



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Vu Quok Phong, Yu. I. Lyubich, On the spectral mapping theorem for a one-parameter group of operators, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1989, Volume 178, 146–150

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

February 9, 2025, 13:32:55



К ТЕОРЕМЕ ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СПЕКТРОВ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ОПЕРАТОРОВ

1. Пусть  $A$  - линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве  $\mathcal{B}$ . Из операторного исчисления вытекает теорема об отображении спектров для однопараметрической группы  $\exp(At)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ):

$$\sigma(\exp(At)) = \exp(\sigma(A)t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Эта теорема играет важную роль в спектральной теории операторов и ее приложениях, в частности, к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах. Но для такого рода приложений важно иметь обобщение равенства (1) на случай неограниченного оператора  $A$ . Чтобы придать смысл выражению  $\exp(At)$ , потребуем, чтобы  $A$  порождал некоторую сильно непрерывную однопараметрическую группу  $U(t)$  ограниченных операторов. Поскольку  $\sigma(U(t))$  компактен, а множество  $\exp(\sigma(A)t)$  может даже не быть замкнутым, если  $A$  неограничен, то вопрос заключается в справедливости при тех или иных условиях следующего равенства

$$\sigma(U(t)) = \overline{\exp(\sigma(A)t)}. \quad (2)$$

В последнее время появилось много публикаций, посвященных теореме об отображении спектров для однопараметрических групп. Из них мы отметим работы [1], [2], имеющие непосредственную связь с результатом данной заметки; в работе [1] равенство (2) было установлено для однопараметрических групп изометрий, а в [2] - для однопараметрических групп  $U(t)$  с полиномиальным ростом ( $\|U(t)\| = O(1+|t|^k)$ ). Мы покажем, что из теории операторов с отделмым спектром [3] выводится теорема об отображении спектров для неквазианалитических групп операторов в банаховом пространстве, а тем самым, и для случаев, рассмотренных в [1], [2].

2. Сильно непрерывная однопараметрическая группа  $U(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) операторов в банаховом пространстве  $\mathcal{B}$  называется неквазианалитической, если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \|U(t)\|}{1+t^2} dt \quad (3)$$

сходится. Спектр генератора  $A$  такой группы лежит на мнимой

оси. Спектр каждого из операторов  $U(t)$  лежит на единичной окружности. Действительно, в силу (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|U(nt)\|}{n} = 0,$$

т.е. спектральный радиус оператора  $U(t)$  равен 1, и то же самое верно для  $U(t)^{-1} = U(-t)$ .

**ТЕОРЕМА.** Равенство (2) имеет место, если  $A$  - генератор сильно непрерывной неквазианалитической группы  $U(t)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы будем опираться на следующие результаты, установленные в [3].

Спектр оператора  $A$  отделим в том смысле, что: 1) для каждого отрезка  $\Delta \subset i\mathbb{R}$  существует соответствующее спектральное подпространство  $L(\Delta)$ , инвариантное относительно  $A$ ; 2) на  $L(\Delta)$  оператор  $A$  всюду определен и ограничен, и, более того

$$\sigma(A) \cap \Delta^\circ \subset \sigma(A|L(\Delta)) \subset \sigma(A) \cap \Delta, \quad (4)$$

где  $\Delta^\circ = \text{int } \Delta$ ; 3) подпространство  $L(\Delta)$  содержит каждое такое подпространство  $M$ , которое удовлетворяет этим двум условиям (в частности,  $L(\Delta_1) \subset L(\Delta_2)$ , если  $\Delta_1 \subset \Delta_2$ ); 4) если система  $\{\Delta_\alpha\}$  такова, что  $\{\Delta_\alpha^\circ\}$  является покрытием мнимой оси, то система подпространств  $\{L(\Delta_\alpha)\}$  полна. Последний факт был установлен в [3] при помощи специально сконструированной последовательности ограниченных проекторов  $P_n$ , коммутирующих с  $A$  и удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x, \quad \text{Im } P_n \subset L(\Delta_n), \quad (5)$$

где  $\Delta_n = [-in, in]$ . Доказывая (2), можно принять  $t=1$ , после чего мы положим  $A_n = A|L(\Delta_n)$ ,  $U = U(t)$ ,  $U_n = U|L(\Delta_n)$ . Очевидно

$$U_n = \exp(A_n). \quad (6)$$

Из (4) следует, что

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n).$$

Поэтому

$$\exp(\sigma(A)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \exp(\sigma(A_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\exp(A_n)),$$

так как операторы  $A_n$  ограничены. Следовательно,

$$\overline{\exp(\sigma(A))} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\sigma(\exp(A_n))}. \quad (7)$$

Мы покажем, что

$$\sigma(U) \subset \overline{\exp(\sigma(A))}. \quad (8)$$

Этого достаточно для требуемого равенства

$$\sigma(U) = \overline{\exp(\sigma(A))}, \quad (9)$$

так как включение, обратное к (8), справедливо для произвольной сильно непрерывной подгруппы [4].

Пусть  $\lambda \in \overline{\exp(\sigma(A))}$ . Нужно показать, что  $\lambda \in \sigma(U)$ . Сразу можно считать  $|\lambda| = 1$ . Достаточно установить неравенство

$$\|Ux - \lambda x\| \geq \text{const} \cdot \|x\| \quad (x \in \mathcal{B}).$$

Действительно, в этом случае  $\text{Im}(U - \lambda I) = \mathcal{B}$  так как, если бы в точке  $\lambda$  дефектное число было отлично от нуля, то оно было бы таким же в окрестности этой точки [5], а тогда в спектр  $\sigma(U)$  вошли бы точки  $\zeta$  с  $|\zeta| \neq 1$ .

В силу (7), существует окрестность  $V$  точки  $\lambda$ , такая, что  $\overline{V}$  не пересекается со спектрами операторов  $\exp(A_n)$ . Таким образом, для каждого  $n = 1, 2, \dots$  существует окрестность компакта  $\sigma(A_n)$ ,  $\exp$ -образ замыкания которой не пересекается с  $V$ . Мы можем считать, что граница  $\Gamma_n$  этой окрестности состоит из конечного числа круговых дуг. Рассмотрим в  $L(\Delta_n)$  оператор

$$T_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{R_n(\zeta)}{\exp(\zeta) - \lambda} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где  $R_n(\zeta) = (A_n - \zeta I)^{-1}$ . Очевидно, операторы  $T_n$  ограничены. Более того,  $\sup_n \|T_n\| = C < \infty$ , и  $T_n = (\exp(A_n) - \lambda I)^{-1}$ . Следовательно,

$$\|\exp(A_n)x - \lambda x\| \geq C^{-1} \|x\| \quad (x \in L(\Delta_n)). \quad (11)$$

Так как, согласно (5),  $P_n x \in L(\Delta_n)$ , то из (11) следует

$$\|\exp(A_n)P_n(x) - \lambda P_n(x)\| \geq C^{-1} \|P_n x\| \quad (x \in \mathcal{B}).$$

Согласно (6), это неравенство можно переписать следующим образом

$$\|UP_n x - \lambda P_n x\| \geq C^{-1} \|P_n x\| \quad (x \in \mathcal{B}).$$

Устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получим в силу (5), что

$$\|Ux - \lambda x\| \geq C^{-1} \|x\| \quad (x \in \mathcal{B}),$$

что и требовалось доказать.

Укажем некоторые следствия доказанной теоремы.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Пусть  $A$  - генератор сильно непрерывной неквазианалитической группы  $U(t)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $1 \in \sigma(U(1))$ ;
- 2)  $\sigma(A) \cap 2\pi i\mathbb{Z} = \emptyset$  и  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(A - 2\pi i n I)^{-1}\| < \infty$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1)  $\Rightarrow$  2) доказано в [6]. Чтобы доказать 2)  $\Rightarrow$  1) заметим, что условие 2) влечет равномерную отделенность  $2\pi i\mathbb{Z}$  от  $\sigma(A)$ . Таким образом,  $1 \in \exp(\sigma(A))$ , и 2)  $\Rightarrow$  1) в силу нашей теоремы.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Пусть  $A$  - генератор сильно непрерывной неквазианалитической группы и пусть  $\sigma(A) \cap 2\pi i\mathbb{Z} = \emptyset$ . Тогда для каждой  $2\pi$ -периодической функции  $f(t)$  уравнение  $dx/dt = Ax + f(t)$  имеет единственное периодическое решение.

Для доказательства достаточно повторять рассуждения из [7], используя нашу теорему при построении резольвенты  $(U(t) - I)^{-1}$ .

#### Литература

1. Evans D.E. On the spectrum of a one-parameter strongly continuous representations. - Math.Scand., 1976, v.39, p.80-82.
2. Arendt W., Greiner G. Lect.Notes in Math., 1986, v.1184, p.90-93.
3. Любич Ю.И., Мацаев В.И. Об операторах с отдельным спектром. - Матем.об., 1962, т.56, № 4, с.433-468.
4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
5. Крейн М.Г., Красносельский М.А., Мильман Д.П. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. - Сб. тр. ин-та Матем. АН УССР, 1948, № II, с.97-112.
6. Pruss J. On the spectrum of  $\omega$ -semigroups. - Trans. Amer.Math.Soc., 1984, v.284, p.847-857.
7. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.

Vu Quok Phong, Yu.I.Lyubich. On the spectral mapping theorem for a one-parameter group of operators.

Summary

Let  $A$  be the generator of a strongly continuous non-quasi-analytic one-parameter group of operators  $U(t)$  ( $A$  can be unbounded). Then the spectral mapping theorem is established in the following form:  $\sigma(U(t)) = \overline{\exp(\sigma(A)t)}$ .