарят анонимного рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болсинов А. В., Матвеев В. С., Фоменко А. Т.* Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 10. С. 5–32.
2. *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 9. С. 125–148.
3. *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 12. С. 49–64.
4. *Тайманов И. А.* О первых интегралах геодезических потоков на двумерном торе // Тр. МИАН. 2016. Т. 295. С. 241–260.
5. *Bialy M. L., Mironov A. E.* Rich quasi-linear system for integrable geodesic flows on 2-torus // Disc. Cont. Dyn. Syst. — Series A. 2011. V. 29, N 1. P. 81–90.
6. *Bialy M. L., Mironov A. E.* Cubic and quartic integrals for geodesic flow on 2-torus via system of hydrodynamic type // Nonlinearity. 2011. V. 24. P. 3541–3554.
7. *Bialy M. L., Mironov A. E.* Integrable geodesic flows on 2-torus: Formal solutions and variational principle // J. Geom. Phys. 2015. V. 87, N 1. P. 39–47.
8. *Pavlov M. V., Tsarev S. P.* On local description of two-dimensional geodesic flows with a polynomial first integral // Phys. A. Math. Theor. 2016. V. 49, N 17. P. 175201.
9. *Абдикаликова Г., Миронов А. Е.* О точных решениях системы квазилинейных уравнений, описывающей интегрируемые геодезические потоки на поверхности // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 949–954.
10. *Ferapontov E. V.* Integration of weakly nonlinear hydrodinamic systems in Riemann invariants // Phys. Let. A. 1991. V. 158. P. 112–118.
11. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 5. С. 1048–1068.
12. *Serre D.* Systems of Conservation Laws 2: Geometric Structures, Oscillations, and Initial-Boundary Value Problems. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1999.
13. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Физматгиз, 1957.
14. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квализилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
15. *Рождественский Б. Л., Сидоренко А. Д.* О невозможности «градиентной катастрофы» для слабонелинейных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 5. С. 1176–1179.
16. *Павлов М. В.* Гамильтонов формализм слабонелинейных систем гидродинамики // Теор. мат. физ. 1987. Т. 73, № 2. С. 316–320.
17. *Ферапонтов Е. В.* Интегрирование слабо нелинейных полугамильтоновых систем гидродинамического типа методами теории тканей // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 9. С. 1220–1235.

Поступила в редакцию 14 апреля 2023 г.
После доработки 2 мая 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Агапов Сергей Вадимович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
agapov.sergey.v@gmail.com, agapov@math.nsc.ru

Фахриддинов Жамолиддин Шамсиддин угли
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
z.fakhriddinov@g.nsu.ru