В. М. Логинов, Статистика энергии заряженной частицы в слоисто-неоднородном электрическом поле, *Письма в ЖТФ*, 1983, том 9, выпуск 9, 552–554

Письма в ЖТФ, том 9, вып. 9 12 мая 1983 г.

СТАТИСТИКА ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В.М. Логинов

Рассматривается частица массы m заряда q, проходящая слой, в котором электрическое поле $\vec{E}(\vec{x})=(E(x), 0, 0)$ моделируется случайным процессом телеграфного типа. Выведено точное уравнение для характеристической функции для разности энергии частицы на входе и выходе из слоя и получено его решение во всей области параметров задачи. В частности, показано, что величина дисперсии указанной разности энергий растет как x^2 при $x \ll R$ и как x при $x \gg R$, где x – толщина слоя, R – корреляционный радиус поля. Проведено сравнение с диффузионным пределом, в котором дисперсия всегда растет линейно с толщиной.

Задача о прохождении заряженных частиц сквозь слоистые среды с неоднородным распределением электрических полей в них представляет интерес для многих разделов физики плазмы, космофизики, физики твердого тела и т.п. Особенно интересны случаи, когда распределение электрических полей является хаотическим во времени и пространстве с некоторыми характерными частотами и радиусами спада корреляций. Сравнительно хорошо изучена ситуация, когда значения указанных параметров отвечают так называемому диффузионному приближению (см., например, [1]), соответствующему высокочастотным флуктуациям поля во времени или мелкомасштабным флуктуациям в пространстве. Влияние конечности корреляционных радиусов на осредненную динамику частиц исследовано еще недостаточно, причем даже в рамках простейших модельных постановок.

В данной заметке рассматривается свободная частица в электрическом поле $E(x)$, моделируемом случайным телеграфным сигналом, т.е. марковской случайной функцией, принимающей в случайных точках пространства значения $\pm \sigma_E$. Скачки от одного значения к другому происходят статистически независимо с характерным радиусом „появления" R (пуассоновская статистика). Корреляционная функция такого процесса имеет вид (более подробные сведения о процессе можно найти в [2]): $\langle E(x)E(x+r)\rangle = \sigma_E^2 \exp\left(-\frac{|r|}{R}\right)$.

Описание статистических свойств частицы в слоях с такими полями будем проводить с помощью характеристической функции ХФ: $\psi_x(\mu)=\langle \exp(i\mu\Delta(x))\rangle$, где μ – параметр, $\Delta(x)=\mathcal{E}(x)-\mathcal{E}(0)$, $\mathcal{E}(x)$ – кинетическая энергия частицы в точке x, угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $E(x)$. Отметим, что, зная ХФ $\psi_x(\mu)$, простым дифференцированием ее по μ можно вычислить любые одноточечные моменты разности энергии $\Delta(x)$, например, $\langle \Delta^n(x)\rangle = \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n \psi_x(\mu)}{\partial \mu^n}\Big|_{\mu=0}$, $n=1, 2,\ldots$ Кроме того, с помощью $\psi_x(\mu)$ можно определить и одноточечную плотность вероятности $P(x, \Delta)$, поскольку $P(x,\Delta)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\times$ $\times(-i\mu\Delta)\psi_x(\mu)\,d\mu$; $P(x,\Delta)d\Delta$ есть вероятность того, что для слоев толщины x разность энергии попадает в интервал $(\Delta, \Delta+d\Delta)$.

Определим уравнение для ХФ $\psi_x(\mu)$. Дифференцируя ее по x, получаем

$$\frac{\partial\psi_x(\mu)}{\partial x}=i\mu\left\langle e^{i\mu\Delta(x)}\frac{\partial\Delta(x)}{\partial x}\right\rangle=i\mu q\left\langle e^{i\mu\Delta(x)}E(x)\right\rangle. \qquad (1)$$

Из уравнения движения частицы $\Delta(x)=q\int_0^x E(x')dx'$ следует, что справа в (1) стоит коррелятор между случайным процессом $E(x)$ и запаздывающим функционалом $\exp(i\mu\Delta)$ от него. Для преобразования этого коррелятора к виду $\hat{L}\psi_x(\mu)$, где $\hat{L}$ некоторый оператор, не содержащий случайных параметров, удобно воспользоваться формулами дифференцирования (ФД) статистических средних (см. [3-5]). ФД для случайного телеграфного сигнала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle E(x)\Phi_x\rangle=-\frac{1}{R}\langle E(x)\Phi_x\rangle+\left\langle E(x)\frac{d\Phi_x}{dx}\right\rangle, \qquad (2)$$

где $\Phi_x=\Phi_x[E(y)]$ – функция x и запаздывающий ($y<x$) функционал процесса E. В рассматриваемом случае в качестве такого функционала выступает $\exp(i\mu\Delta(x))$. Применяя к среднему $\Pi_x(\mu)=$ $=\langle\exp(i\mu\Delta(x))E(x)\rangle$ ФД (2) и используя уравнение, которому подчиняется $\Delta(x)$, получаем

$$\frac{d\Pi_x(\mu)}{dx}=-\frac{1}{R}\Pi_x+i\mu q\sigma_E^2\psi_x. \qquad (3)$$

Здесь использовано замечательное свойство процесса, что в любой точке $x\ \langle E^2(x)\rangle\equiv\sigma_E^2$.

Полученная система уравнений (1), (3) является точной и замкнутой. Любопытно, что она эквивалентна уравнению гармонического осциллятора с декрементом „затухания" $\delta=\frac{1}{2R}$ и собственной „частотой" $\omega=\mu q\sigma_E$. Решение этого уравнения с начальными условиями $\psi_0=1$, $\left.\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right|_{x=0}=\langle E(x)\rangle=0$ имеет вид

$$\psi_x(\mu)=e^{-\delta x}\left[\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\,sh\sqrt{\delta^2-\omega^2}\,x+ch\sqrt{\delta^2-\omega^2}\,x\right]. \qquad (4)$$

Отметим, что решение (4) справедливо при произвольных соотношениях между параметрами задачи.

Используем явный вид (4) для получения $\langle\Delta^2(x)\rangle$. Очевидно, что $\langle\Delta(x)\rangle=0$, т.е. средняя энергия частицы не меняется при прохождении сквозь слой. Дисперсия же Δ меняется существенно. Действительно,

$$\langle\Delta^2(x)\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{q\sigma_E}{\delta}\right)^2\left(\varkappa-1+e^{-\varkappa}\right), \qquad (5)$$

где $\varkappa=2\delta x$. Видно, что для слоев, толщина которых $\varkappa\ll 1$, величина дисперсии растет квадратично по x, $\langle\Delta^2(x)\rangle\approx\frac{1}{4}\left(\frac{q\sigma_E}{\delta}\right)^2\varkappa^2$. По мере увеличения толщины слоя квадратичный рост сменяется линейным, при $x \gg 1$, $\langle\Delta^2(x)\rangle \approx \frac{1}{2}\left(\frac{q\sigma_E}{\delta}\right)x$. Отметим, что для так называемого диффузионного приближения, когда $R \to 0$ и $\sigma_E^2 \to \infty$, но $\begin{cases} \lim R\sigma_E^2 = 2D = const \\ R \to 0 \end{cases}$ всегда $\langle\Delta^2(x)\rangle = 2Dx$, где D – коэффициент диффузии.

Таким образом, наличие у поля конечного пространственного масштаба спада корреляций ведет к качественно иной осредненной динамике частиц. Отличие от диффузионного режима наиболее сильно проявляется при прохождении частицами слоев с $x \lessdot R$. В последнем случае набор энергии идет значительно медленнее, чем при диффузионном режиме. Подчеркнем, что результат (5) нечувствителен к выбору стохастической модели поля $E(x)$. Он имеет место, например, если моделировать электрическое поле $E(x)$ гауссовским марковским процессом или процессом Кубо–Андерсона (последний допускает в отличие от рассмотренного в заметке случайного телеграфного сигнала. произвольное распределение по амплитудам скачков).

Представляется интересным по величине разброса параметра $\Delta(x)$ в зависимости от толщин, проходимых частицей слоев, судить о корреляционных свойствах электрического поля в этих слоях, в частности о его корреляционном радиусе.

Литература

[1] В.И. Кляцкин, В.И. Татарский. УФН, 110, 499 (1973).
[2] A. Brissaud, U. Frisch. J. Math. Phys., 15, 524 (1974).
[3] В.Е. Шапиро, В.М. Логинов. Письма в ЖТФ, 2, 1021 (1976).
[4] В.М. Логинов, В.Е. Шапиро. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 5, 42 (1980).
[5] В.Е. Шапиро, В.М. Логинов. Динамические системы при случайных воздействиях. Простые средства анализа, „Наука", Новосибирск (1982).

Поступило в Редакцию
22 ноября 1982 г.
В окончательной редакции 4 февраля 1983 г.