Л. В. Зильберглейт, Симметрии и законы сохранения задач Минковского и Александрова, *Докл. АН СССР*, 1985, том 281, номер 2, 270–275

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

Л.В. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЗАДАЧ МИНКОВСКОГО И АЛЕКСАНДРОВА

(Представлено академиком А.Д. Александровым 20 II 1984)

1. Задача Минковского состоит в восстановлении поверхности по заданной функции кривизн (в нашем случае – гауссовой кривизне), а задача Александрова – восстановлении поверхности по данной площади сферического отображения как функции проекции точек поверхности на некоторую плоскость (см. [1]). Реализации этих поверхностей в пространстве $J^0\mathbf{R}^2 = (q_1, q_2, u)$ отвечают решения уравнений Монжа–Ампера, ассоциированных с дифференциальными 2-формами на $J^1\mathbf{R}^2 = (q_1, q_2, u, p_1, p_2)$

$$\omega_M = dp_1 \wedge dp_2 - \varphi_M(p_1, p_2) dq_1 \wedge dq_2, \qquad \varphi_M \in C^\infty(\mathbf{R}^2),$$

$$\omega_A = (1 + p_1^2 + p_2^2)^{-3/2} dp_1 \wedge dp_2 - \varphi_A(q_1, q_2) dq_1 \wedge dq_2, \qquad \varphi_A \in C^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Поверхности (вообще говоря, с особенностями), удовлетворяющие условиям задач Минковского и Александрова, – это R-многообразия (возможно, с загибами) в $J^1\mathbf{R}^2$, решающие соответствующие уравнения Монжа–Ампера (см. [2]). Целью работы является изучение контактных симметрий и законов сохранения класса этих поверхностей. В частности, в аналитической ситуации устанавливается бесконечномерность как симметрий, так и законов сохранения задач Минковского и Александрова.

2. Напомним (см. [3]), что на многообразии 1-джетов гладкого n-мерного многообразия M^n существует естественная контактная структура, определенная фундаментальной 1-формой U_1. В канонических координатах $(q_1, q_2, \ldots, q_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ многообразия J^1M^n форма $U_1 = du - \sum_{i=1}^{i=n} p_i dq_i$. На J^1M^n рассмотрим распределение Картана $x_1 \to \operatorname{Ker} U_{1,x_1}$, $x_1 \in J^1M^n$.

Форма dU_1 определяет в каждой точке $x_1 \in J^1M^n$ симплектическую структуру на $\operatorname{Ker} U_{1,x_1}$.

Векторные поля на многообразии J^1M^n, сохраняющие распределение Картана, назовем контактными. Контактное поле X_f однозначно определяется своей производящей функцией $f \in C^\infty(J^1M^n)$, $f = U_1(X_f)$. В канонических координатах соответствие $f \to X_f$ имеет вид

$$X_f = \sum_{i=1}^{i=n} \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{d}{dq_i} + \frac{df}{dq_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) + f \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\frac{d}{dq_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial}{\partial u}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Это соответствие позволяет ввести на функциях из $C^\infty(J^1M^n)$ структуру алгебры Ли (см. [3]):

$$[f, g] = [X_f, X_g] \lrcorner U_1 = X_f(g) - X_1(f) \cdot g; \quad f, g \in C^\infty(J^1M^n).$$

Поле X_1 является дополнением к распределению Картана в TJ^1M^n. Формы $\omega \in \Lambda^n(J^1M^n)$, которые удовлетворяют условиям $X_1 \lrcorner \omega = 0$, $dU_1 \wedge \omega = 0$, образуют класс эффективных форм $\Lambda^n_e(J^1M^n)$. Эффективные формы находятся во взаимно однозначном соответствии с дифференциальными операторами Монжа–Ампера Δ_ω: $C^\infty(M^n) \to \Lambda^n(M^n)$, $\Delta_\omega(\theta) = S^*_{j_1(\theta)}\omega$, где $S_{j_1(\theta)}: M^n \to J^1M^n$ – сечение, отвечающее 1-джету функции $\theta \in C^\infty(M^n)$ (см. [2]). В дальнейшем будем рассматривать только формы $\omega \in \Lambda^n_e(J^1M^n)$.

Пусть $E_\omega = \{\Delta_\omega = 0\} \subset J^2M^n$ – уравнение Монжа–Ампера, которое отвечает оператору Δ_ω. Инфинитезимальные контактные симметрии уравнения E_ω – это контактные поля на J^1M^n, сохраняющие нули формы ω. Алгебра Ли $\mathrm{Sym}\,\omega$ производящих функций инфинитезимальных контактных симметрий уравнения E_ω порождена функциями $f \in C^\infty(J^1M^n)$, удовлетворяющими уравнению $L_f(\omega) - \lambda(f)\omega \in \mathscr{C}$, где $\lambda(f) \in C^\infty(J^1M^n)$, L_f – производная Ли вдоль поля X_f, $\mathscr{C}$ – дифференциальный идеал в кольце $\Lambda^\cdot(J^1M^n)$, порожденный формой U_1. Под законом сохранения уравнения Монжа–Ампера E_ω будем понимать $(n-1)$-мерную дифференциальную форму на J^1M^n, замкнутую на решениях уравнения E_ω. Каждый закон сохранения θ_f определяется функцией $f \in C^\infty(J^1M^n)$: $d\theta_f - f\omega \in \mathscr{C}$ (см. [2]). Используя отождествление $f \to \theta_f$, обозначим через $\mathrm{CL}(\omega)$ множество функций, определяющих законы сохранения уравнения E_ω.

3. Прежде чем рассматривать задачи Минковского и Александрова, установим некоторые общие факты о симметриях и законах сохранения уравнений Монжа–Ампера.

Теорема 1. *Пусть форма* $\omega = \psi\omega_0$, *где* $\psi \in C^\infty(J^1M^n)$, $\psi \neq 0$, *форма* ω_0 *неразложима и замкнута. Тогда, если* $f \in \mathrm{Sym}\,\omega$, *то справедливо равенство* $\lambda(f) = [f, \psi]\cdot\psi^{-1} + C(f)$, $C(f) = \mathrm{const}$.

Пусть $\mathrm{Sym}_0\omega = \{f \mid f \in \mathrm{Sym}\,\omega,\ C(f) = 0\}$.

Предложение 1. *В условиях теоремы* 1 *множество* $\mathrm{Sym}_0\,\omega$ – *подалгебра алгебры Ли* $\mathrm{Sym}\,\omega$.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *существует изоморфизм* N: $\mathrm{CL}(\omega) \to \mathrm{Sym}_0\omega$, $N(f) = f\cdot\psi$, *где* $f \in \mathrm{CL}(\omega)$.

4. В дальнейшем будем считать, что $n = 2$. Тогда на 4-мерном симплектическом пространстве $\mathrm{Ker}\,U_1$ рассмотрим две формы максимальной размерности: $\omega \wedge \omega$ и $dU_1 \wedge dU_1$. Коэффициент пропорциональности между ними назовем пфаффианом формы ω и обозначим $\mathrm{Pf}\,\omega$: $\omega \wedge \omega = \mathrm{Pf}\,\omega dU_1 \wedge dU_1$.

В частности, для задач Минковского и Александрова $\mathrm{Pf}\,\omega_M = \varphi_M$, $\mathrm{Pf}\,\omega_A = (1 + p_1^2 + p_2^2)^{-3/2}\varphi_A$.

Предложение 2. *Пусть* $f \in \mathrm{Sym}\,\omega$. *Тогда* f *удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка*

$$[f, \mathrm{Pf}\,\omega] = [2\lambda(f) - 3X_1(f)]\,\mathrm{Pf}\,\omega.$$

Предложение 3. *Пусть* $\omega = \psi\omega_0$, $d\omega_0 = 0$, $\psi \neq 0$, $\mathrm{Pf}\,\omega \neq 0$. *Тогда, если функция* $f \in \mathrm{Sym}\,\omega$, *то она удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка*

$$[f, \mathrm{Pf}\,\omega_0] = [2C(f) - 5X_1(f)]\,\mathrm{Pf}\,\omega_0.$$

Форма ω_M удовлетворяет условиям утверждения 3: $\psi = \varphi_M$, $\mathrm{Pf}\,\omega_0 = \varphi_M^{-1}$. Поэтому справедливо

Следствие 3.1. *Функция* $f \in \mathrm{Sym}\,\omega_M$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка*:

$$[f, \varphi_M] = [3X_1(f) - 2C(f)]\,\varphi_M.$$

Форма ω_A удовлетовряет условиям утверждения 3: $\psi = 1$, $\mathrm{Pf}\,\omega_0 = \mathrm{Pf}\,\omega = (1 + p_1^2 + p_2^2)^{-3/2}\varphi_A$. Поэтому справедливо

С л е д с т в и е 3.2. *Функция* $f \in \mathrm{Sym}\,\omega_A$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка*

$$[f, (1+p_1^2+p_2^2)^{-3/2}\varphi_A] = [2C(f) - 5X_1(f)](1+p_1^2+p_2^2)^{-3/2}\varphi_A.$$

5. Уравнение для функций f из $\mathrm{Sym}\,\omega$: $L_f(\omega) - \lambda(f)\,\omega \in \mathscr{C}$ для задач Минковского и Александрова можно представить в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(1) \quad X_f(k) + k\left(\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{df}{dq_1}\right) + \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{df}{dq_2}\right)\right) = [-X_1(f) + C(f)]\,k;$$

$$(2) \quad X_f(w) - w\left(\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + \frac{d}{dq_2}\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\right) = [-X_1(f) + C(f)]\,w;$$

$$(3) \quad k\,\frac{d^2 f}{dq_1^2} + w\,\frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2} = 0;$$

$$(4) \quad k\,\frac{d^2 f}{dq_2^2} + w\,\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0;$$

$$(5) \quad k\,\frac{d^2 f}{dq_1\,dq_2} - w\,\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial p_2} = 0,$$

где для задачи Минковского $k = \varphi_M^{-1}$, $w = 1$, а для задачи Александрова $k = (1+p_1^2+p_2^2)^{-3/2}$, $w = \varphi_A$.

Вычисляя δ-комогологии символа системы (1)–(5) и используя критерий Гольдшмидта (см. [4]), получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Система* (1)–(5) *инволютивна.*

6. Найдем точечные (т.е. порожденные преобразованиями $J^0\mathbf{R}^2$) симметрии задач Минковского и Александрова. Точечные симметрии вычислялись рядом авторов в аналогичных задачах дифференциальной геометрии (см., например, [5]).

Для описания полной алгебры инфинитезимальных точечных симметрий задачи Минковского рассмотрим 12-мерную алгебну $\mathfrak{I}_{12}$ аффинных преобразований $\mathbf{R}^3$: полупрямое произведение алгебры $\mathfrak{I}_3 \cong \mathbf{R}^3$ на $gl(3)$. В нашем случае алгебра $\mathfrak{I}_3$ порождена функциями 1, p_1, p_2, алгебра $gl(3)$ – функциями q_1, q_2, p_1q_2, p_2q_1, p_1q_1+u, p_2q_2+u, up_1, up_2, $u-p_1q_1-p_2q_2$. Преобразования из алгебры $\mathfrak{I}_3$ образуют тривиальные точечные симметрии задачи Минковского: они являются симметриями при любой функции φ_M. Чтобы описать нетривиальные точечные симметрии задачи Минковского из алгебры $gl(3)$ рассмотрим представление T_M алгебры $gl(3)$ в линейные дифференциальные операторы 1-го порядка на $J^1\mathbf{R}^2$:

$$T_M(f) = \mathrm{ad}f + 3\,[\mathrm{ad}f(1) + 2\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}f\,|\,\mathfrak{I}_3)], \quad f \in gl(3),$$

$$\mathrm{ad}f(Q) = [Q, f], \quad Q \in C^\infty(J^1\mathbf{R}^2).$$

Т е о р е м а 4. *Полная алгебра инифинитезимальных точечных симметрий задачи Минковского – полупрямое произведение алгебры* $\mathfrak{I}_3 \cong \mathbf{R}^3$ *(тривиальные симметрии) на алгебру изотропии функции* φ_M *при представлении* T_M *(нетривиальные симметрии).*

С л е д с т в и е 4.1. *Задача Минковского обладает инфинитезимальными нетривиальными точечными симметриями тогда и только тогда, когда функция* φ_M

удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\det\left[\frac{\partial^{j-1}}{\partial p_1^{j-1}}\left(p_1^l\,\frac{\partial^l G_i^M}{\partial p_2^l}\right)\right]_{i,j=1,\dots,9} = 0, \qquad l = 0,\ 1, \dots,\ 36.$$

Здесь

$$G^M = \left(\varphi_M,\ \frac{\partial\varphi_M}{\partial p_1},\ \frac{\partial\varphi_M}{\partial p_2},\ p_1\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_1},\ p_2\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_1},\ p_1\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_2},\ p_2\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_2},\right.$$

$$\left. p_1\left(p_1\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_2} - 4\varphi_M\right);\ p_2\left(p_1\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi_M}{\partial p_2} - 4\varphi_M\right)\right).$$

Имея в виду описание полной алгебры инфинитезимальных точечных симметрий задачи Александрова, рассмотрим 4-мерную алгебру Ли $\mathbf{R}^2 \oplus co(2)$ группы подобия $\mathbf{R}^2$, порожденную функциями $p_1, p_2, p_1q_2 - p_2q_1, u - p_1q_1 - p_2q_2$. Введем алгебру $\mathcal{J}_5 = [\mathbf{R}^2 \oplus co(2)] \oplus 1\cdot\mathbf{R}^1$ как векторное пространство и при этом $[p_1, 1] = [p_2, 1] = [p_1q_2 - p_2q_1, 1] = 0$, $[u - p_1q_1 - p_2q_2, 1] = -1$.

Преобразования из $\mathbf{R}^1$ – тривиальные точечные симметрии задачи Александрова, т.е. симметрии при любой функции φ_A. Для описания нетривиальных точечных симметрий задачи Александрова из алгебры $\mathbf{R}^2 \oplus co(2)$ рассмотрим представление T_A алгебры $\mathbf{R}^2 \oplus co(2)$ в линейные дифференциальные операторы 1-го порядка на $J^1\mathbf{R}^2$:

$$T_A(f) = \operatorname{ad} f - 3\operatorname{ad} f(1), \qquad f \in \mathbf{R}^2 \oplus co(2).$$

Т е о р е м а 5. *Полная алгебра инфинитезимальных точечных симметрий задачи Александрова – полупрямое произведение алгебры* $\mathbf{R}^1$ *(тривиальная симметрия) на алгебру изотропии функции* φ_A *при представлении* T_A *(нетривиальные симметрии)*.

С л е д с т в и е 5.1. *Задача Александрова обладает нетривиальными инфинитезимальными точечными симметриями из алгебры* $\mathbf{R}^2 \oplus co(2)$ *только и только тогда, когда функция* φ_A *удовлетворяет уравнениям*:

$$\det\left[\frac{\partial^{j-1}}{\partial q_1^{j-1}}\left(q_1^l\,\frac{\partial^l G_i^A}{\partial q_2^l}\right)\right]_{i,j=1,2,3,4} = 0, \qquad l = 0,\ 1, \dots, 6.$$

Здесь

$$G^A = \left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial q_1},\ \frac{\partial\varphi_A}{\partial q_2},\ \frac{\partial}{\partial q_1}(q_1\varphi_A) + \frac{\partial}{\partial q_2}(q_2\varphi_A),\ \frac{\partial}{\partial q_1}(q_2\varphi_A) - \frac{\partial}{\partial q_2}(q_1\varphi_A)\right).$$

7. Класс контактных симметрий шире класса точечных. Примером неточечной симметрии служит симметрия задачи Минковского при постоянной положительной $\varphi_M = K$, порожденная композицией двух контактных преобразований: растяжения по q_1, q_2 в $\sqrt{K}$ раз и преобразования Лежандра.

Опишем алгебру $\operatorname{Sym}\omega$; $\omega = \omega_M, \omega_A$ в аналитической ситуации, т.е. найдем все аналитические решения системы (1) – (5) в предположениях аналитичности функций w, k. В этом случае инволютивность системы (1) – (5), гарантированная теоремой 3, даст по теореме Картана–Келера (см. [4]) интегрируемость в аналитических функциях. При описании воспользуемся следующим подходом: на специальном двумерном подмногообразии в $J^1\mathbf{R}^2$ зададим значение функции $f \in \operatorname{Sym}\omega$ и ее первых производных, а по этим данным восстановим всю функцию, решая систему дифференциальных уравнений 1-го порядка с данными на подмногообразии.

Точнее рассмотрим вложение i: $M_0^2 \hookrightarrow J^1\mathbf{R}^2$ плоскости (p_1, p_2) в $J^1\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{R}^5$ при $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $u = 0$. Имея в виду решение системы (1)–(5), рассмотрим задачу $D_\omega(F_1^0, F_2^0, F_3^0, F_4^0, C)$ интегрирования системы дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно 4 неизвестных аналитических функций F_i на $J^1\mathbf{R}^2$, значения которых F_i^0, $i = 1, 2, 3, 4$, заданы на подмногообразии M_0^2:

$$\frac{dF_3}{dq_1} + \frac{dF_4}{dq_2} = [\Phi(F) - C]\,W, \qquad \frac{dF_1}{dq_2} - \frac{\partial F_4}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{dF_1}{dq_1} + \frac{\partial F_4}{\partial p_2} = 0,$$

$$\frac{\partial(k^{-1}F_1)}{\partial p_1} - \frac{\partial(k^{-1}F_2)}{\partial p_2} - \frac{d(w^{-1}F_3)}{dq_1} + \frac{d(w^{-1}F_4)}{dq_2} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dq_2} + \frac{\partial F_3}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial(k^{-1}F_1)}{\partial p_2} - \frac{d(w^{-1}F_4)}{dq_1} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dq_1} - \frac{\partial F_3}{\partial p_2} = 0, \qquad \frac{\partial(k^{-1}F_2)}{\partial p_1} - \frac{d(w^{-1}F_3)}{dq_2} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{d\Phi}{dq_1}\,k = 0, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}\,w = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\,k = 0, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_2}\,w = 0,$$

Здесь функция

$$\Phi(F) = 0{,}25\left[F_1\frac{\partial(k^{-1})}{\partial p_1} + F_2\frac{\partial(k^{-1})}{\partial p_2} - F_3\frac{\partial(w^{-1})}{\partial q_1} - F_4\frac{\partial(w^{-1})}{\partial q_2}\right] + 0{,}5C.$$

C – константа.

Обозначим через $I_\omega(C)$ множество триад (f_0, f_1, f_2) аналитических функций на M_0^2, удовлетворяющих уравнению связи

$$0{,}75\left[f_1\frac{\partial \ln k}{\partial p_1} + f_2\frac{\partial \ln k}{\partial p_2}\right] + 0{,}25\left[\frac{\partial f_0}{\partial p_1}\,i^*\frac{\partial \ln w}{\partial q_1} + \frac{\partial f_0}{\partial p_0}\,i^*\frac{\partial \ln w}{\partial q_2}\right] - 0{,}5C = 0.$$

Введем отображение $R_\omega(C)$: $I_\omega(C) \to \mathrm{Sym}\,\omega$. По триаде $(f_0, f_1, f_2) \in I_\omega(C)$ решим задачу $D_\omega\left(kf_1, kf_2, i^*w\dfrac{\partial f_0}{\partial p_1}, i^*w\dfrac{\partial f_0}{\partial p_2}, C\right)$. Ее разрешимость следует из теоремы 3 и теоремы Картана–Келера (см. [4]). Затем по найденным функциям F_i, $i = 1, 2, 3, 4$, определим функцию $f \in \mathrm{Sym}\,\omega$: $df = k^{-1}F_1dq_1 + k^{-1}F_2dq_2 + w^{-1}F_3dp_1 + w^{-1}F_4dp_2 + \Phi(F)\cdot U_1$, $f|_{M_0^2} = f_0$.

Т е о р е м а 6. *В аналитической ситуации при w, $k \neq 0$ поточечно отображение $R_\omega(C)$ – изоморфизм алгебр Ли, причем $C = C(R_\omega(C)a)$, $a \in I_\omega(C)$.*

10. Законы сохранения задач Минковского и Александрова дают набор геометрических инвариантов на решениях этих задач. В качестве примера укажем на теорему Гаусса–Бонне, которая следует из существования закона сохранения

$$\theta_1 = (1+p_2^2)^{-1}(1+p_1^2+p_2^2)^{-1/2}p_1 dp_2 - \quad \mathcal{F}_A dq_2, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_A}{\partial q_1} = \varphi_A$$

у уравнения Александрова. Дадим описание всех законов сохранения задач Минковского и Александрова (см. п. 3).

Теорема 7. *В предположениях теоремы* 6 *алгебра Ли* $\mathrm{CL}(\omega)$ *изоморфна алгебре Ли* $I_\omega(0)$ *при* $\omega = \omega_M$, ω_A, *причем* $\mathrm{CL}(\omega) = N^{-1} \circ R_\omega(0)[I_\omega(0)]$.

В заключение автор благодарит В.В. Лычагина за постоянное внимание к работе.

Гидрометеорологический научно-исследовательский центр СССР,
Москва

Поступило
19 III 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Д., Погорелов А.В.* В сб.: Тр. IV Всес. матем. съезда. Л.: Изд. АН СССР, 1963, т. 1, с. 3–16. 2. *Лычагин В.В.* – УМН, 1979, т. 34, вып. 1, с. 137–165. 3. *Лычагин В.В.* – УМН, 1975, т. 30, вып. 1, с. 101–171. 4. *Goldshmidt H.* – Ann. Math., 1967, vol. 86, № 2, p. 246–270. 5. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М.; Л.: ОГИЗ, 1947, ч. 1.

УДК 517.947 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР О.А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, Н.Н. УРАЛЬЦЕВА

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОСОБЕННОСТЕЙ

В наших работах [1–5] по эллиптическим и параболическим уравнениям вида

$$(1) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0, \; x \in \Omega;$$

$$(2) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t, u, u_x) u_{x_i x_j} - u_t + a(x, t, u, u_x) = 0, \; (x, t) \in Q,$$

имеется ряд результатов по априорным оценкам для случаев, когда функции $a(x, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ имеют неограниченные по x и (x, t) соответственно, а именно, когда

$$(3) \qquad |a(x, u, p)| \leqslant \mu_1 p^2 + \Phi_1(x), \; \Phi_1 \in L_q(\Omega);$$

$$(4) \qquad |a(x, t, u, p)| \leqslant \mu_1 p^2 + \Phi_1(x, t), \; \Phi_1 \in L_{q+2}(Q),$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $Q = \Omega \times (0, T)$. При таких a и условиях равномерной эллиптичности

$$(5) \qquad \nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2$$

для (1) и равномерной параболичности

$$(6) \qquad \nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2$$