

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Коняев, Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 4, 629–634

<https://www.mathnet.ru/mzm10038>

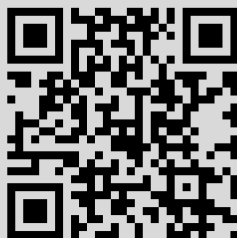
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

20 мая 2025 г., 12:39:05



КВАДРАТУРЫ ТИПА ГАУССА ДЛЯ СФЕРЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ИКОСАЭДРА С ИНВЕРСИЕЙ

С. И. Коняев

1. В работах [1—7] получен ряд квадратур для сферы в трехмерном пространстве, инвариантных относительно или группы икосаэдра G_{XX} или группы икосаэдра с инверсией G_{XX}^* . Построенные в этих работах квадратуры точно интегрируют все многочлены до заданного порядка n включительно, и некоторые из них, с учетом требования инвариантности, являются квадратурами типа Гаусса.

Получение квадратур типа Гаусса высоких порядков наталкивалось на трудности составления и решения нелинейных систем уравнений с большим числом переменных. За последние годы В. И. Лебедевым [8—10] получена серия квадратур до 29 порядка, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией S_{VIII}^* . Методами, близкими к методам в [6—10], в этой работе удается получить квадратуры 19 и 29 порядков, инвариантных относительно G_{XX}^* .

Зададим икосаэдр, вписанный в единичную сферу S_2 , сферическими координатами:

$$\vartheta = 0; \vartheta = \pi;$$

$$\vartheta = \arctg 2; \varphi = 0; 2\pi/5; 4\pi/5; 6\pi/5; 8\pi/5;$$

$$\vartheta = \pi - \arctg 2; \varphi = \pi/5; 3\pi/5; \pi; 7\pi/5; 9\pi/5.$$

Квадратурную формулу, инвариантную относительно G_{XX}^* и точно интегрирующую все многочлены до порядка n ,

запишем в виде

$$I(f) = 1/(4\pi) \int_{S_2} f(s) ds \approx S_n(f) = a \sum_{i=1}^{12} f(A_i) + \\ + b \sum_{i=1}^{30} f(B_i) + c \sum_{i=1}^{20} f(C_i) + \sum_{j=1}^k d_j \sum_{i=1}^{60} f(D_{ji}), \quad (1)$$

где узлы A_i — вершины вписанного в сферу S_2 икосаэдра, узлы B_i — проекции на S_2 середин ребер икосаэдра, узлы C_i — проекции на S_2 центров граней икосаэдра, узлы $D_{ji} \in S_2$ и проекции узлов D_{ji} на икосаэдр находятся либо на ребрах икосаэдра, либо на медианах треугольников, являющихся гранями икосаэдра; наконец, числа a, b, c, d_j — веса, соответствующие узлам A_i, B_i, C_i, D_{ji} .

В силу теоремы 1 С. Л. Соболева [2], квадратурная формула (1), точно интегрирующая все инвариантные относительно G_{XX}^* многочлены до порядка n , будет точно интегрировать и все многочлены до порядка n .

Все инвариантные относительно G_{XX}^* многочлены до 29 порядка являются линейными комбинациями многочленов $1, \alpha, \beta, \alpha^2, \alpha\beta, \alpha^3, \beta^2, \alpha^2\beta, \alpha^4, \alpha\beta^2, \alpha^3\beta$, где

$$\alpha = 5x^4z^2 + 5y^4z^2 + z^6 + 10x^2y^2z^2 - 5x^2z^4 - 5y^2z^4 + \\ + 2x^5z + 10xy^4z - 20x^3y^2z, \quad (2)$$

и

$$\beta = (4x^2 - 6xz + z^2)(x^4 + 5y^4 + z^4 + 2x^3z - 2xz^3 - \\ - 10x^2y^2 - x^2z^2 - 30xy^2z - 25y^2z^2)(x^4 + 5y^4 + z^4 - \\ - 8x^3z + 8xz^3 - 10x^2y^2 + 14x^2z^2 - 10y^2z^2) \quad (3)$$

— инвариантные относительно G_{XX}^* многочлены 6 и 10 порядка соответственно [2].

Для получения квадратур мы перейдем к сферическим координатам (ϑ, φ) , считая $r = 1$.

Нам надо найти в (1) значения весов a, b, c, d_j и координаты узлов D_{ji} ; достаточно знать координаты для каждого j только одного из узлов D_{ji} , который мы обозначим через D_j . Для квадратур вида (1) узел D_j удобно взять с координатами $(\vartheta_j; 0)$. Если ввести переменную

$$t = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \sin^2 \vartheta, \quad (4)$$

то многочлены α , β при $\varphi = 0$ перейдут в многочлены

$$\alpha(t) = 1 - 2t^2 - t^3, \quad (5)$$

$$\beta(t) = 1 - 10t^2 - 5t^3 + 20t^4 + 12t^5. \quad (6)$$

Можно показать, что

$$a = -(5/2^8) \sum_{j=1}^k (t_j^2 + t_j - 1)(3t_j + 4)^2 (65t_j^2 + 8t_j - 16) d_j, \quad (7)$$

$$b = -(2/25) \sum_{j=1}^k t_j^2 (3t_j + 4)^2 (13t_j^2 + 8t_j - 8) d_j, \quad (8)$$

$$c = -(3^7(2^8 \cdot 5^2)) \sum_{j=1}^k t_j^2 (t_j^2 + t_j - 1) (13t_j^2 + 48t_j + 32) d_j. \quad (9)$$

Таким образом, для получения квадратурной формулы (1) нам надо найти t_j , d_j , $j = 1, \dots, k$. Считая, что (1) точно для всех инвариантных многочленов до порядка k , приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно t_j , d_j , $j = 1, \dots, k$.

2. Система уравнений для получения квадратуры 29 порядка имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^4 \bar{d}_j t_j^k = c_k, \quad k = 0, 2, 3, \dots, 8, \quad (10)$$

где

$$\bar{d}_j = 9009/160 \cdot t_j^2 \cdot (t_j^2 + t_j - 1) \cdot (3t_j + 4)^2 d_j,$$

$$c_0 = 1, \quad c_2 = 8/17; \quad c_3 = -96/323; \quad c_4 = 128/323,$$

$$c_5 = -3072/7429; \quad c_6 = 4096/7429;$$

$$c_7 = -16384/22287; \quad c_8 = 229376/215441.$$

Решение системы уравнений (10) сводится к решению одного из двух уравнений 4-й степени [7]:

$$t^4 + 2(27 - \sqrt{69})/29 t^3 - 32\sqrt{69}/261 t^2 - (64/87)t + 256\sqrt{69}/6003 = 0, \quad (11)$$

$$t^4 + (2(27 + \sqrt{69})/29)t^3 + (32\sqrt{69}/261)t^2 - (64/87)t - 256\sqrt{69}/6003 = 0. \quad (12)$$

Численно решив уравнение (11), получим квадратуру с весами:

$$a = 0,002964194398464004; \quad b = -0,001904672204695065;$$

$$c = 0,003861884571290004; \quad d_1 = 0,004634703943700789;$$

$$d_2 = 0,003779820989879175; \quad d_3 = 0,003546078083588158;$$

$$d_4 = 0,003778266015056609.$$

Приведем еще координату z_j узлов $D_j = (\sqrt{1 - z_j^2}; 0; z_j)$:

$$z_1 = -0,6112537383570408; \quad z_2 = -0,9091923316244851;$$

$$z_3 = -0,9785124301222476; \quad z_4 = 0,9358105831263126.$$

Решение уравнения (12) не дает нам квадратуры с узлами, лежащими на сфере S_2 .

Итак, удастся получить одну квадратурную формулу 29 порядка с 302 узлами, инвариантную относительно G_{XX}^* .

3. В случае квадратур 19 порядка есть три уравнения для определения t_1, t_2, d_1, d_2 , соответствующие полиномам $\alpha^2, \alpha\beta, \alpha^3$. Еще одно уравнение получим, если положим один из весов, например вес b , равным нулю. В результате приходим к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^2 (t_j^2 + t_j - 1) t_j^k \bar{d}_j = c_k, \quad k = 0, 2, 3,$$

$$\sum_{j=1}^2 (13t_j^2 + 8t_j - 8) \bar{d}_j = 0; \quad (13)$$

здесь $\bar{d}_j = (9009/160)t_j^2(3t_j + 4)^2 d_j$ и $c_0 = 1, c_2 = 8/17, c_3 = -96/323$.

Эта система сводится к системе двух уравнений в симметричных функциях ($\sigma_1 = t_1 + t_2; \sigma_2 = t_1 t_2$):

$$152\sigma_1^2 + 96\sigma_1 - 323\sigma_2^2 - 152\sigma_2 = 0, \quad (14)$$

$$323\sigma_2^2 + 323\sigma_1\sigma_2 - 228\sigma_1^2 + 874\sigma_2 - 168\sigma_1 + 228 = 0,$$

решение которой проводится стандартным методом и приводит к уравнению 4-й степени

$$5946753\sigma_2^4 + 7511688\sigma_2^3 - 6211936\sigma_2^2 - 9805824\sigma_2 - 2654208 = 0 \quad (15)$$

Численно решив это уравнение, получим две квадратуры со 152 узлами:

1 квадратура

$$a = 0,0071832689107291355,$$

$$c = 0,0084548699947574088,$$

$$d_1 = 0,0077804336033250811,$$

$$d_2 = 0,0046312892829432888,$$

$$z_1 = -0,9500659379814119924,$$

$$z_2 = 0,8801342767336557085,$$

2 квадратура

$$a = 0,0060257571531834738,$$

$$c = -0,0330031861720944218,$$

$$d_1 = 0,0185624195313372718,$$

$$d_2 = 0,0079001577620575074,$$

$$z_1 = -0,723748022321041516,$$

$$z_2 = 0,9543133626271589147.$$

Узлы D_j в обеих квадратурах имеют координаты

$$D_j = (\sqrt{1 - z_j^2}; 0; z_j).$$

Аналогично, считая, что вес $c = 0$, приходим к уравнению

$$73343287\sigma_2^4 - 53416448\sigma_2^3 - 80041984\sigma_2^2 + 37433344\sigma_2 + 24854528 = 0 \quad (16)$$

и получаем еще две квадратуры со 162 узлами:

1 квадратура	2 квадратура
$a = 0,0044277158666139429,$	$a = 0,0065592056855728819,$
$b = 0,0064886923808814116,$	$b = -0,0410614184224049457,$
$d_1 = 0,0059559636769652427,$	$d_1 = 0,0275974467576534596,$
$d_2 = 0,0065808136259379296,$	$d_2 = 0,0082880879831011035,$
$z_1 = 0,965730535281076754,$	$z_1 = -0,5986217920058734493,$
$z_2 = -0,8893521615592300583,$	$z_2 = 0,9512262767002591579.$

Здесь, как и ранее, $D_j = (\sqrt{1 - z_j^2}; 0; z_j)$.

Наконец, если $a = 0$, то задача нахождения квадратуры сводится к решению уравнения

$$29733765\sigma_2^8 + 20031168\sigma_2^7 + 6615040\sigma_2^6 + 1245184\sigma_2^5 + 212992\sigma_2^4 = 0. \quad (17)$$

Так как уравнение (17) не имеет нетривиальных действительных решений, то квадратур с 170 узлами, инвариантных относительно G_{XX}^* , нет.

Итак, удалось получить четыре новые квадратуры 19 порядка и одну квадратуру 29 порядка, инвариантные относительно группы G_{XX}^* .

Автор благодарит В. И. Лебедева за интерес к работе и неоднократное обсуждение результатов.

Институт атомной
энергии им. И. В. Курчатова

Поступило
6.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Люстерник Л. А., Диткин В. А., Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере, Сб., Вычислительная математика и вычислительная техника, № 1 (1953), 3—31.
- [2] Соболев С. Л., О формулах механических кубатур на сфере, Сиб. матем. ж., 3, № 5 (1962), 769—796.
- [3] Stroid A. N., Approximate calculation of multiple integrals, 1974, Englewood Cliffs, XIII.
- [4] McLaren D. A., Optimal numerical integration on a sphere, Math. Comp., 83 (1963), 361—383.
- [5] Салухов Г. Н., Об одном способе повышения эффективности кубатурных формул С. Л. Соболева на сфере, Сб.,

- Вопросы вычислительной и прикладной математики, Тр. ин-та кибернетики АН Уз. ССР, № 8 (1971), 3—9.
- [6] К о н я е в С. И., Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра, Препринт ИАЭ-2516, М., 1975.
- [7] К о н я е в С. И., Инвариантные формулы интегрирования на сфере, Препринт ИАЭ-2553, М., 1975.
- [8] Л е б е д е в В. И., Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса — Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра, Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 15, № 1 (1975).
- [9] Л е б е д е в В. И., Об одном способе интерполяции в n -мерном пространстве по произвольным узлам и некоторым квадратурным формулам, ВЦ СОАН СССР, препринт, вып. 10, 1975.
- [10] Л е б е д е в В. И., О квадратурах на сфере, Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 16, № 2 (1976).
- [11] М и ш и н а А. П., П р о с к у р я к о в И. В., Высшая алгебра, М., Физматгиз, 1962.