УДК 517.956.223+517.575 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI: 10.33048/mattrudy.2021.24.204 2021, том 24, № 2, 46–64

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В. В. Карачик

Приводится представление решения задачи Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре через решения задач Дирихле для уравнения Лапласа.

Ключевые слова и фразы: полигармоническое уравнение, задача Дирихле, функция Грина, формула Альманси.

§1. Введение

Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина для задачи. Много работ посвящено построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач. Функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана и Робина в двумерном диске построены с помощью гармонических функций Грина задачи Дирихле в [14]. В [21] дано явное представление функции Грина задачи Робина для уравнения Пуассона, а в [9; 10] приведен явный вид функции Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнения в единичном шаре. Явный вид функции Грина $G_m(x,\xi)$ для полигармонического уравнения [17] в единичном шаре построен различными способами в работах [5; 8; 15; 16] и др. Например, в [16] показано, что функция $G_m(x,\xi)$ имеет вид

$$G_m(x,\xi) = k_m|x-\xi|^{2m-n}\int_1^{g(x,\xi)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}\,dt, \tag{1}$$

где

$$g(x,\xi) = \frac{1}{|x-\xi|}\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|, \quad k_m = \frac{1}{\omega_n((2m-2)!)^2},$$

а в [15] построена функция Грина $G_m(x,\xi)$ в случае $n=2$. В работе [4] пошагово строится функция Грина $G_m(x,\xi)$, а в [5] находится явное представление функции Грина $G_m(x,\xi)$ в зависимости от четности n и положительности величины $2m-n$. В [8] дается представление полиномиального

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (постановление № 211 от 16.03.2013, соглашение № 02.A03.21.0011).

решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре с полиномиальными граничными данными и правой частью, которое нелегко получить в явном виде, зная функцию $G_m(x, \xi)$.

В работе [12] исследовались интегральные представления решений и функции Грина задач Навье и Рикье — Неймана для бигармонического уравнения в шаре. В частности, было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ *и* $f \in C^1(\bar{S})$. *Тогда решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения* $\Delta^2 u(x) = f(x)$ *при* $n > 4$ *или* $n = 3$ *можно представить в виде*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta_\xi G_4(x, \xi)\, ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_1(\xi) \Delta_\xi G_4(x, \xi)\, ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_S G_4(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad (2)$$

где $G_4(x, \xi)$ — *функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения* [9].

Далее в [11] было установлено, что решение (2) однородного бигармонического уравнения может быть преобразовано к более простому виду

$$u(x) = u_0(x) + \frac{1 - |x|^2}{2} \Lambda u_0(x) - \frac{1 - |x|^2}{2} u_1(x), \quad (3)$$

где гармонические функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — решения задач Дирихле со значениями $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на границе ∂S и оператор Λ имеет вид $\Lambda u = \sum_{k=1}^{n} x_k u_{x_k}$. Очевидно, что функции $u_i(x)$ при $i = 0, 1$ могут быть представлены в виде

$$u_i(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_i(\xi)\, ds_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n} \varphi_i(\xi)\, ds_\xi, \quad (4)$$

где $G_2(x, \xi)$ — известная (см., например, [3]) функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Заметим, что в работах [18–20] также исследовались представления решений задач Дирихле и Неймана для бигармонического и полигармонического уравнений.

Целью настоящей работы является получение формулы, аналогичной (3), но без привлечения функции Грина (1), для представления решения задачи Дирихле для m-гармонического уравнения в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (5)$$

$$u|_{\partial \Omega} = \varphi_0(s), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\Big|_{\partial S} = \varphi_{m-1}(s), \quad s \in \partial S, \quad (6)$$

где ν — внешняя нормаль к единичной сфере ∂S. Необходимая гладкость функций $f(x)$ и $\varphi_k(s)$, $k = 0, \ldots, m - 1$, будет указана ниже.

§2. Предварительные утверждения

Аналогично представлению решения задачи Дирихле в бигармоническом случае (3) будем искать m-гармоническую в S функцию, удовлетворяющую граничным условиям (6) в виде

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m-1}p_k(x)(|x|^2-1)^k, \tag{7}$$

где $p_k(x)\in C^{m-1}(\bar S)$, $k=0,\dots,m-1$, — некоторый набор гармонических в S функций. Требуемая выше гладкость функций $p_k(x)$ необходима, поскольку функция $u(x)$ должна удовлетворять граничным условиям (6).

Пусть $P_k(t)=\sum_{s=0}^k c_st^s$ — некоторый многочлен. Определим факториальный многочлен, соответствующий многочлену $P_k(t)$ равенством

$$P_{[k]}(t)=\sum_{s=0}^k c_st^{[s]},$$

где «факториальная» степень $t^{[k]}$ определяется равенством [2]

$$t^{[k]}=t(t-1)\cdots(t-k+1).$$

Оператор $\Lambda u=\sum_{k=1}^n x_ku_{x_k}$ обладает важным граничным свойством

$$\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k}\Big|_{\partial S}=\Lambda^{[k]}u|_{\partial S}, \tag{8}$$

и функция $\Lambda p(x)$ гармоническая, если функция $p(x)$ гармоническая.

Для применения оператора Λ к произведению функций необходима следующая лемма.

Лемма 1 [8]**.** *Пусть $p,q\in C^k(S)$. Тогда для оператора Λ справедливо равенство*

$$\Lambda^{[k]}(pq)=\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}\Lambda^{[i]}p\Lambda^{[k-i]}q. \tag{9}$$

Докажем следующее основное соотношение.

Теорема 2. *Пусть для заданных в S гармонических функций $q_i(x)\in C^{k_i}(\bar S)$, $i=0,\dots,m-1$, при некоторых $k_i\ge 0$ найдутся такие гармонические функции $p_i(x)\in C^{m-1}(\bar S)$, $i=0,\dots,m-1$, что выполнены равенства*

$$r_s(x)=\sum_{k=s}^{m-1}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}p_k(x),\quad s_j(x)=\sum_{s=0}^{m-1}(2s)^{[j]}r_s(x),$$
$$q_i(x)=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\Lambda^{[i-j]}s_j(x), \tag{10}$$

где $s, j, i = 0, \ldots, m-1$. Тогда при таких $p_0(x), \ldots, p_{m-1}(x)$ m-гармоническая функция $u(x)$, находимая из (7), удовлетворяет условиям Дирихле

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\Big|_{\partial S} = q_i(x)|_{\partial S}, \quad i = 0, \ldots, m-1. \tag{11}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что в силу (9)

$$\Lambda^{[i]}u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda^{[i]}(p_k(x)(|x|^2-1)^k) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Lambda^{[i-j]}p_k(x)\Lambda^{[j]}(|x|^2-1)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Lambda^{[i-j]}p_k(x) \sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}(2s)\cdots(2s-j+1)|x|^{2s}$$

при $i = 0, \ldots, m-1$, а значит, в соответствии с формулами (8) и (10) и ввиду требуемой гладкости от $p_i(x)$ и $q_i(x)$ при $i = 0, \ldots, m-1$ имеем

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\Big|_{\partial S} = \Lambda^{[i]}u(x)_{|\partial S} = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\Lambda^{[i-j]}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}(2s)^{[j]}p_k(x)_{|\partial S}$$
$$= \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\Lambda^{[i-j]}\sum_{s=0}^{m-1}(2s)^{[j]}\sum_{k=s}^{m-1}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}p_k(x)_{|\partial S}$$
$$= \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\Lambda^{[i-j]}\sum_{s=0}^{m-1}(2s)^{[j]}r_s(x)(x)_{|\partial S} = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\Lambda^{[i-j]}s_j(x)_{|\partial S} = q_i(x)_{|\partial S}. \quad \square$$

Из доказанной теоремы следует, что если по заданным гармоническим в S функциям $\{q_i(x) \in C^{k_i}(\bar{S}), i = 0, \ldots, m-1\}$ удастся найти функции $\{s_j(x), j = 0, \ldots, m-1\}$, а затем $\{r_s(x), s = 0, \ldots, m-1\}$ и, наконец, $\{p_k(x) \in C^{m-1}(\bar{S}), k = 0, \ldots, m-1\}$ такие, что выполнены равенства (10), то m-гармоническая функция $u(x)$ будет удовлетворять граничным условиям (7). Поэтому нужно обратить преобразования (10). Для этого необходимы вспомогательные построения.

Пусть некоторый полином $P(\lambda)$ записан в виде

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} p_k\lambda^{[k]}. \tag{12}$$

Рассмотрим следующую операцию «факториального» дифференцирования полиномов:

$$P^{(0)}(\lambda) = P(\lambda), \quad P^{(k)}(\lambda) = \left(P^{(k-1)}(\lambda)\right)^{(1)} = P^{(k-1)}(\lambda+1) - P^{(k-1)}(\lambda). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что дифференцирование понижает степень полинома на 1 и

$$\bigl(\lambda^{[k]}\bigr)^{(1)} = (\lambda+1)^{[k]} - \lambda^{[k]} = \lambda^{[k-1]}\bigl(\lambda + 1 - (\lambda - k + 1)\bigr) = k\lambda^{[k-1]},$$

а значит,

$$(\lambda^{[k]})^{(j)} = \begin{cases} k^{[j]}\lambda^{[k-j]}, & k \geq j; \\ 0, & k < j. \end{cases}$$

Поэтому из (12) следует

$$P^{(k)}(0) = \sum_{i=k}^{m} p_i i^{[k]} \lambda^{[i-k]}{}_{|\lambda=0} = p_k k!,$$

а значит, верно равенство

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\lambda^{[k]}. \tag{14}$$

Более того, из определения производной вытекает равенство

$$P^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} P(\lambda+i),$$

и, следовательно, коэффициенты полинома $P(\lambda)$ из (12) можно вычислить по формуле

$$p_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}P(i). \tag{15}$$

Равенство (15) легко доказывается по индукции. При $k = 1$ оно совпадает с определением производной. Если оно выполнено для $(k-1)$-й производной, то

$$\begin{aligned} P^{(k)}(\lambda) &= P^{(k-1)}(\lambda+1) - P^{(k-1)}(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}P(\lambda+1+i) + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k-1}{i}P(\lambda+i) \\ &= P(\lambda+k) + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i}\left(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i}\right)P(\lambda+i) + P(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}P(\lambda+i), \end{aligned}$$

а значит, шаг индукции доказан.

Теперь рассмотрим последнее преобразование из (10).

Лемма 2. *Пусть операторная матрица $B(\Lambda)$ имеет вид*

$$B(\Lambda) = \left\{ \binom{i}{j} \Lambda^{[i-j]} \right\}_{i,j=\overline{0,m-1}},$$

где $\binom{i}{j} = 0$, *если* $i < j$. *Тогда*

$$(B(\Lambda))^{-1} = \left\{ \binom{i}{j} (-\Lambda)^{[i-j]} \right\}_{i,j=\overline{0,m-1}}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A(\Lambda) = \left\{ \binom{i}{j} (-\Lambda)^{[i-j]} \right\}_{i,j=\overline{0,m-1}}$$

и вычислим произведение

$$B(\Lambda)A(\Lambda) = (c_{i,j}(\Lambda))_{i,j=\overline{0,m-1}},$$

где

$$c_{i,j}(\Lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{i}{k} \Lambda^{[i-k]} \binom{k}{j} (-\Lambda)^{[k-j]}.$$

Пусть $i > j$. Поскольку $\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j}$, то

$$\begin{aligned} c_{i,j}(\Lambda) &= \binom{i}{j} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} \Lambda^{[i-k]} (-\Lambda)^{[k-j]} \\ &= \binom{i}{j} \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k} \Lambda^{[i-j-k]} (-\Lambda)^{[k]}. \end{aligned} \tag{16}$$

В силу биномиальной теоремы для факториальных степеней имеем

$$0 = \big(\Lambda + (-\Lambda)\big)^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Lambda^{[m-k]} (-\Lambda)^{[k]},$$

где $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что в случае $i > j$ будем иметь $c_{i,j} = 0$. При $i = j$ из (16) найдем

$$c_{i,i} = \binom{i}{i} \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \Lambda^{[-k]} (-\Lambda)^{[k]} = 1.$$

Если же $i < j$, то, поскольку $\binom{i}{k}\binom{k}{j} = 0$, из (16) вытекает, что $c_{i,j} = 0$. Следовательно, $B(\Lambda)A(\Lambda) = E$ и, значит, $(B(\Lambda))^{-1} = A(\Lambda)$. □

Следствие 1. *Из леммы 2 вытекает, что последнее преобразование из (10) обращается в виде*

$$s_i(x)=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-\Lambda)^{[i-j]}q_j(x),\quad i=0,\ldots,m-1,$$

так как если $Q(x)=(q_0(x),\ldots,q_{m-1}(x))$, $S(x)=(s_0(x),\ldots,s_{m-1}(x))$, *то*

$$Q(x)=B(\Lambda)S(x)\Rightarrow S(x)=A(\Lambda)Q(x).$$

Рассмотрим полиномы

$$h(\lambda)=\prod_{k=0}^{m-1}(\lambda-2k),\quad h_i(\lambda)=\frac{h(\lambda)}{(\lambda-2i)h'(2i)},\ i=0,\ldots,m-1,\tag{17}$$

где

$$h'(2i)=\prod_{k=0,\,k\neq i}^{m-1}(2i-2k)=(-1)^{m-i-1}(2i)!!(2m-2i-2)!!\neq 0.$$

Ясно, что $\deg h_i(\lambda)=m-1$. Определим по полиномам $h_i(\lambda)$ коэффициенты $h_i^{(j)}$ в соответствии с формулой (12) следующими равенствами:

$$h_i(\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}h_i^{(j)}\lambda^{[j]},\quad i=0,\ldots,m-1.\tag{18}$$

В силу (14) имеем $h_i^{(j)}=h_i^{(j)}(0)/\mathrm{j}!$.

Лемма 3. *Пусть*

$$C=\left((2j)^{[i]}\right)_{i,j=\overline{0,m-1}}=\begin{pmatrix}1&1&1&\ldots&1\\0&2^{[1]}&4^{[1]}&\ldots&(2m-2)^{[1]}\\&&&\ldots&\\0&2^{[m-1]}&4^{[m-1]}&\ldots&(2m-2)^{[m-1]}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C^{-1}=\mathbb{H}_m\equiv\left(h_i^{(j)}\right)_{i,j=\overline{0,m-1}}.\tag{19}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что при $i=1,\ldots,m-1$

$$\left(0,2^{[i]},\ldots,(2m-2)^{[i]}\right)\cdot\mathbb{H}_m=\left(\sum_{k=0}^{m-1}(2k)^{[i]}h_k^{(0)},\ldots,\sum_{k=0}^{m-1}(2k)^{[i]}h_k^{(m-1)}\right).\tag{20}$$

Рассмотрим следующие полиномы степени $m-1$:

$$g_i(\lambda)=\sum_{k=0}^{m-1}(2k)^{[i]}h_k(\lambda)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2k)^{[i]}}{h'(2k)}\frac{h(\lambda)}{(\lambda-2k)}.$$

Используя обозначения из формулы (18), запишем

$$g_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} (2k)^{[i]} \sum_{j=0}^{m-1} h_k^{(j)} \lambda^{[j]} = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{[j]} \sum_{k=0}^{m-1} (2k)^{[i]} h_k^{(j)} \equiv \sum_{j=0}^{m-1} g_i^{(j)} \lambda^{[j]},$$

а значит, (20) можно переписать в виде

$$\big(0, 2^{[i]}, \ldots, (2m-2)^{[i]}\big) \cdot \mathbb{H}_m = \big(g_i^{(0)}, g_i^{(1)}, \ldots, g_i^{(m-1)}\big). \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что при $j = 0, \ldots, m-1$ верны равенства

$$g_i(2j) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2k)^{[i]}}{h'(2k)} \frac{h(2j)}{(2j-2k)} = \frac{(2j)^{[i]}}{h'(2j)} h'(2j) = (2j)^{[i]},$$

а поскольку $g_i(\lambda)$ — полином степени $m-1$ и верны равенства $(g_i(\lambda) - \lambda^{[i]})_{|\lambda=2j} = 0$ в m точках вида $2j$ при $j = 0, \ldots, m-1$, то $g_i(\lambda) \equiv \lambda^{[i]}$. Следовательно, из (21) вытекает

$$\big(0, 2^{[i]}, \ldots, (2m-2)^{[i]}\big) \cdot \mathbb{H}_m = (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{i}, 0, \ldots, 0).$$

Поэтому $C\mathbb{H}_m = E$. Это равенство доказывает лемму. $\square$

Замечание 1. Определитель матрицы C представляет собой «факториальный» вариант определителя Вандермонда $W[0, 2, \ldots, 2l-2]$ и равен ему.

Замечание 2. В работе [6, теорема 4] установлена связь p-й строки матрицы $\mathbb{H}_m$ при $0 \le p \le m-1$ с коэффициентами в представлении значения $\Delta^p u(0)$ m-гармонической в единичном шаре S функции $u(x)$ через интегралы по единичной сфере от нормальных производных $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}$, $k = 0, \ldots, m-1$, этой функции. Последняя строка матрицы $\mathbb{H}_m$ дает коэффициенты из условия разрешимости задачи Неймана для $(m-1)$-гармонического уравнения [7, теорема 10].

Следствие 2. *Из леммы* 3 *вытекает, что второе преобразование из* (10) *обращается в виде*

$$r_j(x) = \sum_{i=0}^{m-1} h_j^{(i)} s_i(x), \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

так как если $S(x) = (s_0(x), \ldots, s_{m-1}(x))$, $R(x) = (r_0(x), \ldots, r_{m-1}(x))$, *то*

$$S(x) = CR(x) \Rightarrow R(x) = \mathbb{H}_m S(x).$$

Пример 1. Найдем матрицу $\mathbb{H}_m$ при $m = 4$. Так как

$$h(\lambda) = \prod_{k=0}^{3}(\lambda - 2k) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-6),$$

то

$$\begin{aligned} h'(2i) &= (2i)\cdots 2(-2)\cdots(2i-2m+2) \\ &= (-1)^{m-i-1}\frac{(2m-2)!!}{C_{m-1}^{i}} \\ &= (-1)^{3-i}\frac{(6)!!}{C_3^i}. \end{aligned} \tag{22}$$

Поэтому согласно формулам (17) получаем

$$h_i(\lambda) = \frac{h(\lambda)}{(\lambda - 2i)h'(2i)} = (-1)^{3-i}\frac{C_3^i}{(6)!!}\prod_{k=0,\, k\ne i}^{3}(\lambda - 2k).$$

Отсюда найдем $h_0(\lambda) = -\frac{1}{6!!}(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-6)$. Воспользуемся формулой (15):

$$h_0^{(k)} = h_0^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}h_0(i).$$

Тогда

$$h_0^{(0)}(0) = -\frac{1}{6!!}(-2)(-4)(-6) = 1,$$

$$h_0^{(1)}(0) = -\frac{1}{6!!}((-1)(-3)(-5) - (-2)(-4)(-6)) = -\frac{33}{6!!},$$

$$h_0^{(2)}(0) = -\frac{1}{6!!}(0 - 2\cdot(-1)(-3)(-5) + (-2)(-4)(-6)) = \frac{18}{6!!},$$

$$h_0^{(3)}(0) = -\frac{1}{6!!}(1(-1)(-3) - 0 + 3\cdot(-1)(-3)(-5) - (-2)(-4)(-6)) = -\frac{6}{6!!},$$

откуда в силу (14) находим

$$h_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{3}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}\lambda^{[k]} = 1 - \frac{33}{48}\lambda^{[1]} + \frac{9}{48}\lambda^{[2]} - \frac{1}{48}\lambda^{[3]},$$

а значит, первая строка матрицы $\mathbb{H}_4$ имеет вид $(1, -\frac{11}{16}, \frac{3}{16}, -\frac{1}{48})$.

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} h_1(\lambda) &= \frac{3}{6!!}\lambda(\lambda-4)(\lambda-6), \\ h_2(\lambda) &= -\frac{3}{6!!}\lambda(\lambda-2)(\lambda-6), \\ h_3(\lambda) &= \frac{1}{6!!}\lambda(\lambda-2)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Поэтому вторая, третья и четвертая строки матрицы $\mathbb{H}_4$ имеют вид

$$\left(0, \frac{15}{16}, -\frac{7}{16}, \frac{1}{16}\right), \quad \left(0, -\frac{5}{16}, \frac{5}{16}, -\frac{1}{16}\right), \quad \left(0, \frac{3}{48}, -\frac{3}{48}, \frac{1}{48}\right),$$

а значит,

$$\mathbb{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{48} \\ 0 & \frac{15}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{48} \end{pmatrix}.$$

Для иллюстрации замечания 2 заметим, что первая строка матрицы $\mathbb{H}_4$ дает равенство

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \left(u - \frac{11}{16} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{3}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} - \frac{1}{48} \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3} \right) ds_\xi,$$

а из последней строки получается условие разрешимости задачи Неймана для однородного 3-гармонического уравнения [7]

$$\int_{\partial S} \big(3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3\big)\, ds_\xi = 0.$$

Лемма 4 [8]**.** *Пусть*

$$C = \left\{ (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right\}_{i,j=\overline{0,m-1}}.$$

Тогда

$$C^{-1} = \left\{ \binom{j}{i} \right\}_{i,j=\overline{0,m-1}}.$$

Следствие 3. *Из леммы* 4 *следует, что первое преобразование из* (10) *обращается в виде*

$$p_k(x) = \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j}{k} r_j(x), \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

§3. Обращение основного соотношения

Из доказанных лемм 2–4 и теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть* $q_i(x) \in C^{2m-2-i}(\bar{S})$, $i = 0, \dots, m-1$, *— некоторая система гармонических в* S *функций и гармонические в* S *функции* $p_s(x)$ *определены равенствами*

$$p_s(x) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} H_s^{(j)}(-\Lambda) q_j(x), \quad s = 0, \dots, m-1, \tag{23}$$

где

$$H_s(\lambda) = \frac{1}{(2s)!!} \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2), \quad s \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

причем $H_0(\lambda) = 1$, *а производная* $H_s^{(j)}(\lambda)$ *порядка* j *от полинома* $H_s(\lambda)$ *берется в смысле определения* (13). *Тогда* m*-гармоническая функция*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(x)(|x|^2 - 1)^k \tag{25}$$

удовлетворяет условиям задачи Дирихле (11).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2. Рассмотрим преобразования (10). Если последовательно использовать следствия 3, 2 и 1, то равенства (10) можно обратить в виде

$$p_s(x) = \sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} \sum_{i=0}^{m-1} h_k^{(i)} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-\Lambda)^{[i-j]} q_j(x), \quad s = 0, \dots, m-1, \tag{26}$$

где числа $h_i^{(k)}$ — элементы матрицы $\mathbb{H}_m$ из (19). Поэтому в силу теоремы 2 для таких полиномов $p_s(x)$ функция $u(x)$, находимая из (25), будет удовлетворять условиям Дирихле (11).

Упростим равенства (26). Нетрудно видеть, что

$$p_s(x) = \sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} \sum_{i=0}^{m-1} h_k^{(i)} \psi(i) = \sum_{i=0}^{m-1} \psi(i) \sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} h_k^{(i)}, \tag{27}$$

где через $\psi(i)$ обозначена внутренняя сумма в (26) по j. Рассмотрим следующий полином:

$$H_s(\lambda) = \sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} h_k(\lambda),$$

в котором полиномы $h_k(\lambda)$ определены в (17). Используя (22), полином $h_k(\lambda)$ запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} h_k(\lambda) &= \frac{h(\lambda)}{(\lambda-2k)h'(2k)} = \frac{(-1)^{m-k-1}}{(2m-2)!!} \binom{m-1}{k} \frac{h(\lambda)}{(\lambda-2k)} \\ &= \frac{(-1)^{m-k-1}}{(2k)!!(2m-2-2k)!!} \frac{h(\lambda)}{(\lambda-2k)}. \end{aligned}$$

Здесь, как и в (17), $h(\lambda)=\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2m+2)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
H_s(\lambda)&=\sum_{k=s}^{m-1}\binom{k}{s}h_k(\lambda)=\frac{h(\lambda)}{(2s)!!}\sum_{k=s}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k-1}}{(2k-2s)!!(2m-2-2k)!!}\frac{1}{\lambda-2k}\\
&=\frac{h(\lambda)}{(2s)!!(2m-2-2s)!!}\sum_{k=s}^{m-1}\binom{m-1-s}{k-s}\frac{(-1)^{m-k-1}}{\lambda-2k}\\
&=\frac{h(\lambda)}{(2s)!!(2m-2-2s)!!}\sum_{k=0}^{m-1-s}\binom{m-1-s}{k}\frac{(-1)^{m-k-s-1}}{\lambda-2k-2s}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся простым равенством

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{m-k}}{\mu-2k}=\frac{(2m)!!}{\mu(\mu-2)\cdots(\mu-2m)},$$

которое при $m=0$ очевидно и легко доказывается по индукции:

$$\begin{aligned}
\frac{(2m)!!}{\mu(\mu-2)\cdots(\mu-2m)}&=\frac{(2m-2)!!}{(\mu-2)\cdots(\mu-2m+2)}\left(\frac{1}{\mu-2m}-\frac{1}{\mu}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{(-1)^{m-1-k}}{\mu-2k-2}-\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{(-1)^{m-1-k}}{\mu-2k}\\
&=\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}\frac{(-1)^{m-k}}{\mu-2k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m-1}{k}\frac{(-1)^{m-k}}{\mu-2k}\\
&=\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{m-1}{k-1}+\binom{m-1}{k}\right)\frac{(-1)^{m-k}}{\mu-2k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{m-k}}{\mu-2k}.
\end{aligned}$$

Таким образом, (28) при $m'=m-1-s$ и $\mu=\lambda-2s$ влечет

$$H_s(\lambda)=\sum_{k=s}^{m-1}\binom{k}{s}h_k(\lambda)=\frac{h(\lambda)}{(2s)!!(\lambda-2s)\cdots(\lambda-2m+2)}.$$

Отсюда при $s=0$ найдем $H_0(\lambda)=1$. Если же $s=1,\ldots,m-1$, то, используя значение $h_k(\lambda)$ из (17), получим

$$H_s(\lambda)=\frac{1}{(2s)!!}\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2),$$

что совпадает с полиномом, определенным в (24). Разложим $H_s(\lambda)$ по факториальным степеням $\lambda^{[i]}$ в виде (14):

$$H_s(\lambda)=\sum_{i=0}^{s}\frac{H_s^{(i)}(0)}{i!}\lambda^{[i]}.$$

С помощью определения $H_s(\lambda)$ и (18) найдем

$$H_s(\lambda) = \sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} h_k(\lambda) = \sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} \sum_{i=0}^{m-1} h_k^{(i)} \lambda^{[i]} = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{[i]} \sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} h_k^{(i)}.$$

Используя эти равенства, будем иметь

$$\sum_{k=s}^{m-1} \binom{k}{s} h_k^{(i)} = \frac{H_s^{(i)}(0)}{i!}.$$

Подставляя найденное значение суммы слева в равенство (27) и используя определение $\psi(i)$, получаем

$$p_s(x) = \sum_{i=0}^{s} \frac{H_s^{(i)}(0)}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-\Lambda)^{[i-j]} q_j(x), \quad s = 0, \dots, m-1.$$

Переставляя местами суммирование и используя разложение полинома $H_s^{(j)}(\lambda)$ вида (14), имеем

$$p_s(x) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=j}^{s} \frac{(H_s^{(j)})^{(i-j)}(0)}{(i-j)!} (-\Lambda)^{[i-j]} \right) q_j(x) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} H_s^{(j)}(-\Lambda) q_j(x),$$

где $s = 0, \dots, m-1$, что совпадает с (23).

Проверим гладкость функций $p_s(x)$. В теореме 2 требовалось выполнение включения $p_0(x), \dots, p_{m-1}(x) \in C^{m-1}(\bar{S})$. Поскольку $\deg H_s^{(j)}(\lambda) = s - j$, для такой гладкости из формулы (23), например, при $s = m-1$ следует, что $q_j(x) \in C^{2m-2-j}(\bar{S})$. При $s < m-1$ условия на гладкость $q_j(x)$ слабее указанных выше. Значит, в теореме 2 можно положить $k_j = 2m-2-j$, $j = 0, \dots, m-1$. □

Замечание 3. Формула (25) похожа на известную формулу Альманси [13], но в ней гармонические компоненты $p_k(x)$ известны.

§4. Решение задачи Дирихле

Доказанные выше утверждения позволяют сформулировать основной результат для задачи Дирихле.

Теорема 4. *Решение задачи Дирихле* (5)–(6) *для m-гармонического уравнения*

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S,$$

$$u|_{\partial S} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\Big|_{\partial S} = \varphi_{m-1}(s), \quad s \in \partial S,$$

при $f \in C^1(\bar S)$, $\varphi_k \in C^{2m-2-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k = 0, \ldots, m-1$, $\varepsilon > 0$, *записывается в виде*

$$u(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(-\Lambda; |x|^2 - 1) q_j(x) + \frac{1}{\omega_n} \int_S G_m(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{29}$$

где

$$K_{m-1}(\lambda; |x|^2 - 1) = \sum_{k=0}^{m-1} (|x|^2 - 1)^k H_k(\lambda), \tag{30}$$

полиномы $H_k(\lambda)$ *определяются из* (24), *производная* $K_{m-1}^{(j)}(\lambda; |x|^2 - 1)$ *по* λ *порядка* j *берется в смысле определения* (13), *а гармонические функции* $q_k(x)$ *являются решениями задач Дирихле*

$$\Delta q_k(x) = 0,\ x \in S; \quad q_k|_{\partial S} = \varphi_k(s),\ s \in \partial S, \tag{31}$$

и $G_m(x, \xi)$ — *функция Грина задачи Дирихле в шаре для* m*-гармонического уравнения* (5).

Доказательство. Пусть $q_i(x) \in C^{2m-2-i}(\bar S)$, $i = 0, \ldots, m-1$, — система гармонических в S функций, являющихся решениями задач (31). Тогда в силу теоремы 3 и свойств функции Грина $G_m(x, \xi)$ функция

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (|x|^2 - 1)^k p_k(x) + \frac{1}{\omega_n} \int_S G_m(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{32}$$

где гармонические функции $p_k(x)$ при $k = 0, \ldots, m-1$ находятся из равенства

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} H_k^{(j)}(-\Lambda) q_j(x), \quad k = 0, \ldots, m-1,$$

полином $H_k(\lambda)$ имеет вид

$$H_k(\lambda) = \frac{1}{(2k)!!} \lambda(\lambda - 2) \cdots (\lambda - 2k + 2), \quad k \in \mathbb{N},$$

а производная $H_k^{(j)}(\lambda)$ порядка j берется в смысле определения (13), удовлетворяет граничным условиям Дирихле (6):

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\Big|_{\partial S} = q_i(x)|_{\partial S} + \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{\partial^i G_m(x, \xi)}{\partial \nu_x^i} f(\xi)\, d\xi|_{\partial S} = \varphi_i(s),\ s \in \partial S,$$

где $i = 0, \ldots, m-1$. Преобразуем первое слагаемое в полученном решении (32). Нетрудно видеть, что, используя обозначение (30), можно записать

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}(|x|^2-1)^k p_k(x) &= \sum_{k=0}^{m-1}(|x|^2-1)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}H_k^{(j)}(-\Lambda)q_j(x)\\ &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\sum_{k=j}^{m-1}(|x|^2-1)^k H_k^{(j)}(-\Lambda)q_j(x)\\ &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Big(\sum_{k=j}^{m-1}(|x|^2-1)^k H_k(\mu)\Big)_\mu^{(j)}\Big|_{\mu=-\Lambda}q_j(x)\\ &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}K_{m-1}^{(j)}(-\Lambda;|x|^2-1)q_j(x),\end{aligned}$$

где учтено, что производная порядка j от $H_k(\mu)$ при $k<j$ равна нулю. Наконец, в силу [1, лемма 2.7] для того чтобы гармонические в S функции $q_i(x)$ имели гладкость $q_i(x)\in C^{2m-2-i}(\bar S)$, достаточно потребовать, чтобы $\varphi_k\in C^{2m-2-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k=0,\dots,m-1$, при некотором $\varepsilon>0$. Поэтому функция $u(x)$ из (29) — решение задачи Дирихле (5)–(6). □

Замечание 4. Формула (29) при $f=0$ с помощью представления (4) может быть переписана в интегральном виде

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi_j(\xi)}{j!}\sum_{k=j}^{m-1}(|x|^2-1)^k H_k^{(j)}(-\Lambda_x)\Big(\frac{|x|^2-1}{|x-\xi|^n}\Big)\,ds_\xi,$$

где полиномы $H_k(\lambda)$ определены в (24), а производная $H_k^{(j)}(\lambda)$ порядка j берется в смысле определения (13).

Пример 2. Найдем решение задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре. В этом случае $m=3$. Сначала найдем полиномы $H_0(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ и $H_2(\lambda)$ по формуле (24). Имеем

$$H_0(\lambda)=1,\quad H_1(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda^{[1]},\quad H_2(\lambda)=\frac{1}{4!!}\lambda(\lambda-2)=\frac{1}{4!!}(\lambda^{[2]}-\lambda^{[1]}),$$

а значит,

$$\begin{aligned}K(\lambda;|x|^2-1)&=\sum_{k=0}^{2}(|x|^2-1)^k H_k(\lambda)\\ &=1+\frac{1}{2}(|x|^2-1)\lambda^{[1]}+\frac{1}{4!!}(|x|^2-1)^2(\lambda^{[2]}-\lambda^{[1]}).\end{aligned}$$

Если вспомнить равенство $\big(\lambda^{[k]}\big)^{(m)}=k^{[m]}\lambda^{[k-m]}$, то нетрудно найти

$$\begin{aligned}K_\lambda^{(1)}(\lambda;|x|^2-1)&=\frac{1}{2}(|x|^2-1)+\frac{1}{4!!}(|x|^2-1)^2(2\lambda^{[1]}-1),\\ K_\lambda^{(2)}(\lambda;|x|^2-1)&=\frac{2}{4!!}(|x|^2-1)^2.\end{aligned}$$

Отсюда по формуле (29), используя [10, теорема 2], можно записать

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j!} K_\lambda^{(j)}(-\Lambda; |x|^2-1) q_j(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_S G_6(x,\xi) f(\xi)\, d\xi \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2}(|x|^2-1)\Lambda + \frac{1}{4!!}(|x|^2-1)^2(\Lambda^2+2\Lambda)\Big) q_0(x) \\
&\quad + \Big(\frac{1}{2}(|x|^2-1) - \frac{1}{4!!}(|x|^2-1)^2(2\Lambda+1)\Big) q_1(x) \\
&\quad + \frac{1}{4!!}(|x|^2-1)^2 q_2(x) - \frac{1}{\omega_n}\int_S G_6(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad (33)
\end{aligned}$$

где $G_6(x,\xi)$ — функция Грина задачи Дирихле при $m=3$ [10].

Возможность рекурсивного построения решения (29) задачи Дирихле (5)–(6) для однородного уравнения дается в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть $u_m(x)$ — решение задачи Дирихле (5)–(6) с $f(x)=0$, записанное в виде (29). Тогда решение задачи Дирихле (5)–(6) $u_{m+1}(x)$ при $m=m+1$ и с теми же граничными функциями $\varphi_k \in C^{2m-2-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k=0,\dots,m-1$, и $\varphi_m \in C^{m+\varepsilon}(\partial S)$ может быть записано в виде*

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + (|x|^2-1)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} H_m^{(j)}(-\Lambda) q_j(x), \qquad (34)$$

где полином $H_m(\lambda)$ определен в (24), производная $H_m^{(j)}(\lambda)$ берется в смысле определения (13), а гармонические функции $q_k(x)$ являются решениями соответствующих задач Дирихле, как и в теореме 4.

Доказательство. По теореме 4 решения задач Дирихле $u_{m+1}(x)$ и $u_m(x)$ можно записать в виде (29). Преобразуем разность этих решений:

$$\begin{aligned}
&u_{m+1}(x) - u_m(x) \\
&\quad = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \big(K_m^{(j)}(-\Lambda; |x|^2-1) + \frac{1}{m!} K_m^{(m)}(-\Lambda; |x|^2-1) q_m(x) \\
&\qquad\quad - K_{m-1}^{(j)}(-\Lambda; |x|^2-1)\big) q_j(x) \\
&\quad = (|x|^2-1)^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} H_m^{(j)}(-\Lambda) q_j(x) + \frac{1}{m!}(|x|^2-1)^m H_m^{(m)}(-\Lambda) q_m(x) \\
&\quad = (|x|^2-1)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} H_m^{(j)}(-\Lambda) q_j(x).
\end{aligned}$$

Это равенство доказывает теорему. □

Проиллюстрируем теорему 5.

Пример 3. Воспользуемся формулой (34) для построения решения задачи Дирихле для однородного 4-гармонического уравнения с помощью найденного в примере 2 решения (33) задачи Дирихле для однородного 3-гармонического уравнения. Для этого применим факториальное представление полинома $H_3(\lambda)$, найденное в примере 1. Его коэффициенты располагаются в последней строке матрицы $\mathbb{H}_4$:

$$H_3(\lambda) = \frac{1}{6!!}\lambda(\lambda-2)(\lambda-4) = \frac{1}{6!!}\big(3\lambda^{[1]} - 3\lambda^{[2]} + \lambda^{[3]}\big).$$

Используя равенство $\big(\lambda^{[k]}\big)^{(m)} = k^{[m]}\lambda^{[k-m]}$, найдем

$$H_3^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{6!!}\big(3 - 6\lambda^{[1]} + 3\lambda^{[2]}\big),\ H_3^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{6!!}\big(-6 + 6\lambda^{[1]}\big),\ H_3^{(3)}(\lambda) = 1,$$

а значит, по формуле (34) при $m = 3$ получим

$$\begin{aligned} &u_4(x) - u_3(x) \\ &= \frac{(|x|^2-1)^3}{6!!}\big(-(\Lambda^3 + 6\Lambda^2 + 8\Lambda)q_0 + (3\Lambda^2 + 9\Lambda + 3)q_1 - (3\Lambda + 3)q_2 + q_3\big). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (33), найдем

$$\begin{aligned} &u_4(x) \\ &= \left(1 - \frac{(|x|^2-1)}{2}\Lambda + \frac{(|x|^2-1)^2}{4!!}(\Lambda^2 + 2\Lambda) - \frac{(|x|^2-1)^3}{6!!}(\Lambda^3 + 6\Lambda^2 + 8\Lambda)\right)q_0(x) \\ &\quad + \left(\frac{(|x|^2-1)}{2} - \frac{(|x|^2-1)^2}{4!!}(2\Lambda + 1) + \frac{(|x|^2-1)^3}{6!!}(3\Lambda^2 + 9\Lambda + 3)\right)q_1(x) \\ &\quad + \left(\frac{(|x|^2-1)^2}{4!!} - \frac{(|x|^2-1)^3}{6!!}(3\Lambda + 3)\right)q_2(x) + \frac{(|x|^2-1)^3}{6!!}q_3(x). \end{aligned}$$

Список литературы

1. *Алимов Ш. А.* Об одной задаче с наклонной производной // *Дифференц. уравнения.* 1981. Т. 17, № 10. С. 1738–1751.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.* М.: Наука, 1966.
3. *Бицадзе А. В. Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1976.
4. *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // *Сиб. матем. журн.* 2008. Т. 49, № 3. С. 423–428.

5. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // *Дифференц. уравнения.* 2012. Т. 48, № 3. С. 435–438.
6. *Карачик В. В.* О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // *Матем. тр.* 2013. Т. 16, № 2. С. 69–88.
7. *Карачик В. В.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // *Матем. заметки.* 2014. Т. 96, № 2. С. 228–238.
8. *Карачик В. В.* Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2014. Т. 54, № 7. С. 1149–1170.
9. *Карачик В. В.* О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59, № 1. С. 70–86.
10. *Карачик В. В.* Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // *Матем. заметки.* 2020. Т. 107, № 1. С. 87–105.
11. *Карачик В. В.* Представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре через функцию Грина // *Челябинск. физ-матем. ж.* 2020. Т. 5, № 4, ч. 1. С. 391–399.
12. *Карачик В. В.* Функции Грина задач Навье и Рикье — Неймана для бигармонического уравнения в шаре // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57, № 5. С. 673–686.
13. *Almansi E.* Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n}u = 0$ // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1899. V. 2, N 3. P. 1–51.
14. *Begehr H.* Biharmonic Green functions // *Le Matematiche.* 2006. V. LXI. P. 395–405.
15. *Begehr H., Vu T. N. H., and Zhang Z.-X.* Polyharmonic Dirichlet p roblems // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2006. V. 255. P. 13–34.
16. *Boggio T.* Sulle funzioni di Green dórdine m // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* 1905. V. 20. P. 97–135.
17. *Gazzola F., Grunau H. C., and Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains* / Lecture Notes in Math., N 1991. Berlin: Springer, 2010.
18. *Karachik V. V.* A Neumann-type problem for the biharmonic equation // *Siberian Adv. Math.* 2017. V. 27, N 2. P. 103–118.
19. *Karachik V. V.* Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // *Differ. Equ.* 2018. V. 54, N 5. P. 648–657.

20. *Karachik V. V. and Antropova N. A.* On the solution of the inhomogeneous polyharmonic equation and the inhomogeneous Helmholtz equation // *Differ. Equ.* 2010. V. 46, N 3. P. 387–399.
21. *Karachik V. V. and Turmetov B. Kh.* On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // *Adv. Pure Appl. Math.* 2019. V. 10, N 3. P. 203–214.

Solution to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball

V. V. Karachik

Abstract. We give a representation of the solution to the Dirichlet problem for the inhomogeneous polyharmonic equation in the unit ball in terms of solutions to the Dirichlet problem for the Laplace equation.

Keywords: polyharmonic equation, Dirichlet problem, Green's function, Almansi representation.

Карачик Валерий Валентинович
Южно-Уральский гос. университет,
просп. Ленина, 76,
Челябинск, 454080 РОССИЯ.
E-mail: karachik@susu.ru

Поступила в редакцию
5 мая 2021 г.
Получена после доработки
4 августа 2021 г.
Принята к публикации
30 августа 2021 г.