A. B. Elovikov, One-generator compositional formations,
Diskr. Mat., 2001, Volume 13, Issue 3, 153–160

Дискретная математика

том 13 выпуск 3 * 2001

УДК 512.542

Однопорожденные композиционные формации

© 2001 г. А. Б. Еловиков

В работе описывается класс факторизуемых однопорожденных композиционных формаций через установление необходимых и достаточных условий факторизации. Рассматриваются только конечные группы.

Однопорожденные формации конечных групп были введены в рассмотрение основателем теории формаций В. Гашюцем. Исследованию факторизуемых однопорожденных локальных формаций посвящен ряд работ (см., например, [1–3]). А. Н. Скиба в книге [4] описал все возможные факторизации однопорожденных локальных формаций, там же был поставлен вопрос: можно ли описать все возможные несократимые факторизации однопорожденных композиционных формаций? (см. [4], вопрос 3.5.21).

В настоящей работе описывается обширный класс факторизуемых однопорожденных композиционных формаций через установление необходимых и достаточных условий факторизации. Основные результаты статьи анонсированы в [10]. Рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [4–6]. Приведем только некоторые из них. Через $G = [A]B$ обозначают полупрямое произведение групп A и B, где A нормальна в G; $CF(f)$ — композиционная формация, определяемая композиционным спутником f. С целью компактного изложения материала композиционные формации (n-кратно композиционные формации) коротко будем называть c-формациями (c_n-формациями), а композиционные спутники (n-кратно композиционные спутники) c-спутниками (c_n-спутниками). Через $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{S}$ обозначают соответственно класс всех конечных групп, класс всех конечных простых групп, класс всех конечных разрешимых групп.

Перейдем к изложению полученных результатов.

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathfrak{G}$, тогда в формации* $\mathrm{cform}\, A$ *содержится лишь конечное множество наследственных c-формаций.*

Доказательство. Обозначим θ полную решетку всех наследственных формаций. Пусть $\mathfrak{M} = \theta^c \,\mathrm{form}\, A$ — пересечение всех c-формаций, содержащих A и имеющих хотя бы один θ-значный спутник. Очевидно, что $\mathrm{cform}\, A \subseteq \mathfrak{M}$. Покажем, что в $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное число наследственных c-формаций.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная наследственная c-формация такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. По следствию 1.2 из [7] $\mathfrak{F} \in \theta^c$. Пусть f и m — минимальные наследственные c-спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$, соответственно, тогда по следствию 2.1 из [7] $f \leqslant m$. По лемме 6 из [8]

$$m(B) = \theta \operatorname{form}(A/F_B(A)),$$

где $B \in K(A)$. Следовательно, по лемме 8.8 из [5] существует лишь конечное множество наследственных c-спутников t, меньших m. Значит, в $\mathfrak{M}$, а тем более в $\operatorname{cform} A$, существует лишь конечное множество наследственных c-подформаций.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — нееденичные c-формации, а $\mathfrak{H}$ — такая формация, что*

$$K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \not\subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} \neq \varnothing,$$

то множество наследственных c-подформаций формации $\mathfrak{F}$ бесконечно.

Доказательство. Пусть $Z_p \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит $Z_p \in K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ композиционна. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Легко показать, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $Z_q \in K(\mathfrak{M})$. Тогда $q \neq p$ и $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}$. Для всякого натурального числа n зафиксируем некоторую циклическую группу P_n порядка p^n. Пусть $Q_n = Z_q \wr P_n$ — регулярное сплетение. Обозначим через $\mathfrak{F}_n$ композиционную формацию, порожденную группой Q_n. Группа Q_n является расширением q-группы с помощью p-группы. Следовательно,

$$Q_n \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Поэтому $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку группа Q_n метанильпотентна, то $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{N}^2$. Хорошо известно, что каждая разрешимая c-формация является локальной формацией. Значит, ввиду леммы 8.10 из [5] все c-подформации формации $\mathfrak{N}^2$ наследственны. Тогда $\mathfrak{F}_n$ — наследственная c-формация в $\mathfrak{F}$.

При доказательстве леммы 8.13 в [5] было показано, что если n и m — различные натуральные числа, то $\mathfrak{F}_n \neq \mathfrak{F}_m$. Итак, в $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество наследственных c-подформаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$

Лемма доказана.

Используя методы, разработанные в [5] (теорема 7.10) и [8] (теорема 1), несложно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{M} = CF(m)$, причем $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ — такая непустая формация, что $\mathfrak{N}_q\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ для любого простого числа q такого, что $Z_q \in (K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M}))$ (это условие, в частности, выполняется, если $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$). Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ имеет такой c-спутник f, что $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in K(\mathfrak{M})$, $f(A) = \mathfrak{H}$, если $A \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$ и $f(A) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{J} \setminus K(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.*

Замечание 1. Лемма 3 дополняет теоремы 7.9 и 7.10 из [5].

Лемма 4. *Пусть $A \in \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$ — формация, содержащая лишь конечное число попарно неизоморфных формационно критических групп. Тогда если $A^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых A-главных факторов, то в формации $\mathfrak{M} = c_n \operatorname{form} A$ имеется лишь конечное число n-кратно композиционных подформаций.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Тогда $\mathfrak{M} = \operatorname{form} A$. По теореме 3.44 из [5] $\mathfrak{M}$ имеет лишь конечное множество подформаций.

Пусть теперь $n > 0$ и лемма верна для $n-1$. Обозначим через m минимальный $c_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{M}$. По лемме 6 из [8]

$$m(B) = c_{(n-1)}\operatorname{form}(A/F_B(A))$$

для любого $B \in K(A)$ и $m(B) = \varnothing$ для всех $B \in \mathfrak{I} \setminus K(A)$. Ввиду теоремы 3.36 из [5] $\mathfrak{F}$-корадикал группы $A/F_B(A)$ не содержит фраттиниевых $(A/F_B(A))$-главных факторов. Значит, по индукции в формации $c_{(n-1)}\operatorname{form}(A/F_B(A))$ имеется лишь конечное множество $(n-1)$-кратно композиционных подформаций. Применяя теперь следствие 5 из [8], заключаем, что в формации $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество n-кратно композиционных подформаций. Лемма доказана.

Из теоремы 3.49 в [5] и леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть A — конечная группа. Тогда если $\mathfrak{S}$-корадикал $A^{\mathfrak{S}}$ группы A не имеет фраттиниевых A-главных факторов, то в формации $c_n\operatorname{form}A$ имеется лишь конечное множество c_n-подформаций.*

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, причем по крайней мере одна из формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ разрешима. Если $\mathfrak{F}$ является c_n-формацией, то в ней содержится минимальная n-кратно композиционная не $\mathfrak{H}$-формация.*

Доказательство. Утверждение очевидно при $\mathfrak{H} = \varnothing$. Пусть $\mathfrak{H} \neq \varnothing$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда A — монолитическая группа с монолитом $R = A^{\mathfrak{H}}$. Индукцией по n покажем, что в $\mathfrak{M} = c_n\operatorname{form}A$ имеется лишь конечное множество c_n-подформаций.

Пусть $n = 0$. Тогда $\mathfrak{M} = \operatorname{form}A$. По лемме 19.6 из [5] $\mathfrak{M}$ имеет лишь конечное множество подформаций.

Пусть $n > 0$ и лемма верна для $n-1$. Обозначим через m минимальный $c_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{M}$. По лемме 6 из [8] $m(B) = c_{(n-1)}\operatorname{form}(A/F_B(A))$ для любого $B \in K(A)$ и $m(B) = \varnothing$ для любого $B \in \mathfrak{I} \setminus K(A)$. Если $F_B(A) \neq 1$, то, ввиду условия леммы, $A/F_B(A) \in \mathfrak{S}$, то есть $(A/F_B(A))^{\mathfrak{S}} = 1$. Тогда по лемме 5 в $m(B)$ имеется лишь конечное множество $c_{(n-1)}$-подформаций. Если же $F_B(A) = 1$, то $m(B) = c_{(n-1)}\operatorname{form}A$ и по индукции число $c_{(n-1)}$-подформаций в $m(B)$ конечно. Следовательно, в формации $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество c_n-подформаций. Так как при этом $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $(1) \subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{M}$ можно выбрать такую c_n- подформацию $\mathfrak{K}$, что $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной c_n-подформации $\mathfrak{K}_1$ из $\mathfrak{K}$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная композиционная не $\mathfrak{N}^n$-формация. Тогда $\mathfrak{F} = \operatorname{cform}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}^n}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G = P$ — простая неабелева группа,*

(2) *P — собственная неабелева подгруппа группы G,*

(3) *$G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа и $H = [Q]N$, причем*

$$C_H(Q) = Q = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}.$$

Доказательство. По теореме 7.9 в [5] и теореме 3.2 в [6] формация $\mathfrak{N}^n$ имеет такой максимальный внутренний композиционный спутник h, что $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}$ для всех $Z_p \in \mathfrak{A}$ и $h(A) = \mathfrak{N}^n$ для любой простой неабелевой группы A. Ввиду теоремы 1 из [11], $\mathfrak{F} = \operatorname{cform} G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}^n}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = P$ — простая группа,

(2) P — собственная неабелева подгруппа группы G и $P = G^{h(A)}$ для $A \in K(P)$,

(3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а $H \neq 1$ — монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ для $A \in K(P)$.

Пусть верно условие 1. Если $G = P = Z_p$ для некоторого $p \in \mathbf{P}$, то $\operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^n$. Получаем противоречие. Отсюда, $G = P$ — простая неабелева группа.

Пусть верно условие 3. Поскольку $H \notin h(Z_p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}$ для $Z_p \in K(P)$, то $H \notin \mathfrak{N}$. Из следствия 1 из [11] заключаем, что $\Phi(H) = 1$, тогда $H = [Q]N$. Так как

$$G/P \cong H \in \mathfrak{N}^n \subseteq \mathfrak{S},$$

то Q абелева. Из монолитичности H следует, что $Q = C_H(Q)$.

Поскольку Q — абелева группа, $Q \subseteq F(H)$. Но $F(H) \subseteq C_H(Q) = Q$. Следовательно, $Q = F(H)$. Так как $H \in \mathfrak{N}^n$, то $H^{\mathfrak{N}^{n-1}} \in \mathfrak{N}$, а значит, $H^{\mathfrak{N}^{n-1}} \subseteq F(H) = Q$. Из монолитичности H получим, что $Q = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичной с-формации $\mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, и неединичной формации $\mathfrak{H} \neq \varnothing$ является однопорожденной с-формацией, то выполняются следующие условия:*

(1) $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$,

(2) $\mathfrak{M}$ — *метанильпотентная однопорожденная с-формация,*

(3) $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(B)) = \varnothing$ *для всех* $B \in K(\mathfrak{M})$, *где* m — *минимальный с-спутник формации* $\mathfrak{M}$,

(4) *если* $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$, *то* $\mathfrak{H}$ - *однопорожденная формация, причем* $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{N}$ *влечет включение* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \operatorname{cform} A$. Допустим, что

$$K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \nsubseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}.$$

Так как по условию $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то $K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} \neq \varnothing$. Тогда по лемме 2 в формации $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество наследственных c-подформаций, что противоречит лемме 1. Значит,

$$K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A},$$

то есть формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют условию 1.

Пусть h — минимальный c-спутник формации $\mathfrak{F}$. По лемме 3 формация $\mathfrak{F}$ имеет также c-спутник f такой, что $f(B) = m(B)\mathfrak{H}$ для всех $B \in K(\mathfrak{M})$, где m — минимальный c-спутник формации $\mathfrak{M}$, $f(B) = \mathfrak{H}$ при всяком $B \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$ и $f(B) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{J} \setminus K(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Поскольку m — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$, то f — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что найдутся такие различные простые числа p и q, что в формации $m(Z_p)$ содержится группа Z_q и $q \in \pi(\mathfrak{H})$. Пусть H — некоторая qd-группа из $\mathfrak{H}$. Для всякого натурального числа n через H_n обозначим регулярное сплетение

$$Z_q \wr H^n = [K]H^n,$$

где K — база сплетения H_n, а H^n обозначает некоторую группу, являющуюся прямым произведением n изоморфных копий группы H. Так как

$$H_n/K \cong H^n \in \mathfrak{H},$$

то есть $(H_n)^{\mathfrak{H}} \subseteq K \in m(Z_p)$, то $H_n \in m(Z_p)\mathfrak{H}$. По лемме 18.8(b) из [12] $O_p(H_n) = 1$. Следовательно, по теореме работы [9] $H_n \in h(Z_p)$. Если L — подгруппа порядка q из H, то по лемме 18.8(a) из [12] группа $T_n = Z_q \wr L^n$ изоморфно вкладывается в H_n. Тогда

$$T_n \in \mathrm{sform}(A/F_{Z_p}(A))$$

для всех $n \in \mathbf{N}$. Ввиду леммы 3.1.7 из [4] ступень нильпотентности группы T_n не меньше $n + 1$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4].

Итак, в дальнейшем мы можем считать, что если p и q — различные простые числа и группа Z_q принадлежит формации $m(Z_p)$, то $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 8.16 в [5], можно показать, что в этой ситуации формация $\mathfrak{H}$ абелева.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ — метанильпотентная однопорожденная c-формация. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$. Тогда, по лемме 6 в $\mathfrak{M}$ имеется неметанильпотентная c-подформация $\mathfrak{M}_0$, у которой все собственные c-подформации метанильпотентны. Причем по лемме 7 $\mathfrak{M}_0 = \mathrm{cform}\, G$, где группа G удовлетворяет одному из следующих условий:

(a) $P = G^{\mathfrak{N}^2}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G,

(b) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а $H = [Q]N \neq 1$, $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H.

Пусть G удовлетворяет условию (a) и $B \in K(P)$. Ясно, что $G \in m(B)$. Пусть M — неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Для всякого натурального числа n через G_n обозначим регулярное сплетение

$$G_n = G \wr M^n = [K]M^n,$$

где K — база сплетения. Так как $G_n/K \cong M^n \in \mathfrak{H}$, то $(G_n)^{\mathfrak{H}} \subseteq K \in m(B)$. Если $G = P$, то $(G_n)^{\mathfrak{H}} \in m(B)$, то есть $G_n \in m(B)\mathfrak{H}$. Поскольку $O_T(G_n) = 1$ для любой простой группы $T \in \mathfrak{J} \setminus (B)$, по теореме из [9]

$$G_n \in h(B) = \mathrm{form}(A/F_B(A))$$

для любого $n \in \mathbf{N}$. Но G_n содержит монолит порядка $|G|^{|M|^n}$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4].

Предположим, что $P \subset G$. Докажем, что в этом случае $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямо в K. Пусть D_1 — проекция $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ на первую копию G_1. Допустим, что $D_1 \neq G_1$. Поскольку $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ нормальна в G_n, то D_1 нормальна в G_1. По лемме 3.1.9 из [4]

$(G_1/D_1) \wr M^n$ — гомоморфный образ группы $G_n/(G_n)^{\mathfrak{H}}$, то есть $(G_1/D_1) \wr M^n \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\pi(G_1) \cap \pi(\mathfrak{H}) \neq \varnothing$. Без ограничения общности в качестве M можно взять прямое произведение qd-групп из $\mathfrak{H}$, где $q \in \pi(G_1) \cap \pi(\mathfrak{H})$, по одной для каждого q.

Уточним строение $\mathfrak{H}$. Введем обозначение

$$\mathfrak{F}_1 = \mathrm{form}\{A/F_B(A) \mid B \in K(A)\}.$$

Хорошо известно, что формация, порожденная конечным множеством групп, однопорождена. Значит, $\mathfrak{F}_1 = \mathrm{form}\, S$ для некоторой группы S. Пусть A_1 — произвольная монолитическая группа из $\mathfrak{H}$. Понятно, что $O_{Z_p}(A_1) = 1$ для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Значит, $A_1 \in \mathfrak{H} \subseteq m(Z_p)\mathfrak{H}$ и по теореме из [9]

$$A_1 \in h(Z_p) = \mathrm{form}(A/F_{Z_p}(A)) \subseteq \mathfrak{F}_1.$$

Следовательно, всякая монолитическая группа из $\mathfrak{H}$ входит в $\mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Если L — подгруппа порядка q из M, а Z_q — подгруппа порядка q из G_1/D_1, то по лемме 18.8(a) из [12], группа $T_n = Z_q \wr L^n$ изоморфно вкладывается в $(G_1/D_1) \wr M^n$. Тогда $T_n \in \mathrm{sform}\, S$ для всех $n \in \mathbf{N}$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4]. Таким образом, $G_1 = D_1$, то есть $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямо в K. Поэтому $(G_n)^{\mathfrak{H}} \in m(B)$ и $G_n \in m(B)\mathfrak{H}$. Поскольку $O_T(G_n) = 1$ для любой простой группы $T \in \mathfrak{I} \setminus (B)$, по теореме работы [9]

$$G_n \in h(B) = \mathrm{form}(A/F_B(A)).$$

Но G_n содержит монолит порядка $|P|^{|M|^n}$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4].

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 8.16 в [5], можно показать, что группа G не может удовлетворять и условию (b). Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — однопорожденная c-формация. Поскольку всякая c-подформация из $\mathfrak{M}$ наследственна, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. По лемме 1 в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное множество c-подформаций. Пусть

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}$$

— такая цепь c-формаций, что $\mathfrak{M}_{i-1}$ — максимальная c-подформация в $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть

$$H_i \in \mathfrak{M}_i \setminus \mathfrak{M}_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда

$$\mathfrak{M} = \mathrm{cform}\{H_1, \ldots, H_k\} = \mathrm{cform}\, H_1 \times \ldots \times H_k,$$

то есть $\mathfrak{M}$ — однопорожденная c-формация. Итак, $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 2.

Предположим, что найдется такое простое число q, что $q \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(B))$. Так как формация $\mathfrak{M}$ метанильпотентна, $B \cong Z_p$ для некоторого $p \in \mathbf{P}$. Причем, по следствию 1 из [9] $m(Z_p) \subseteq m_1(Z_p)$, где m_1 — минимальный c-спутник формации $\mathfrak{N}^2$. По теореме 7.9 из [5] $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}$. Более того, учитывая теорему работы [9], заключаем, что $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, $q \neq p$ и в формации $m(Z_p)$ имеется группа порядка q. Значит, как показано ранее, $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Получаем противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют условию 3.

Пусть $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Тогда найдется такое $Z_p \in K(\mathfrak{M})$, что $\mathfrak{E} \subset m(Z_p)$. Но $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Поэтому в формации $m(Z_p)$ имеется группа простого порядка q, где $q \neq p$. В этом случае ввиду установленного ранее формация $\mathfrak{H}$ абелева.

Предположим теперь, что $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Ранее отмечалось,что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{A}$. Тогда ввиду доказанного выше $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $m(Z_p) = \mathfrak{E}$ при любом $Z_p \in K(\mathfrak{M})$. Таким образом,

$$f(Z_p) = m(Z_p)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$$

для всех $Z_p \in K(\mathfrak{M})$ и $f(B) = \mathfrak{H}$ для $B \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. Но $h \leqslant f$. Значит, $A/F_B(A) \in \mathfrak{H}$ при всех $B \in K(A)$, то есть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1$ — однопорожденная формация. Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$. Поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$, по лемме 3.1.5 из [4] число неизоморфных монолитических групп из $\mathfrak{H}$ конечно, ибо все они являются циклическими группами порядка не больше $|A|$. Значит, и в этом случае формация $\mathfrak{H}$ однопорождена.

Теорема доказана.

Замечание 2. Аналогичные результаты независимо получены и анонсированы в [13].

Теорема 2. *Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичной с-формации $\mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$ и неединичной формации $\mathfrak{H} \neq \varnothing$ является однопорожденной с- формацией, если выполняются следующие условия:*

(1) $K(\mathfrak{H}) \subseteq K(\mathfrak{M})$,

(2) $\mathfrak{M}$ — *метанильпотентная однопорожденная с-формация,*

(3) $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(B)) = \varnothing$ *для всех* $B \in K(\mathfrak{M})$, *где* m — *минимальный с-спутник формации* $\mathfrak{M}$,

(4) *если* $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$, *то* $\mathfrak{H}$ — *однопорожденная формация, причем* $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$ *влечет включение* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$.

Доказательство. Обозначим формацию $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{F}$. Пусть $\pi(\mathfrak{M}) = \{p\}$. Учитывая включение $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, заключаем, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$. Из условия 1 следует, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p$. Значит,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p.$$

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}(Z_p)$.

Рассмотрим случай, когда $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Ввиду леммы 3 формация $\mathfrak{F}$ имеет такой c-спутник f, что $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$, если $A \in K(\mathfrak{M})$, и $f(A) = \varnothing$ для всех $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{M})$. По условию 2 $\mathfrak{M}$ — однопорожденная c-формация. Значит, по следствию 6 из [8] $K(X\mathfrak{M}) = K(X\mathfrak{F})$ — конечное множество.

Используя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 8.16 в [5], несложно показать, что формация $m(A)\mathfrak{H}$ для любого $A \in K(\mathfrak{M})$ — однопорождена. Тогда по лемме 3.5.21 из [4] $\mathfrak{F}$ является однопорожденной c-формацией.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Скиба А. Н., О произведении формаций. *Алгебра и логика* (1983) **22**, №5, 574–583.
2. Скиба А. Н. О факторизациях одного класса формаций конечных групп. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 108–110.
3. Skiba A. N., On nontrivial factorizations of an onegenerated local formation of finite groups. In: *Proc. Int. Conf. Algebra Dedicat. Mem. A. I. Malcev,* Novosibirsk, 21–26 Aug. 1989, p. 111.
4. Скиба А.Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
5. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем.* Наука, Москва, 1989.
6. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
7. Ведерников В. А., Сорокина М. М., О композиционных наследственных критических формациях. Препринт №1., Брянск, БГПУ, 1996.
8. Еловиков А. Б., Кратно Ω-композиционные формации групп. Препринт №3, Брянск, БГПУ, 1999.
9. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О минимальном композиционном экране композиционной формации. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 39–43.
10. Еловиков А. Б., О факторизации формаций. *Тезисы межд. науч. конф., посвященной 80-летию проф. Вольфганга Гашюца.* Гомель, 16–21 октября 2000 г., Гомельский гос. ун-т., Гомель, 23–25.
11. Сорокина М. М., О композиционных и локальных критических формациях. *Изв. вузов. Сер. математика* (2000), №7, 59–66.
12. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups.* Gruyter, Berlin, 1992.
13. Го Вэньбинь, Скиба А. Н., Факторизации однопорожденных композиционных формаций. В сб.: *Тезисы IV Межд. алгебр. конф., посвященной 60-летию проф. Ю. И. Мерзлякова.* Новосибирск, 7–11 августа 2000 г., Институт математики СО РАН, Новосибирск, с. 60–61.

Статья поступила 06.03.2001.

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА», 2001, ТОМ 13, ВЫПУСК 3

Заведующая редакцией *Л. М. Барыкина*

Сдано в набор 8.08.2001. Подписано к печати 28.08.2001. Формат 70 × 100/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,0. Усл. кр.-отт. 3,1 тыс. Уч.-изд. л. 12,6. Бум. л. 5,0.
Тираж 234 экз. Заказ №2448.

Свидетельство о регистрации №1868 от 28.01.1991 г. в Госкомпечати СМ СССР.

Учредители: Академия наук СССР, Отделение математики

Адрес издательства: 117997 г. Москва, Профсоюзная ул., д. 90.
Адрес редакции: 117966 г. Москва ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, комн. 622. Тел. 938 3700.

Отпечатано в ППП "Типография "Наука"
121099 г. Москва Г-99, Шубинский пер., д. 6.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК–005–93, том 2;
952000 – журналы