

Д. Х. МУШТАРИ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДУАЛЬНО-РАДОНОВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Мы будем применять следующие обозначения: $\{\Omega, P\}$ — метрический компакт с некоторой борелевской вероятностью, $L_p(\Omega)$ — пространство p -интегрируемых случайных величин на Ω , $L_0(\Omega)$ — пространство всех случайных величин на Ω с топологией сходимости по вероятности. Непрерывный линейный оператор (в дальнейшем просто оператор) $\Phi: E \rightarrow L_p(\Omega)$ определяет некоторую цилиндрическую вероятность на E' (E и F здесь и в дальнейшем — сепарабельные банаховы пространства).

Определение. Оператор $T: E \rightarrow F$ называется дуально- p -радоновским, если для любого оператора $\Phi: F \rightarrow L_p(\Omega)$ оператор ΦT определяет цилиндрическую вероятность $\mu_{\Phi T}$, продолжающуюся до меры $P_{\Phi T}$ на E' , причем (если $p > 0$)

$$\int_{E'} \|x'\|^p dP_{\Phi T}(x') < \infty.$$

В этой заметке мы дадим несколько применений теоремы Л. Шварца ([1], следствие 5).

Теорема. *T — дуально- p -радоновский оператор тогда и только тогда, когда имеет место диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{D} & L_\infty(\Omega, P) & \xrightarrow{\varphi} & L_p(\Omega, P) \\ & \searrow A & & \nearrow \psi & \\ & & S & \xrightarrow{B} & E' \end{array} \quad (1)$$

где φ — канонический оператор, ψ — изоморфизм в L_p , $BA = T'$. При этом Ω может быть отождествлен с некоторым шаром в F'' , наделенным топологией $\sigma(F'', F')$.

Предложение 1. Если оператор $\Phi: E \rightarrow L_1(\Omega)$ определяет вероятность P_Φ с интегрируемой нормой, то Φ — дуально-1-радоновский оператор.

Действительно, известно, что существует измеримая функция $f_\Phi: \Omega \rightarrow E'$ такая, что $\langle f_\Phi, x \rangle$ и Φx эквивалентны для всех $x \in E$. При этом

$$\int_{E'} \|x'\| dP_\Phi(x') = \int_{\Omega} \|f(\omega)\| dP(\omega) < \infty.$$

Обозначим: $\Omega_n = \{\omega : \|f(\omega)\| \in (n-1, n)\}$, $\sum n P\Omega_n = C < \infty$,

$\bar{P}A = \sum_n n P A \Omega_n / C$. Тогда (1) выполняется с $D: L_\infty(\Omega, P) \rightarrow L_\infty(\Omega, \bar{P})$ — каноническим отображением.

Замечание. Отсюда следует, что для E существует система $\{\mathfrak{F}\}$ дуально-1-радоновских операторов такая, что любой Φ , определяющий P_Φ с интегрируемой нормой в E' , факторизуется через один из операторов $\{\mathfrak{F}\}$. Топология в E с аналогичным свойством существует, однако, не всегда [2].

Далее мы рассмотрим случай: $E = l_1$, $F = c_0$, $T(e_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ (e_i, f_i — базисные элементы l_1 и c_0).

Предложение 2. Если $0 \leq \lambda_n \leq C/\ln_2 n$, $n > 1$, то T — дуально-1-радоновский оператор.

Доказательство. Для $n > 2^k$, $\lambda_n < C/k$. Примем $N^{(k)} = [2^k, 2^{k+1})$, $N_{lm}^{(k)} = [2^k + (m-1)2^l, 2^k + m2^l)$ $1 \leq m \leq 2^{k-l}$, $0 \leq l \leq k$, $\xi_{a_1} \dots a_n$ — независимые при различных значениях индексов двузначные случайные величины, с равной вероятностью принимающие значения ± 1 , $g_n = \lambda_n k f_n$, $n \in N^{(k)}$. Определим $\Phi: F' \rightarrow L_1(\Omega)$.

$$\tilde{\varphi}_l^{(k)}(x') = \sum_{m=1}^{2^{k-l}} \xi_{klm} \sum_{n \in N_{lm}^{(k)}} \langle x', g_n \rangle,$$

$$\tilde{\varphi}^{(k)} = \tilde{\varphi}_l^{(k)} \text{ с вероятностью } 1/k + 1, \quad \tilde{\varphi} = \sum_k \xi_k' \tilde{\varphi}_k.$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x') = \sum_k \xi_k'' \langle x', \sum_{n \in N^{(k)}} g_n \rangle,$$

Φ равна $\tilde{\varphi}$ или $\tilde{\tilde{\varphi}}$ с равной вероятностью. Мера P_Φ , определенная Φ , сосредоточена в шаре радиуса $2C$ в F'' . Далее

$$\|T'(\sum_n \alpha_n f_n')\| = \sup_n \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \right|,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{2^t+s} \lambda_i \alpha_i \right| \leq \sum_{k=1}^t \left| \sum_{i \in N^{(k)}} \lambda_i \alpha_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{2^t+s} \lambda_i \alpha_i \right|,$$

$$\sum_{k=1}^t \left| \sum_{i \in N^{(k)}} \lambda_i \alpha_i \right| \leq \text{Const} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^t \left(\sum_{i \in N^{(k)}} \lambda_i \alpha_i k \right)^2} \leq$$

$$\leq \text{Const} \cdot \int_{E''} |\langle \sum_n \alpha_n f'_n, x'' \rangle| dP_{\tilde{\varphi}}(x'');$$

$$\left| \sum_{2^t}^{2^t+s} \lambda_i \alpha_i \right| \leq \sum_{i=0}^t \sqrt{\sum_{m \in N_{lm}^{(t)}} (\sum \lambda_i \alpha_i)^2} \leq$$

$$\leq \text{Const} \cdot \int_{E''} |\langle \sum_n \alpha_n f'_n, x'' \rangle| dP_{\tilde{\varphi}}(x'').$$

Из предложения 4 непосредственно вытекает следующее обобщение теоремы Радемахера — Меньшова:

Следствие. Если ряд X_n в L_1 сходится безусловно, то ряд $\sum \lambda_n X_n$, где $\lambda_n = 0$ ($1/\log n$), сходится почти наверное.

Квапин и Пелчинский [3] доказали это утверждение в предположении $\lambda_n = 0$ ($1/\log^{1+\varepsilon} n$).

Предложение 3. Если $\lambda_n \leq C/\log^2 n$, то оператор T — введенный в предложении 2, дуально-0-радоновский.

Доказательство аналогично, лишь в определении $\tilde{\varphi}^{(k)}$

$$\tilde{\varphi}^{(k)} = \sum_{i=1}^k \xi_{ki}' \tilde{\varphi}_i^{(k)} / k + 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Séminaire Laurent Schwartz. Ecole Polytechnique, 1969—1970, Exposé XXIV.
2. Муштар и Д. Х. Некоторые общие вопросы теории вероятностных мер в линейных пространствах. — Теория вероятностей и применения. 18, 1 1973 с. 66—77.
3. Kwapien S., Pelczyński A. The main triangle projection in matrix spaces and its applications, *Studia Math.*, 34 (1970), p. 43—68.