К. Н. Лунгу, О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов,
Сиб. матем. журн., 1984, том 25, номер 2, 151–160

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXV, № 2 МАРТ — АПРЕЛЬ 1984

УДК 517.53

К. Н. ЛУНГУ

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ПОЛЮСОВ

§ 1. Введение

Через $\mathscr{R}_n$ обозначим совокупность всех рациональных функций порядка не выше n, а через $\mathscr{R}_{n,k}$ ($\widehat{\mathscr{R}}_{n,k}$) совокупность всех рациональных функций $r \in \mathscr{R}_n$, имеющих не более чем k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ геометрически различных полюсов в конечной (расширенной) комплексной плоскости $\mathbf{C}$ ($\widehat{\mathbf{C}}$). Для любой функции f, непрерывной на отрезке $\Delta = [0, 1]$, положим

$$\rho_{n,k} = \rho_{n,k}(f, \Delta) = \inf_{r \in \mathscr{R}_{n,k}} \|f - r\| \tag{1}$$

($\|\cdot\|$ обозначает sup-норму на Δ); аналогично определяется $\widehat{\rho}_{n,k}$ (по классу $\widehat{\mathscr{R}}_{n,k}$). Класс $\mathscr{R}_{n,0}$ совпадат с классом P_n всех алгебраических полиномов степени не выше n, $\rho_{n,0} = e_n$ — наилучшее приближение полиномами, а $\mathscr{R}_{n,n} = \widehat{\mathscr{R}}_{n,n} = \mathscr{R}_n$ и $\rho_{n,n} = \widehat{\rho}_{n,n} = \rho_n$ — наилучшее приближение рациональными функциями порядка не выше n. В работах [1] и [2] была доказана

Теорема А. *Пусть f имеет на Δ модуль непрерывности ω и допускает ограниченное аналитическое продолжение в круг $|z-1| < 1$. Тогда при любом фиксированном $k \geqslant 1$ справедливы соотношения*

$$\rho_{n,k} = O\left[\omega\left(\frac{\log n}{n}\right)^{4k+2}, \quad n \to \infty,\right.$$

$$\widehat{\rho}_{n,k} = O\left[\omega\left(\frac{\log n}{n}\right)^{4k}\right], \quad n \to \infty.$$

Цель настоящей статьи — оценить снизу величины $\rho_{n,k}$ ($\widehat{\rho}_{n,k}$) при условии, что f непрерывна на $[0, 1]$ и допускает многозначное аналитическое продолжение в кольцо $0 < |z| < R$, $R > 1$, причем $z = 0$ является изолированной точкой ветвления f. Обозначим через f^+ (f^-) аналитическое продолжение f с интервала $(0, 1)$ в указанное кольцо в положительном (отрицательном) направлении относительно точки $z = 0$. Положим

$$\tau(z) = \tau_f(z) = |f^+(z) - f^-(z)|, \quad z \in [-1, 0];$$

заметим, что для многих функций величины $\tau(-\delta)$ и $\omega(\delta)$ при $\delta \to +0$ имеют одинаковый порядок малости.

Теорема В. *При любом фиксированном $k \geqslant 1$ имеют место соотношения*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\rho_{n,k}}{\tau^2[-(1/4n)^{4k+2}]} > c_1, \tag{2}$$

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\rho_{n,k}}{\tau^2[-(1/4n)^{4k}]} > c_2 \tag{3}$$

(c_1 и c_2 — положительные постоянные).

Из теорем А и В получаем (ниже через $c_3, c_4, \ldots$ обозначаются положительные величины, не зависящие от n)

Следствие 1. *Если $f(x)=x^\alpha$, $\alpha>0$ — нецелое, то при всех $k\geqslant 1$ и $n>k$ имеем*

$$\frac{c_3}{n^{4(2k+1)\alpha}}<\rho_{n,k}<c_4\left(\frac{\log n}{n}\right)^{2(2k+1)\alpha},$$

$$\frac{c_5}{n^{8k\alpha}}<\hat{\rho}_{n,k}<c_6\left(\frac{\log n}{n}\right)^{4k\alpha}.$$

Следствие 2. *Если $f(x)=\log^{-\beta}\frac{e}{x}$, $\beta>0$, то при всех $k\geqslant 1$ и $n>k$ имеем*

$$\frac{c_7}{\log^\beta n}<\rho_{n,k}<\frac{c_8}{\log^\beta(n/\log n)}$$

(аналогичное неравенство имеет место и для $\hat{\rho}_{n,k}$).

Доказательство теоремы В (см. § 3) проводится методом А. А. Гончара, примененном в работе [3], и основан на оценках роста рациональных функций с фиксированным числом полюсов (§ 2). В § 3 приводятся также некоторые оценки снизу величин $\rho_{n,k}$ $(\hat{\rho}_{n,k})$ для так называемых канонических функций.

§ 2. Вспомогательные леммы

1. Через $g(z, E, \zeta)$ обозначим функцию Грина для внешности замкнутого множества E с особенностью в точке ζ. Пусть $[a, b]$ и $[c, d]$ — два непересекающихся отрезка действительной прямой $-\infty<a<b<c<<d<+\infty$.

Лемма 1. *Пусть $\zeta\notin[c, d]$. Тогда на отрезке $[c, d]$ существует точка t такая, что для всех $x\in[c, d]$ имеет место неравенство*

$$g(x, [a, b], \zeta)<g(x, [a, b], t). \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через $w=\varphi(z)$ функцию, конформно отображающую внешность отрезка $[a, b]$ на внешность круга $K_1=\{w:|w|\leqslant 1\}$ так, что $\varphi(\infty)=\infty$, $\varphi'(\infty)>0$. Образом отрезка $[c, d]$ будет отрезок $[c_1, d_1]$ и $1<c_1<d_1<+\infty$. Положим $\zeta_1=\varphi(\zeta)$. Тогда (см., например, [5, гл. V])

$$g(z,[a,b],\zeta)=g(w,K_1,\zeta_1)=\log\left|\frac{1-\bar{\zeta}_1 w}{w-\zeta_1}\right|. \tag{5}$$

Очевидно, что $\zeta_1\notin[c_1, d_1]$, и нам необходимо доказать, что существует точка $t_1\in[c_1, d_1]$ такая, что $(w=u+iv)$

$$\left|\frac{1-\bar{\zeta}_1 u}{u-\zeta_1}\right|<\left|\frac{1-t_1 u}{t_1-u}\right|,\quad u\in[c_1, d_1]. \tag{6}$$

Пусть $\zeta_1=Re^{i\theta}$. Покажем, что если $u\in[c_1, d_1]$, то

$$\left|\frac{1-Rue^{i\theta}}{u-Re^{i\theta}}\right|=\left|\frac{Ru-e^{i\theta}}{u-Re^{i\theta}}\right|<\left|\frac{1-Ru}{R-u}\right|,\quad \theta\neq 0. \tag{7}$$

Равенство в (7) очевидно, а неравенство проверяется непосредственно сведением его сначала к неравенству

$$(u^2R^2-2uR+1)(u^2+R^2-2uR\cos\theta)>$$
$$>(u^2+R^2-2uR)(u^2R^2-2uR\cos\theta+1),$$

а затем, раскрывая скобки, после несложных преобразований приходим к верному неравенству

$$uR(u^2-1)(R^2-1)(1-\cos\theta)>0.$$

Далее рассмотрим три логические возможности.

а). Пусть $R\in[c_1, d_1]$. Тогда положим $t_1=R$ и (6), очевидно имеет место.

б). Если $R\in(1, c_1)$, то положим $t_1=c_1$. Очевидное неравенство

$$\left|\frac{1-uR}{R-u}\right|<\left|\frac{1-c_1u}{u-c_1}\right|, \quad u\in[c_1, d_1],$$

и (7) приводят к (6).

в). Если $R>d_1$, то положим $t_1=d_1$. Очевидное неравенство

$$\left|\frac{1-uR}{u-R}\right|<\left|\frac{1-d_1u}{u-d_1}\right|, \quad u\in[c_1, d_1],$$

и (7) опять приводят к (6). Остается брать в качестве t прообраз точки t_1 при отображении $w=\varphi(z)$. Лемма 1 доказана.

Всюду в дальнейшем $\varepsilon_0=\varepsilon_0(k)=(1/8)^{4k}$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Лемма 2. *Пусть* $0\leqslant\gamma<\alpha\leqslant1$, $\alpha-\gamma=h$, $1/2k\leqslant h\leqslant 1/(2k-1)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{3}{2}\varepsilon^{h/2}<g(\varepsilon^\alpha, [-1, 0], \varepsilon^\gamma)<4\varepsilon^{h/2}. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем $g(\varepsilon^\alpha, [-1, 0], \varepsilon^\gamma)=\log|y+\sqrt{y^2-1}|$, где $y=\dfrac{2(1+\varepsilon^\alpha)}{1-\varepsilon^{\alpha-\gamma}}-1$ и ветвь корня выбрана так, что $\sqrt{y^2-1}>0$ при $y>1$. Оценка сверху в (8) вытекает из легкопроверяемых неравенств $y<1+4{,}5\varepsilon^h$, $y+\sqrt{y^2-1}<1+4{,}5\varepsilon^{h/2}$, $\log(1+t)<t$ при $t>0$. Оценка снизу в (8) следует из неравенств $y>1+2\varepsilon^h/(1-\varepsilon^h)$, $y+\sqrt{y^2-1}>$ $>1+2\varepsilon^{h/2}$, $\log(1+t)>{}^3/_4t$ $(0<t<1/2)$.

Замечание. Функция Грина $g(z, E, \zeta)$ симметрична относительно переменных z и ζ (см., например, [5, гл. V]), поэтому (8) имеет место и в том случае, если α и γ поменять местами. Этим замечанием будем пользоваться при доказательстве лемм 3 и 4, не оговаривая это особо.

Лемма 3. *Пусть* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ — *различные точки в* $\mathbf{C}$, $n>k$ — *целое число. Тогда при любых целых положительных* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *таких, что* $n_1+\ldots+n_k=n$, *имеет место неравенство*

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]}\left\{\sum_{j=1}^k n_jg(x,[-1, 0],\zeta_j)\right\}<4n\varepsilon^{\frac{1}{4k}}. \tag{9}$$

Оценка (9) *точна в том смысле, что если* $n_j\geqslant[n/k]$ (*всюду в дальнейшем* $[n/k]$ *обозначает целую часть числа* n/k) *и* $n_1+\ldots+n_k=n$, *то*

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]}\left\{\sum_{j=1}^k n_jg\left(x,[-1,0],\varepsilon^{\frac{2j-1}{2k}}\right)\right\}>\frac{3}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\varepsilon^{\frac{1}{4k}}. \tag{10}$$

Доказательство. Положим $g(x)=\sum\limits_{j=1}^k n_jg(x,[-1,0],\zeta_j)$. Чтобы не усложнять обозначений, будем предполагать (см. лемму 1), что все точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ принадлежат отрезку $[\varepsilon, 1]$. Рассмотрим разбиение $\varepsilon=$ $=x_{k+1}<x_k<\ldots<x_2<x_1<x_0=1$ отрезка $[\varepsilon, 1]$ на $(k+1)$ частей, где $x_i=\varepsilon^{(2i-1)/2k}$, $i=1, 2, \ldots, k$. Ясно, что хотя бы один интервал (x_{i+1}, x_i) не содержит ни одной точки множества $\{\zeta_j\}_{j=1}^k$. В зависимости от номера этого интервала будем различать три случая.

а). В промежутке $[\varepsilon, \varepsilon^{(k-1)/2k})$ нет ни одной точки ζ_j. Функцию $g(x)$ вычислим в точке $x=\varepsilon$. Из монотонности функции Грина по переменному ζ_j выводим оценки

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]} g(x)\leqslant g(\varepsilon) < \sum_{j=1}^{k} n_j g\left(\varepsilon, [-1,0], \varepsilon^{\frac{2k-1}{2k}}\right) = ng\left(\varepsilon, [-1,0], \varepsilon^{\frac{2k-1}{2k}}\right).$$

Лемма 2 с $\alpha=1$, $\gamma=(2k-1)/2k$, $h=1/2k$ позволяет из этого неравенства получить (9).

б). **Некоторый интервал** $(\varepsilon^{(2i+1)/2k}, \varepsilon^{(2i-1)/2k})$ (i **фиксировано,** $1\leqslant i\leqslant \leqslant k-1$) **не содержит ни одной точки** ζ_j**. В таком случае функцию** $g(x)$ **вычислим в геометрической середине этого интервала, т. е. в точке** $x= =\varepsilon^{i/k}$**. Как и выше, будем иметь**

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]} g(x)\leqslant g\left(\varepsilon^{\frac{i}{k}}\right) = \sum_{j=1}^{k} n_j g\left(\varepsilon^{\frac{i}{k}}, [-1,0], \zeta_j\right) <$$

$$< \sum_{\zeta_j\geqslant\varepsilon^{\frac{2i-1}{2k}}} n_j g\left(\varepsilon^{\frac{i}{k}}, [-1,0], \varepsilon^{\frac{2i-1}{2k}}\right) + \sum_{\zeta_j<\varepsilon^{\frac{2i+1}{2k}}} n_j g\left(\varepsilon^{\frac{i}{k}}, [-1,0], \varepsilon^{\frac{2i+1}{k}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant ng\left(\varepsilon^{\frac{i}{k}}, [-1,0], \varepsilon^{\frac{2i-1}{2k}}\right).$$

К правой части полученного неравенства применим лемму 2 с $\alpha=i/k$, $\gamma=(2i-1)/2k$, $h=1/2k$, в результате чего приходим к (9).

в). Если, наконец, $\zeta_j\notin[\varepsilon^{1/2k}, 1]$, то $g(x)$ вычислим в точке $x=1$. Имеем

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]} g(x)\leqslant g(1) = \sum_{j=1}^{k} n_j g(1, [-1,0], \zeta_j) <$$

$$< \sum_{j=1}^{k} n_j g\left(1, [-1,0], \varepsilon^{1/2k}\right) = ng\left(\varepsilon^{1/2k}, [-1,0], 1\right).$$

Лемма 2 с $\alpha=1/2k$, $\gamma=0$, $h=1/2k$ опять приводит к (9).

Докажем теперь (10). Нетрудно заметить, что функция

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k} n_j g\left(x, [-1,0], \varepsilon^{\frac{2j-1}{2k}}\right), \quad n_j>0,$$

имеет на отрезке $[\varepsilon, 1]$ $k+1$ локальный минимум. Если $n_j\geqslant[n/k]$, то каждый из этих минимумов больше чем каждое из чисел

$$[n/k]g(1, [-1, 0], \varepsilon^{1/2k}),$$

$$[n/k]g(\varepsilon^{i/k}, [-1, 0], \varepsilon^{(2i-1)/2k}),\quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Эти величины оценим по лемме 2 (см. оценку снизу в (8)). В первом случае имеем $\alpha=1/2k$, $\gamma=0$, $h=1/2k$, в остальных $\alpha=i/2k$, $\gamma=(2i-1)/2k$, $h=1/2k$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Лемма 4. *Пусть* $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$ — *различные точки в* $\mathbf{C}$, $n>k$ — *целое число. Тогда при любых целых положительных* $n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k$ *таких, что* $n_1+\ldots+n_k=n$, *имеет место неравенство* ($\zeta_k=\infty$)

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]}\left\{\sum_{j=1}^{k} n_j g(x, [-1,0], \zeta_j)\right\} < 4n\varepsilon^{1/(4k-2)}. \tag{11}$$

Оценка (11) *точна в том смысле, что если* $n_1+\ldots+n_k=n$, $n_j\geqslant[n/k]$, $j=1, 2, \ldots, k$, *то*

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]}\left\{\sum_{j=1}^{k} n_j g\left(x, [-1,0], \tilde\zeta_j\right) > \frac{3}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\varepsilon^{1/(4k-2)}\right. \tag{12}$$

(здесь $\tilde\zeta_j=\varepsilon^{2j/(2k-1)}$, $j=1, 2, \ldots, k-1$, $\tilde\zeta_k=\infty$).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3, поэтому детали опускаются. Отрезок $[\varepsilon, 1]$ разделим на k частей точками $\varepsilon = x_k < x_{k-1} < \ldots < x_2 < x_1 < x_0 = 1$, где $x_i = \varepsilon^{2i/(2k-1)}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

а). Если в промежутке $[\varepsilon, \varepsilon^{(2k-2)/(2k-1)})$ нет точек ζ_j, то функцию

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} n_j g(x, [-1, 0], \zeta_j)$$

вычислим в точке $x = \varepsilon$.

б). Если интервал $(\varepsilon^{(2k-2i+2)/(2k-1)}, \varepsilon^{(2k-2i)/(2k-1)})$ при некотором i $(2 \leqslant i \leqslant k)$ не содержит ни одной из точек ζ_j, то $g(x)$ вычислим в точке $x = \varepsilon^{(2k-2i+1)/(2k-1)}$. Учитывая лемму 2 с надлежащими α, γ, $h = 1/(2k-1)$ в каждом случае, а также что $g(x, [-1, 0], \infty) = \log|2x + 1 + 2\sqrt{x(1+x)}|$, получаем нужное неравенство (11). Неравенство (12) доказывается аналогично (10) с использованием нижней оценки (8).

2. Пусть $r_n \in \mathcal{R}_n$ — произвольная рациональная функция такая, что $|r_n(x)| \leqslant M < +\infty$, $x \in [-1, 0]$. Положим

$$\sigma(r_n, \varepsilon) = \frac{1}{M} \min_{x \in [\varepsilon, 1]} |r_n(x)|, \quad \sigma_n(\varepsilon) = \sup_{r_n \in \mathcal{R}_n} \sigma(r_n, \varepsilon). \tag{13}$$

Величины $\sigma(r_n, \varepsilon)$ и $\sigma_n(\varepsilon)$, определенные в общем случае для произвольных E (вместо отрезка $[-1, 0]$) и F (вместо отрезка $[\varepsilon, 1]$), $E \cap F = \varnothing$, тесно связаны с понятием емкости конденсатора (E, F) (см. [3, 6]) и модулем двусвязной области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$ (см. [4, 6]), если E и F — континуумы, и находят широкое применение в задачах, связанных с рациональной аппроксимацией аналитических функций. По аналогии с (13) определяем величины $\sigma(r_{n,k}, \varepsilon)$ и $\sigma_{n,k}(\varepsilon)$ для $r_{n,k} \in \mathcal{R}_{n,k}$ и $\widehat{\sigma}(r_{n,k}, \varepsilon)$, $\widehat{\sigma}_{n,k}(\varepsilon)$ для $r_{n,k} \in \widehat{\mathcal{R}}_{n,k}$.

Лемма 5. *Справедливы следующие неравенства*:

$$\frac{1}{2} \exp\left(\frac{3}{2}\left[\frac{n}{k}\right] \varepsilon^{1/(4k+2)}\right) < \sigma_{n,k}(\varepsilon) < \exp\left(4n\varepsilon^{1/(4k+2)}\right), \tag{14}$$

$$\frac{1}{2} \exp\left(\frac{3}{2}\left[\frac{n}{k}\right] e^{1/4k}\right) < \sigma_{n,k}(\varepsilon) < \exp\left(4n\varepsilon^{1/4k}\right). \tag{15}$$

Докажем сначала правую часть (14). Хорошо известно следующее неравенство (см., например, [7, с. 303]), выражающее рост рациональной функции. Если $r_n \in \mathcal{R}_n$ и

$$|r_n(x)| \leqslant M, \; x \in [-1, 0],$$

то

$$|r_n(z)| \leqslant M \exp \sum_{j=1}^{m_n} g(z, [-1, 0], \zeta_j), \; z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 0].$$

(ζ_j — полюс r_n, m_n — число полюсов r_n с учетом кратностей). Если $r_{n,k} \in \mathcal{R}_{n,k}$, то $r_{n,k}$ может иметь k полюсов в $\mathbb{C}$ и, возможно, полюс в бесконечности. Из приведенной оценки следует

$$\sigma(r_{n,k}, \varepsilon) \leqslant \min_{z \in [\varepsilon, 1]} \left\{ \exp \sum_{j=1}^{k+1} n_j g(z, [-1, 0], \zeta_j) \right\}, \tag{16}$$

где ζ_j — полюс $r_{n,k}$ кратности n_j, $\zeta_{k+1} = \infty$, $n_{k+1} \geqslant 0$. К правой части (16) применим лемму 4 с k вместо $k-1$. Неравенство (4) приводит к требуемой оценке.

Правая часть (15) доказывается аналогично. Нужно только иметь в виду, что рациональная функция $r_{n,k} \in \widehat{\mathcal{R}}_{n,k}$ может иметь, вообще говоря, k конечных полюсов, поэтому следует применить оценку (9) леммы 3.

Докажем теперь левую часть (15). Для этого построим рациональную функцию, для которой это неравенство имеет место.

Положим

$$L_j(z) = L(z, x_j) = \frac{(1+2x_j)z + x_j}{x_j - z}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

где $x_j = \varepsilon^{(2j-1)/2k}$. Каждая из функций $L_j(z)$ отображает отрезок $[-1, 0]$ в отрезок $[-1, 1]$ и $L_j(x_j) = \infty$. Пусть T_m обозначает полином Чебышева степени относительно отрезка $[-1, 1]$, т. е.

$$T_m(z) = \frac{1}{2}\left[\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)^m + \left(z - \sqrt{z^2-1}\right)^m\right].$$

Введем в рассмотрение рациональную функцию

$$r_{n,k}(z) = T_{n_1}[L_1(z)]\, T_{n_2}[L_2(z)] \ldots T_{n_k}[L_k(z)],$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, $n_j \geqslant [n/k]$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что $r_{n,k} \in \widehat{\mathscr{R}}_{n,k}$ и $|r_{n,k}(z)| \leqslant 1$, $z \in [-1, 0]$. Заметим еще, что модуль каждого сомножителя, содержащегося в $r_{n,k}(z)$, больше единицы при $z \in [\varepsilon, 1]$. Модуль $T_{n_j}[L_j(z)]$ будем оценивать на отрезке $\Delta_j = [\varepsilon^{j/k}, \varepsilon^{(j-1)/k}]$, $j = 1, 2, \ldots, k$. При всех $j = 1, 2, \ldots, k$ имеют место неравенства

$$L_j(\varepsilon^{(j-1)/k}) < -(1 + 2\varepsilon^{1/2k}), \quad L_j(\varepsilon^{j/k}) > 1 + 2\varepsilon^{1/2k},$$

означающие, что если $z \in \Delta_j$, то

$$|T_m[L_j(z)]| > T_m(1 + 2\varepsilon^{1/2k}) > \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon^{1/4k})^m > \frac{1}{2}\exp\left(\frac{3}{2}\varepsilon^{1/4k} m\right).$$

Так как $|r_{n,k}(z)| > T_{n_j}[L_j(z)]$, $z \in \Delta_j$, то из полученной выше оценки с $m = n_j \geqslant [n/k]$ получаем левую часть (15).

Для доказательства левой части (14) воспользуемся отображениями $L_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, где $x_j = \varepsilon^{2j/(2k+1)}$. Положим еще $L_{k+1}(z) = 2z + 1$. Далее построим рациональную функцию

$$r_{n,k}(z) = T_{n_1}[L_1(z)]\, T_{n_2}[L_2(z)] \ldots T_{n_{k+1}}[L_{k+1}(z)]$$

класса $\mathscr{R}_{n,k}$ (она имеет k конечных полюсов и полюс в бесконечности), которая удовлетворяет левой части (15). Лемма 5 полностью доказана.

3. В этом пункте сделаем несколько замечаний относительно полученных в предыдущем пункте оценок сверху (14) и (15) для $\sigma(r_{n,k}, \varepsilon)$ и $\widehat{\sigma}(r_{n,k}, \varepsilon)$ применительно к рациональным функциям с действительными коэффициентами.

1) Предположим, что полюсы рациональной функции $r_{n,k} \in \mathscr{R}_{n,k}$ расположены в попарно сопряженных точках и $r_{n,k}$, возможно, имеет полюс в бесконечности. Тогда имеет место оценка

$$\sigma(r_{n,k}, \varepsilon) < \exp(4n\varepsilon^{1/(2k+2)}). \tag{17}$$

В самом деле, в таком случае k должно быть четным числом, $k = 2m$. По лемме 1 конечные полюсы могут быть заменены m точками отрезка $[\varepsilon, 1]$ так, что при этом соответствующие функции Грина увеличатся. Имея в виду оценку (11) с $m = k/2$ вместо $k-1$, получаем (17).

2) Пусть $r_{n,k} \in \widehat{\mathscr{R}}_{n,k}$, имеет полюсы в попарно сопряженных точках и $r_{n,k}(\infty) \neq \infty$. Тогда имеет место оценка

$$\sigma(r_{n,k}, \varepsilon) < \exp(4n\varepsilon^{1/2k}). \tag{18}$$

В этом случае $k = 2m$ — число четное и рассуждения предыдущего пункта позволяют получить требуемую оценку после применения неравенства (9) леммы 3 с $m = k/2$ вместо k.

3) Пусть $r_{n,k} \in \widehat{\mathscr{R}}_{n,k}$, имеет полюсы в попарно сопряженных точках и хотя бы один полюс на вещественной оси вне отрезка $[\varepsilon, 1]$. Тогда имеет место оценка (17).

Худший случай этого предположения соответствует $k = 2m+1$. По лемме 1 эти точки могут быть заменены $(m+1)$ точками на отрезке $[\varepsilon, 1]$ с соответствующими выводами. Затем можно применить лемму 3 с $m+1 = (k+1)/2$ вместо k.

§ 3. Оценки снизу для $\rho_{n,k}$ и $\widehat{\rho}_{n,k}$

1. Доказательство теоремы В. Будем придерживаться обозначений предыдущих параграфов. Пусть $\mathscr{D}$ обозначает область, полученную из единичного круга $|z| < 1$ разрезом по отрезку $[0, 1]$. Этот отрезок будем рассматривать как состоящий из двух берегов — верхний $[0, 1]^+$ и нижний $[0, 1]^-$. Через $\omega^{\pm}(z) = \omega(z, [0, 1]^{\pm}, \mathscr{D})$ будем обозначать гармоническую меру соответствующего берега разреза относительно области $\mathscr{D}$. Фиксируем произвольное число ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, и обозначим $\mathscr{D}_\varepsilon = \mathscr{D} \setminus \{|z| \leqslant \varepsilon\}$. Область $\mathscr{D}_\varepsilon$ односвязная, а каждая из функций f^+ и f^- голоморфна в $\mathscr{D}_\varepsilon$ и непрерывна вплоть до границы. Обозначим $M_\varepsilon^{\pm} = \sup\{|f^{\pm}(z)|,\ z \in \mathscr{D}_\varepsilon\}$, $M_\varepsilon = \max(M_\varepsilon^+, M_\varepsilon^-)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $M = \sup\limits_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} M_\varepsilon < +\infty$. Будем доказывать сначала соотношение (2). Пусть $r_{n,k}$ обозначает рациональную функцию класса $\mathscr{R}_{n,k}$ такую, что (см. (1))

$$|f(z) - r_{n,k}(z)| \leqslant 2\rho_{n,k}, \quad z \in [0, 1]. \tag{19}$$

Рациональная функция $r_{n,k}$ может иметь, вообще говоря, k конечных полюсов и полюс в бесконечности. Через $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ обозначим конечные полюсы $r_{n,k}$, а через n_j — кратность полюса ζ_j. Положим еще $\zeta_{k+1} = \infty$, $n_{k+1} \geqslant 0$ — кратность этой точки. Имеем $n_1 + \ldots + n_{k+1} \leqslant n$. Пусть $\varphi(z, \zeta)$ означает функцию, конформно отображающую внешность отрезка $[0, 1]$ на внутренность единичного круга так, что $\varphi(\zeta, \zeta) = 0$, $\varphi'(\zeta, \zeta) > 0$. Положим

$$g_n^{\pm}(z) = [f^{\pm}(z) - r_{n,k}(z)] \prod_{j=1}^{k+1} \varphi^{n_j}(z, \zeta_j).$$

Из (19) следует, что

$$|g_n^{\pm}(z)| \leqslant 2\rho_{n,k}, \quad z \in [0, 1]. \tag{20}$$

Далее, если $z \in \mathscr{D}_\varepsilon$, то

$$|g_n^{\pm}(z)| \leqslant |f^{\pm}(z)| \prod_{j=1}^{k+1} |\varphi(z, \zeta_j)|^{n_j} + |r_{n,k}(z)| \prod_{j=1}^{k+1} |\varphi(z, \zeta_j)|^{n_j} \leqslant 3M \tag{21}$$

(здесь мы использовали голоморфность функции $r_{n,k}(z) \prod\limits_{j=1}^{k+1} \varphi^{n_j}(z, \zeta_j)$ в области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$, принцип максимума модуля для этой функции в $\mathscr{D}_\varepsilon$ и неравенство $|r_{n,k}(z)| \leqslant |f(z)| + |f(z) - r_{n,k}(z)| \leqslant 2M$, $z \in [0, 1]$). К функции $g_n^{\pm}(z)$ применим теорему о двух константах (см., например, [5, гл. V]). Из (20) и (21) можем написать неравенство

$$|g_n^{\pm}(z)| \leqslant (2\rho_{n,k})^{\omega^{\pm}(z)} (3M)^{1-\omega^{\pm}(z)}, \quad z \in \overline{\mathscr{D}}_\varepsilon.$$

Отсюда и из определения $g_n^{\pm}(z)$ находим $(z \in \overline{\mathscr{D}}_\varepsilon)$

$$|f^{\pm}(z) - r_{n,k}(z)| \leqslant (2\rho_{n,k})^{\omega^{\pm}(z)} (3M)^{1-\omega^{\pm}(z)} \prod_{j=1}^{k+1} |\varphi(z, \zeta_j)|^{n_j}.$$

Это неравенство может быть переписано в виде $(z \in \overline{\mathscr{D}}_\varepsilon)$

$$|f^{\pm}(z) - r_{n,k}(z)| \leqslant 6M\rho_{n,k}^{\omega^{\pm}(z)} \exp\left\{\sum_{j=1}^{k+1} n_j g(z, [0, 1], \zeta_j)\right\}. \tag{22}$$

Из неравенства $\tau(z) = |f^+(z) - f^-(z)| \leqslant |f^+(z) - r_{n,k}(z)| + |f^-(z) - r_{n,k}(z)|$ и из (22) следует (ниже $\omega(z) = \omega^+(z) = \omega^-(z)$ при $z \in [-1, 0]$)

$$\tau(z) \leqslant 12M\rho_{n,k}^{\omega(z)} \exp\left\{\sum_{j=1}^{k+1} n_j g(z, [0, 1], \zeta_j)\right\}, \quad z \in [-1, -\varepsilon].$$

Отсюда при $z \in [-1, -\varepsilon]$ будем иметь

$$\rho_{n,k} \geqslant \left\{\frac{\tau(z)}{12M} \exp\left[-\sum_{j=1}^{k+1} n_j g(z, [0, 1], \zeta_j)\right\}^{1/\omega(z)}.$$

Левая часть этого неравенства от z и ε не зависит, поэтому в его правой части можно переходить к верхней грани по z, $z \in [-1, \varepsilon]$, и по ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Получаем

$$\rho_{n,k} \geqslant \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \max_{z\in[-1,\varepsilon]} \left\{\frac{\tau(z)}{12M} \exp\left[-\sum_{j=1}^{k+1} n_j g(z, [0, 1], \zeta_j)\right]\right\}^{1/\omega(z)}. \tag{23}$$

Положим

$$u(z) = u(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k+1}) = \left\{\frac{\tau(z)}{12M} \exp\left[-\sum_{j=1}^{k+1} n_j g(z, [0, 1], \zeta_j)\right\}^{1/\omega(z)}.$$

Функция $u(z)$ непрерывна на отрезке $[-1, -\varepsilon]$ (имеем $\lim\limits_{z\to-1+0} u(z) = 0$, и если некоторая точка ζ_j принадлежит отрезку $[-1, -\varepsilon]$, то $\lim\limits_{z\to\zeta_j} g(z, [0, 1], \zeta_j) = 0$). Обозначим

$$L_\varepsilon = \inf_{\{\zeta_j\}} \max_{z\in[-1,-\varepsilon]} u(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k+1}) = \max_{z\in[-1,-\varepsilon]} u(z, \zeta_1^0, \ldots, \zeta_{k+1}^0)$$

(здесь $\zeta_{k+1}^0 = \infty$). Рассматривая функцию $u_0(z) = u(z, \zeta_1^0, \ldots, \zeta_{k+1}^0)$ на отрезке $[-1, -\varepsilon]$, нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

а) Точки $\zeta_1^0, \ldots, \zeta_k^0$ лежат в интервале $(-1, -\varepsilon)$, $-1 < \zeta_1^0 < \ldots < \zeta_k^0 < -\varepsilon$ (это следует из леммы 1).

б) Функция $u_0(z)$ имеет на отрезке $[-1, -\varepsilon]$ $(k+1)$ точек локального максимума. Обозначим эти точки через $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$. Тогда $-1 < x_1 < \zeta_1^0 < x_2 < \ldots < x_k < \zeta_k^0 < x_{k+1} = -\varepsilon$.

в) Соответствующие локальные максимумы функции $u_0(z)$ равны между собой, т. е. $u_0(x_j) = L_\varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots, k+1$.

Таким образом, из (23), определения L_ε и из утверждений, приведенных выше, следует, что

$$\rho_{n,k} \geqslant \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} L_\varepsilon = \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \left\{\frac{\tau(-\varepsilon)}{12M} \exp\left[-\sum_{j=1}^{k+1} n_j g(z, [0, 1], \zeta_j)\right]\right\}^{1/\omega(-\varepsilon)},$$

и из леммы 3 будем иметь

$$\rho_{n,k} \geqslant \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \left\{\frac{\tau(-\varepsilon)}{12M} \exp\left(-4n\varepsilon^{1/(4k+2)}\right)\right\}^{1/\omega(-\varepsilon)}. \tag{24}$$

Если $\varepsilon \to 0$, то $\omega(-\varepsilon) \to 1/2$. Полагая $\varepsilon = \varepsilon_n = (1/4n)^{4k+2}$, из (24) получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\rho_{n,k}}{\tau^2[-(1/4n)^{4k+2}]} \geqslant \frac{1}{(12Me)^2}.$$

Оценка снизу для $\widehat{\rho}_{n,k}$ доказывается совершенно аналогично, в этом случае необходимо пользоваться леммой 3. Теорема B доказана полностью.

2. В этом пункте оценим снизу величины $\rho_{n,k}$ и $\widehat{\rho}_{n,k}$ для так называемых канонических функций; при этом наилучшее приближение ищется в классе $\mathscr{R}_{n,k}$ $(\widehat{\mathscr{R}}_{n,k})$ рациональных функций только с действительными коэффициентами. Канонической будем называть функцию вида (см. [4])

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0], \\ \varphi(x), & x \in [0, 1], \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ — вещественнозначная, непрерывная, неубывающая функция на отрезке $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$.

При любых $k \geqslant 1$ и $n \geqslant k$ $(n > 16)$ справедливы оценки

$$\rho_{n,k}(f_\varphi, [-1, 1]) > {}^1/_8\varphi\left[(1/4n)^{2k+2}\right], \tag{25}$$

$$\widehat{\rho}_{n,k}(f_\varphi, [-1, 1]) > {}^1/_8\varphi\left[(1/4n)^{2k+2}\right], \quad k \text{ — нечетное},$$

$$\widehat{\rho}_{n,k}(f_\varphi, [-1, 1]) > {}^1/_8\varphi\left[(1/4n)^{2k}\right], \quad k \text{ — четное}.$$

Приведем два следствия этих оценок применительно к двум характерным функциям.

а) Пусть $\varphi(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда (ниже c_1, c_2, ...— положительные величины, не зависящие от n)

$$\rho_{n,k}(f_\varphi, [-1, 1]) > c_1/n^{(2k+2)\alpha},$$

$$\widehat{\rho}_{n,k}(f_\varphi, [-1, 1]) > c^2/n^{(2k+2)\alpha}, \quad k \text{ — нечетное},$$

$$\widehat{\rho}_{n,k}(f_\varphi, [-1, 1] > c_3/n^{2k\alpha}, \quad k \text{ — четное}.$$

б) Пусть $\varphi(x) = \log^{-\beta}\frac{e}{x}$, $\beta > 0$. Тогда

$$\rho_{n,k}(f_\varphi, [-1, 1]) > c_4/\log^\beta n.$$

Ограничимся доказательством оценки (25). Пусть $r_{n,k}$ такая, что

$$|f_\varphi(x) - r_{n,k}(x)| < 2\rho_{n,k}, \quad x \in [-1, 1].$$

Имеем

$$\max_{x\in[-1,0]} |r_{n,k}(x)| \leqslant 2\rho_{n,k},$$

$$\min_{x\in[\varepsilon,1]} r_{n,k}(x) \geqslant \varphi(\varepsilon) - 2\rho_{n,k}.$$

Тем самым $\sigma(r_{n,k}, \varepsilon) > (\varphi(\varepsilon) - 2\rho_{n,k})/2\rho_{n,k}$ и, следовательно,

$$\rho_{n,k} > \varphi(\varepsilon)/2[1 + \sigma(r_{n,k}, \varepsilon)].$$

Для $\sigma(r_{n,k}, \varepsilon)$ имеет место оценка (17), поэтому

$$\rho_{n,k} > \frac{\varphi(\varepsilon)}{2\left[1 + \exp(4n\varepsilon^{1/(2k+2)})\right]}.$$

Ввиду независимости правой части этого неравенства от ε, можно брать, например, $\varepsilon = \varepsilon_n = (1/4n)^{2k+2}$, $n > 16$ $(0 < \varepsilon_n < \varepsilon_0)$, и требуемая оценка доказана.

Статья поступила
7 мая 1981 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов.— Мат. сб., 1971, т. 86, № 2, с. 314—324.
2. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированном числом полюсов.— Тр. МИЭМ: Математический анализ и его приложения, 1975, вып. 53, с. 67—85.
3. *Гончар А. А.* Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки.— Мат. сб., 1974, т. 94, № 2, с. 265—282.
4. *Гончар А. А.* Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения.— Мат. сб., 1967, т. 72, № 3, с. 489—503.
5. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Гончар А. А.* О задачах Золотарева, связанных с рациональными функциями.— Мат. сб., 1969, т. 78, № 4, с. 640—654.
7. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация функций в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.