Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. A. Smolyak, Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Volume 148, Number 5, 1042–1045

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 44.220.255.141
November 9, 2024, 01:24:11

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 5

МАТЕМАТИКА

С. А. СМОЛЯК

КВАДРАТУРНЫЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НА ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VIII 1962)

Пусть K — некоторое линейное нормированное пространство и пусть τ_i, $\tau_i^{(j)}$ — некоторые его элементы. Пусть K^s — тензорное произведение K самого на себя s раз, т. е. пространство формальных конечных сумм вида $\sum\limits_{1\leqslant p\leqslant N} \lambda_p \tau_p^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tau_p^{(s)}$ (где λ_p — числа), для которых тривиальным образом определено сложение и умножение на числа, факторизованное по всем соотношениям вида

$$\left(\sum_{p=1}^{N_1} \lambda_p^{(1)} \tau_p^{(1)}\right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{p=1}^{N_s} \lambda_p^{(s)} \tau_p^{(s)}\right) = \sum_{p_1=1}^{N_1} \ldots \sum_{p_s=1}^{N_s} \lambda_{p_1}^{(1)} \ldots \lambda_{p_s}^{(s)} \tau_{p_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tau_{p_s}^{(s)}.$$

Мы будем рассматривать такие K^s, для которых можно ввести норму так, чтобы $\|\tau_1 \otimes \ldots \otimes \tau_s\| = \|\tau_1\| \ldots \|\tau_s\|$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Пусть* ϑ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, q)$ *и* I — *такие элементы* K, *что при* $\alpha > 0$

$$\|I\| \leqslant B, \quad \|\vartheta_\nu\| \leqslant B, \quad \|I - \vartheta_\nu\| \leqslant A \cdot 2^{-\nu\alpha},$$

$$\theta_0 = \vartheta_0, \quad \theta_\nu = \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu-1} \quad (\nu \geqslant 1).$$

Тогда

$$\left\| I \otimes \ldots \otimes I - \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q} \theta_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \theta_{\nu_s} \right\| \leqslant C(A, B, s, \alpha) \frac{q^{s-1}}{2^{\alpha q}}.$$

При этом написанная сумма фактически есть линейная комбинация членов $\vartheta_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \vartheta_{\nu_s}$ *с* $q - s \leqslant \nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q$.

Доказательство этой теоремы совершенно тривиально в том случае, если K и K^s — пространства чисел, операция тензорного умножения совпадает с обычным умножением, а под нормой числа понимается его модуль. В общем случае доказательство проводится совершенно аналогично.

Из этой простой теоремы можно вывести ряд интересных следствий относительно квадратурных и интерполяционных формул на некоторых классах функций, например W_s^α ([1]), E_s^α ([2]), H_s^α ([3, 4]).

Пусть, например, K — пространство линейных непрерывных функционалов над классом W_1^α ([1]) — классом 1-периодических функций, разлагающихся в ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi i m x}$ с нормой $\|f\|^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \overline{m}^{2\alpha}$ *. Тогда элементы K могут быть отождествлены с последовательностями $\tau = (\ldots, c_m, \ldots)$, причем $\|\tau\|^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \overline{m}^{-2\alpha}$. Пусть $\tau^{(i)} = (\ldots, c_m^{(i)}, \ldots)$.

* Здесь и далее $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

Определим $\tau^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tau^{(s)}$ как бесконечный тензор s-го ранга

$$T = \begin{pmatrix} & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \cdots & c_{m_1 \ldots m_s} & \cdots & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & & \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $c_{m_1 \ldots m_s} = c_{m_1}^{(1)} \ldots c_{m_s}^{(s)}$. Сложение тензоров и их умножение на числа будем понимать в обычном смысле, а норму тензора (1) определим формулой

$$\| T \|^2 = \sum_{m_1, \ldots, m_s} | c_{m_1 \ldots m_s} |^2 (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-2\alpha}.$$

Тогда K^s будет, вообще говоря, подпространством линейного нормированного пространства линейных непрерывных функционалов (л.н.ф.) над классом W_s^α и нормы в обоих классах будут совпадать. Возьмем в качестве I л. н. ф. интегрирования на W_1^α: $(I, f(x)) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$. Тогда $I \otimes \ldots \otimes I$ будет л.н.ф. s-кратного интегрирования в W_s^α. В качестве ϑ_ν возьмем л.н.ф., соответствующий какой-либо хорошей квадратурной формуле в W_1^α с 2^ν узлами интегрирования, например такой: $(\vartheta_\nu, f(x)) = \frac{1}{2^\nu} \sum\limits_{k=1}^{2^\nu} f\left(\frac{k}{2^\nu}\right)$. Легко проверяется, что при $\alpha > 1/2$ $\|I\| = 1$, $\|\vartheta_\nu\| \leqslant B(\alpha)$, $\|I - \vartheta_\nu\| \leqslant A(\alpha) \cdot 2^{-\nu\alpha}$.

Чтобы выяснить смысл утверждения теоремы в этом случае, сделаем следующее замечание. Если $\delta(\xi) \in K$ определяется равенством $(\delta(\xi), f(x)) = f(\xi)$, то этот л.н.ф. отождествляется с последовательностью $(\ldots, e^{2\pi i m \xi}, \ldots)$, а тогда л.н.ф. $\delta(\xi_1, \ldots, \xi_s) = \delta(\xi_1) \otimes \ldots \otimes \delta(\xi_s)$ отождествляется с тензором (1), где $c_{m_1 \ldots m_s} = e^{2\pi i (m_1 \xi_1 + \ldots + m_s \xi_s)}$, и поэтому для него $(\delta(\xi_1, \ldots, \xi_s), f(x_1, \ldots, x_s)) = f(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ для $f \in W_s^\alpha$. Если $\tau^{(i)}$ есть линейная комбинация $\delta(\xi_1^{(i)}), \ldots, \delta(\xi_{N_i}^{(i)})$, то $\tau^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tau^{(s)}$ есть линейная комбинация $\delta(\xi_{n_1}^{(1)}, \ldots, \xi_{n_s}^{(s)})$ $(1 \leqslant n_i \leqslant N_i)$. Так как в нашем случае ϑ_ν, значит и θ_ν — линейные комбинации $\delta\left(\frac{1}{2^\nu}\right), \ldots, \delta\left(\frac{2^\nu}{2^\nu}\right)$, то $\theta_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \theta_{\nu_s}$ — линейная комбинация членов $\delta\left(\frac{n_1}{2^{\nu_1}}, \ldots, \frac{n_s}{2^{\nu_s}}\right)$. Следовательно, л.н.ф. $\sum\limits_{\nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q} \theta_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \theta_{\nu_s}$, будучи применен к любой функции из W_s^α, даст линейную комбинацию ее значений в узлах сетки

$$\left(\frac{n_1}{2^{\nu_1}}, \ldots, \frac{n_s}{2^{\nu_s}}\right), \quad 1 \leqslant n_i \leqslant 2^{\nu_i}, \quad \nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q, \tag{2}$$

$$\Big(\sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q} \theta_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \theta_{\nu_s}, f(x_1, \ldots, x_s) \Big) = \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q} \; \sum_{1 \leqslant n_i \leqslant 2^{\nu_i}} p_{\nu_1 \ldots \nu_s}^{n_1 \ldots n_s} f\left(\frac{n_1}{2^{\nu_1}}, \ldots, \frac{n_s}{2^{\nu_s}}\right).$$

Коэффициенты $p_{\nu_1 \ldots \nu_s}^{n_1 \ldots n_s}$ можно вычислить в $C(s)$ операций каждый, причем, в силу теоремы, коэффициенты с $\nu_1 + \ldots + \nu_s < q - s$ будут равны нулю. Легко видеть, что при этом мы будем использовать значения функции в $O(q^{s-1}\cdot 2^q)$ точках. В силу нашей теоремы и по определению нормы л.н.ф.

$$\left|\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s-\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_s\leqslant q}\ \sum_{1\leqslant n_i\leqslant 2^{\nu_i}} p_{\nu_1\ldots\nu_s}^{n_1\ldots n_s} f\left(\frac{n_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{n_s}{2^{\nu_s}}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(\alpha, s)\,\frac{q^{s-1}}{2^{\alpha q}}\,\|f\|_{W_s^\alpha}.$$

Если число узлов интегрирования обозначить через N, то $N=O(q^{s-1}\cdot 2^q)$ и правая часть последнего неравенства будет $O(N^{-\alpha}\log^{(\alpha+1)(s-1)}N)$. Взяв вместо W_1^α класс E_1^α, т. е. определив в K норму $\|\tau\|=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_m|\,\overline{m}^{-\alpha}$, мы аналогично получим, что та же квадратурная формула дает ту же по порядку ошибки и на классе E_s^α. Взяв вместо W_1^α класс E_2^α, вместо I — л.н.ф. двойного интегрирования по единичному квадрату, положив

$$\vartheta_\nu=\frac{1}{u_\nu}\sum_{k=1}^{u_\nu}\delta\left(\frac{k}{u_\nu},\frac{ku_{\nu-2}}{u_\nu}\right)\qquad(u_1=1,\ u_2=2,\ldots,u_n=u_{n-1}+u_{n-2})$$

и использовав результат работы ([5]) в виде $\|I-\vartheta_\nu\|\leqslant A(\alpha)\,\nu/u_\nu^\alpha$, мы аналогично придем к квадратурной формуле на E_{2s}^α с $O(q^{s-1}u_q)$ узлами, ошибка которой, как можно увидеть, слегка изменив доказательство основной теоремы, будет $O\left(\frac{q^{2s-1}}{u_q^\alpha}\right)$ или, в пересчете на число узлов, $O\left(\frac{\log^{(s-1)(\alpha+2)+1}N}{N^\alpha}\right)$.

Изменив доказательство еще немного, можно получить оценку ошибки квадратурной формулы и на классе E_{2s-1}^α в виде $O\left(\frac{\log^{(s-1)(\alpha+2)}N}{N^\alpha}\right)$. При $\alpha\geqslant 2$ эти результаты более точны, чем оценки ошибок квадратурных формул по параллелепипедальным сеткам, полученные в работах ([2], [5]).

Возьмем теперь в теореме

$$I=\delta(\xi),\qquad \vartheta_\nu=\frac{1}{2^\nu}\sum_{k=1}^{2^\nu}V_{2^{\nu+1}}\left(\xi-\frac{k}{2^\nu}\right)\delta\left(\frac{k}{2^\nu}\right),$$

где $V_n(x)=\dfrac{\sin^2 2\pi nx-\sin^2\pi nx}{n\sin^2\pi x}$ — оператор Валле-Пуссена ([6]). Используя ограниченность интегральной и интерполяционной нормы V_n ([7]) и оценки наилучших приближений тригонометрическими полиномами периодических функций из классов E_1^α, W_1^α и $\widetilde{H}_1^\alpha$ (последний класс в ([7]) обозначается $W_*^{(r)}H^{(\beta)}$, где $r=[\alpha]$, $\beta=\{\alpha\}$), можно получить, что

$$\|I-\vartheta_\nu\|_{E_1^\alpha}=O(2^{-\nu(\alpha-1)}),\quad \|I-\vartheta_\nu\|_{W_1^\alpha}=O(2^{-\nu(\alpha-1/2)})\quad \|I-\vartheta_\nu\|_{\widetilde{H}_1^\alpha}=O(2^{-\nu\alpha}).$$

Тогда из нашей теоремы получаем интерполяционную формулу с узлами (2), которая дает точность (в смысле максимума модуля ошибки) на E_s^α $O\left(\frac{\log^{\alpha(s-1)}N}{N^{\alpha-1}}\right)$, на W_s^α $O\left(\frac{\log^{(\alpha+1/2)(s-1)}N}{N^{\alpha-1/2}}\right)$ и на $\widetilde{H}_s^\alpha$ $O\left(\frac{\log^{(\alpha+1)(s-1)}N}{N^\alpha}\right)$.

С другой стороны, можно показать, что никакая интерполяционная формула с N узлами не может давать на E_s^α точность лучше $O\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$, на W_s^α — лучше $O\left(\frac{1}{N^{\alpha-1/2}}\right)$ и на классе $\widetilde{H}_s^\alpha$ — лучше $O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$. Более точные оценки снизу в настоящее время получены И. Ф. Шарыгиным ([13]).

В работах ([1, 4, 9, 10]) рассмотрена интерполяция по параллелепипедальным сеткам, но, как показывается в ([1, 10]), наилучшая оценка в этом случае для всех рассмотренных классов не может быть лучше $O\left(\frac{1}{N^{\alpha/2}}\right)$, так что настоящий результат является наиболее точным из существующих и может быть улучшен только за счет логарифмов.

В случае классов непериодических функций H_s^α ([3, 4]) или $W^{(r)}H^{(\beta)}$ ([7]) вместо рассмотренных л.н.ф. ϑ_ν надо брать другие, соответствующие хорошим квадратурным или интерполяционным формулам на этих классах, например квадратурным формулам Сарда или Никольского ([8]) или интерполяционным формулам Ньютона. Оценки ошибок в непериодическом случае будут по порядку такими же, как и в периодическом (разумеется, для соответствующих классов), и будут более точными, чем для квадратурных и интерполяционных формул, рассмотренных в ([3, 4]).

Предлагаемая конструкция применима к оценкам поперечников классов $\widetilde{H}_s^\alpha$ и сходных с ними. Однако указанным в работе способом получается только другое доказательство теоремы К. И. Бабенко ([11]). На основе описанных квадратурных и интерполяционных формул можно строить также методы численного интегрирования интегральных и дифференциальных уравнений и т. п. В качестве ϑ_ν могут быть взяты случайные элементы K, что позволяет получать оценки в среднем остаточных членов квадратурных формул при случайном выборе либо самих узлов интегрирования, либо числа этих узлов, если известны те же результаты в одномерном случае. Полученные результаты несущественно отличаются от результатов работы ([12]), например математическое ожидание модуля ошибки квадратурной формулы на W_s^α при $\alpha > 1/2$ будет $O_\alpha\left(\frac{\log^{(\alpha+3/2)(s-1)} N}{N^{\alpha+1/2}}\right)$, в то время как в работе ([12]) оно оценивается как $O\left(\frac{\log^{s+1} N}{N^{\alpha+1/2}}\right)$.

Применимость нашего метода к классам E_s^α, W_s^α, H_s^α обусловлена тем, что пространства л.н.ф. над ними содержат в себе тензорные произведения пространств л.н.ф. над соответствующими одномерными пространствами.

Автор приносит свою искреннюю благодарность А. С. Дынину и Б. С. Митягину за сделанные ими ценные указания.

Поступило
25 VII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Смоляк, ДАН, **131**, № 5, 1028 (1960). [2] Н. М. Коробов, ДАН, **124**, № 6, 1207 (1959). [3] И. Ф. Шарыгин, ДАН, **132**, № 1, 71 (1960). [4] Ю. Н. Шахов, ДАН, **136**, № 6, 1302 (1960). [5] Н. С. Бахвалов, Вестн. Моск. унив., сер. матем., № 4, 3 (1959). [6] П. П. Коровкин, Линейные операторы и теория приближений, М., 1959. [7] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. [8] С. М. Никольский, Квадратурные формулы, М., 1958. [9] Н. М. Коробов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **60**, 195 (1961). [10] В. С. Рябенький, ДАН, **131**, № 5, 1025 (1960). [11] К. И. Бабенко, ДАН, **132**, № 5, 982 (1960). [12] Н. С. Бахвалов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **1**, № 1, 64 (1961). [13] И. Ф. Шарыгин. Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **2**, № 6 (1962).