В. Г. Кротов, О дифференциальных свойствах функций из H^p на границе круга сходимости, *Тр. МИАН СССР*, 1987, том 180, 141–142

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Lorentz G. G.* Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen // Math. Ztschr. 1948, Bd. 51. S. 135—148.
3. *Котляр Б. Д.* О сингулярных числах интегральных операторов // ДАН СССР. 1976. Т. 229, № 4. С. 794—796.
4. *Котляр Б. Д.* О сингулярных числах интегральных операторов // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 8. С. 1473—1477.
5. *Котляр Б. Д.* Коэффициенты Фурье и плотности множеств натуральных чисел // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1981. Вып. 35. С. 54—61.
6. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
7. *Котляр Б. Д.* Об одном классе плотностей множеств натуральных чисел // Укр. мат. журн. 1984. Т. 36, № 2. С. 160—165.
8. *Cochran J.* Growth estimates for the singular values of square-integrale kernels // Pasif. J. Math. 1975. Vol. 56, N 1. P. 51—58.

УДК 517.5

В. Г. КРОТОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ H^p НА ГРАНИЦЕ КРУГА СХОДИМОСТИ

Пусть H^p $(0 < p \leqslant \infty)$ — классические пространства Харди аналитических в круге $|z| < 1$ функций, $H_k^p = \{f\colon f^{(k)} \in H^p\}$. Для $f \in H^p$ вводим, как обычно, граничную функцию $f(e^{i\varphi}) = \lim\limits_{r\to 1-0} f(re^{i\varphi})$, существование которой для почти всех $\varphi \in T \equiv [-\pi, \pi]$ установил Ф. Рисс [1]. Рассмотрим следующую задачу: пусть задана функция $f \in H_k^p$, и требуется вычислить значения граничной функции k-й производной $f^{(k)}(e^{i\varphi})$ с помощью подходящего предельного перехода, используя при этом только значения граничной функции $f(e^{i\varphi})$ и не используя значения $f(z)$ при $|z| < 1$. Известная теорема Харди—Литтлвуда [2] утверждает, что $H_k^p \subset H^{p/(1-kp)}$ при $0 < p < 1/k$, причем показатель $p/(1-kp)$ здесь увеличить нельзя. Поэтому при решении поставленной задачи следует учитывать, что $f(e^{i\varphi})$ является только $L^{p/(1-kp)}$-функцией при $0 < p < 1/k$. Этим обуславливается тип предельного перехода, который будет использован ниже.

Рассмотрим разделенные разности

$$[f; z_0, \ldots, z_k] = \sum_{j=0}^{k} f(z_j) \prod_{\substack{m=0\\ m\neq j}}^{k} (z_j - z_m)^{-1},$$

где $z_0, \ldots, z_k$ — набор попарно различных точек из области определения f. Мы будем использовать специальные наборы узлов $z_j(t) = e^{i(\varphi+\theta_j t)}$ $(j = 0, \ldots, k)$, где $\theta = \{\theta_j\}_{j=0}^{k}$ — набор попарно различных действительных чисел. Для краткости положим

$$[f;\ z_0(t), \ldots, z_k(t)] \equiv [f(e^{i\varphi});\ \theta,\ t]_k.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in H_k^p$, $0 < p \leqslant \infty$, k — натуральное. Тогда для почти всех $\varphi \in T$ выполнено соотношение*

а) $$\lim_{h\to+0} \left\{\frac{1}{h}\int_{-h}^{h} |[f(e^{i\varphi}); \theta, t]_k - f^{(k)}(e^{i\varphi})|^\lambda\, dt\right\}^{1/\lambda} = 0$$

при $0 < \lambda \leqslant p/(1-kp)$, *если* $0 < p < 1/k$;

б) $\lim\limits_{t\to 0}[f(e^{i\varphi});\theta,t]_k = f^{(k)}(e^{i\varphi})$,

если $p \geqslant 1/k$.

Показатель $p/(1-kp)$ в утверждении а) является точным.

Теорема 2. *Пусть* $f \in H^p$, $0 < p \leqslant \infty$, k — *натуральное. Следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in H^p_k$;

2) $\sup\limits_{0<|t|\leqslant\pi} \| [f(e^{i\cdot});\theta,t]_k \|_{L^p(T)} < \infty$;

3) *существует функция* $g \in H^p$, *для которой*

$$\lim_{t\to 0} \| [f(e^{i\cdot});\theta,t]_k - g(e^{i\cdot}) \|_{L^p(T)} = 0.$$

Другие условия, эквивалентные условиям 1) — 3) теоремы 2, приведены нами в [3]. Частный случай теорем 1 и 2 (при специальном выборе θ) анонсирован в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Riesz F.* Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Ztschr. 1923. Bd. 18. S. 87—95.
2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Ztschr. 1932. Bd. 34. S. 403—439.
3. *Кротов В. Г.* О дифференцируемости функций из L^p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 1. С. 95—113.
4. *Кротов В. Г.* Дифференциальные свойства граничных значений функций из классов Харди // ДАН УССР. Сер. А. 1984. № 6. С. 15—17.

УДК 517.5

Н. Л. КУДРЯВЦЕВ

О ВЛОЖЕНИИ РАЗНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ТИПА НИКОЛЬСКОГО—БЕСОВА

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in (1, \infty)^n$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, и заданы последовательности чисел $\{\alpha_i(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{N_i(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $i = \overline{1, n}$, такие, что $\{\alpha_i^{-1}((k)\} \in \in l_{\theta'}$, $1/\theta + 1/\theta' = 1$ при $\theta > 1$ и $\alpha_i^{-1}(k) \to 0$ $(k \to \infty)$ при $\theta = 1$, $N_i(k) < < N_i(k+1) \uparrow \infty$ $(k \to \infty)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_n)$, $\alpha_i = = \{\alpha_i(k)\}$, $N_i = \{N_i(k)\}$.

Обозначим через $sB^{\alpha, \mathbf{N}}_{\mathbf{p}, \theta}(\mathbf{R}^n)$ пространство функций $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^n)$, для которых существует представление

$$f \overset{L_{\mathbf{p}}}{=} \sum_{k_1} \ldots \sum_{k_n} Q_{k_1 \ldots k_n}, \tag{1}$$

$Q_{k_1 \ldots k_n}$ суть целые функции экспоненциального типа $N_i(k_i)$ при x_i, $i = = \overline{1, n}$, что конечна величина

$$\| f \|_{sB} \equiv \inf_{(1)} \left\{ \left\| \left\{ \prod_{i=1}^{n} \alpha_i(k_i) \| Q_{k_1 \ldots k_n} \|_{\mathbf{p}} \right\} \right\|_{l_\theta} \right\}.$$

Эти пространства обобщают пространства, введенные Г. А. Калябиным [1].

Через $\mathbf{j} = \{j_1, \ldots, j_m\}$ обозначим совокупность индексов такую, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n$, а $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_{n-m}\}$ — множество индексов, получающееся удалением из $\{1, \ldots, n\}$ множества $\mathbf{j}$. Для вектора