R. T. Zunnunov, M. A. Mamasolieva, A nonlocal boundary value problem for a mixed-type equation in an unbounded domain, which is part of an elliptic rectangle, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2014, Number 1, 49–59

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-49-59

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. № 1(8). С. 49-59. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-49-59

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК

Р.Т. Зуннунов[1], М.А. Мамасолиева[2]

[1] Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. ВУЗ городок
[2] Кокандский государственный педагогический университет им. Мукини,
113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37
E-mail: zunnunov@mail.ru

В статье для уравнения смешанного типа в неограниченной области эллиптическая часть которой прямоугольник, доказана однозначная разрешимость одной нелокальной краевой задачи. Единственность решения доказана методом интегралов энергии, а существование методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, нелокальная краевая задача, метод интегралов энергии, метод интегральных уравнений.

MSC 35M10

A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION IN AN UNBOUNDED DOMAIN, WHICH IS PART OF AN ELLIPTIC RECTANGLE

R.T. Zunnunov[1], M.A. Mamasolieva[2]

[1] National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan, Tashkent c., VUZ gorodok st.
[2] Kokand State Pedagogical Institute by Mukini, 113000, Uzbekistan, Kokand, Amira Temura st. 37
E-mail: zunnunov@mail.ru

In an article for mixed-type equation in an unbounded domain elliptic part is a rectangle, the unique solvability of a nonlocal boundary value problem. The uniqueness of the solution is proved by energy integrals, and the existence of the method of integral equations.

Key words: mixed-type equation, the nonlocal boundary value problem, a method of energy integrals, the method of integral equations

Введение

Математический аппарат дифференциальных уравнений смешанного типа является эффективным инструментом в решении прикладных задач физики. В настоящее время математическая теория бурно развивается чему свидетельствует множество работ посвященных этой проблематике. Не исключением является и наша статья

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = const > 0, \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области:

$$\Omega = \Omega^+ \cup AB \cup \Omega^-,$$

где $\Omega^+ = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $AB = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, а Ω^- – область, ограниченная полупрямой $\sigma = \{(x,y) : 0 \le x < \infty, y = 0\}$ и характеристикой $\Gamma : \xi = 0$ уравнения (1), где $\xi = x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}$. Предположим, что $\lambda = \lambda_1$ в Ω^+ и $\lambda = \lambda_2$ в Ω^-, и λ_1, λ_2 – заданные действительные числа.

Пусть $k = const > 1$, $a = 2/(1+k)$, $0 < a < 1$ а $\theta_0(x)$ и $\theta_k(x)$- есть точки пересечения характеристики Γ уравнения (1) с линиями $x + [2j/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = x_0, (0 < x_0 < 1)$ при $j = 1$ и $j = k$ соответственно, с координатами

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left[\frac{m+2}{4} \cdot x\right]^{2/(m+2)}\right), \theta_k(x) = \left(\frac{x}{k+1}, -\left[\frac{m+2}{2(k+1)} \cdot x\right]^{2/(m+2)}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta = m/(2m+4),$$

$$\sigma_1 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < 1\},$$

$$\sigma_2 = \{(x,y) : y = 1, 0 < x < 1\},$$

$$\sigma_3 = \{(x,y) : x = 1, 0 < y < 1\},$$

$$\sigma_4 = \{(x,y) : 1 < x < \infty,$$

$$y = 0\}, \Gamma_1 = \Gamma \cap (0 < \eta < 1), \Gamma_2 : \xi = 1,$$

$$\Gamma_3 = \Omega^- \cap (\eta = 1), \Gamma_4 = \Gamma \cap (\eta > 1),$$

$$\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2},$$

Ω_1^- – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB и характеристиками Γ_1 и Γ_2 , Ω_2^- – неограниченный характеристический четырехугольник ограниченный характеристиками Γ_2,Γ_3 и Γ_4, а Ω_3^--неограниченный характеристический треугольник ограниченный полупрямой σ_4 и характеристикой Γ_2 уравнения (1).

Задача T_n^∞. *Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:*

1) $u(x,y)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\backslash\left(\Gamma_2\cup\Gamma_3\right)\right)\cap C^2\left(\Omega^+\cup\Omega_1^-\cup\Omega_2^-\cup\Omega_3^-\right)$, а $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше чем $1-2\beta$ при $x\to 1$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях $\Omega^+,\Omega_1^-,\Omega_2^-$ и Ω_3^-.

3) $u(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u(x,1)=\varphi_3\left(x\right),\ \ 0\le x\le 1, \tag{3}$$

$$u(x,0)=\varphi_4\left(x\right),\ \ 1\le x<+\infty, \tag{4}$$

$$u\left|_{\Gamma_4}\right.=\psi_1\left(x\right),\ \ 1/2\le x<+\infty, \tag{5}$$

$$A_{0x}^{1,\lambda_2}\left\{D_{0x}^{1-\beta}u[\theta_0(x)]\right\}+\omega\left(x\right)A_{0x}^{1,a\lambda_2}\left\{D_{0x}^{1-\beta}u[\theta_k(x)]\right\}=\delta(x),\ 0<x<1, \tag{6}$$

где $\omega(x)$, $\delta(x),\varphi_3\left(x\right),\varphi_4\left(x\right),\varphi_5\left(x\right)$, $\varphi_i(y)\left(i=1,2\right)$ – заданные функции, причем $\varphi_i(y)\in C[0,1]$; $\omega(x)$, $\delta(x),\varphi_3\left(x\right)\in C[0,1]$; $\varphi_4\left(x\right)\in C\left[1,+\infty\right)$; $\psi_1\left(x\right)$ – непрерывная и ограниченная функция на промежутке $[1/2,+\infty)$.

Для заданных функций выполняются условия согласования:

$$\varphi_4\left(1\right)=\varphi_2\left(0\right),\varphi_1\left(1\right)=\varphi_3\left(0\right),\varphi_2\left(1\right)=\varphi_3\left(1\right),$$

$$\psi_1\left(1\backslash 2\right)=\frac{1}{\sin\pi\beta}\int\limits_0^1\left[z\left(1-z\right)\right]^{-\beta}\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda_2\sqrt{z\left(1-z\right)}\right]F_1\left(z\right)dz.$$

Здесь $\bar{I}_p\left[x\right]=\Gamma\left(p+1\right)\left(x/2\right)^{-p}I_p\left[x\right]$, а $I_p\left[x\right]$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка p [1];

$$F_1(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-a^{1-2\beta}\right)^j\varpi_j(x)\delta_1(a^jx),$$

$$\delta_1\left(x\right)=\Gamma\left(\beta\right)x^{\beta}\delta\left(x\right),$$

$$\varpi_n(x)=\omega(x)\ \omega(ax)...\omega(a^{n-1}x),\ \ \varpi_0(x)=1.$$

Условие (6) связывает значения искомой функции в двух точках, лежащих на характеристике Γ_1. В силу обратимости операторов $A_{sx}^{1,\lambda}$ [2] и D_{sx}^{δ} [3] из задачи T_n^{∞} в частном случае при $\omega\left(x\right)\equiv 0$ следует задача Трикоми для уравнения (1) в области Ω.

Целью настоящей работы является доказательство существования и единственности решения задачи T_n^{∞}.

Пусть $u\left(x,y\right)$ – решение задачи T_n^{∞}. Введем обозначения:

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1,u_y(x,0)=\nu(x),0<x<1.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\tau(0)=0,\tau(x)\in C^{(0,\alpha)}\left[0,1\right],\alpha>1-2\beta \tag{7}$$

и

$$\max_{[0,1]}|\omega(x)|=M_0<a^{2\beta-1}, M_0=const>0 \tag{8}$$

тогда задача T_n^{∞} не может иметь более одного решения.

Доказательство. Известно [4], что решение задачи T_n^{∞} в области Ω_1^- удовлетворяющее условиям $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \nu(x)\in C^2(0,1)$ представимо в виде

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1\frac{\tau[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^{1-\beta}}\bar{I}_{\beta-1}\left[2\lambda_2\sigma\sqrt{t(1-t)}\right]dt+$$

$$+\gamma_2 y\int_0^1\frac{\nu[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^{\beta}}\bar{I}_{-\beta}\left[2\lambda_2\sigma\sqrt{t(1-t)}\right]dt, \tag{9}$$

где $\sigma=[2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}$, $\gamma_1=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2=\Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$. Пользуясь (9) и проводя аналогичные преобразования как в работе [2], имеем

$$A_{0x}^{1,\lambda_2}\left\{D_{0x}^{1-\beta}u(\theta_0(x))\right\}=\frac{x^{-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left\{\Gamma(2\beta)\,C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)]-\frac{\pi\gamma_3\nu(x)}{\sin(2\beta\pi)}\right\}, \tag{10}$$

$$A_{0x}^{1,a\lambda_2}\left\{D_{0x}^{1-\beta}u(\theta_{0k}(x))\right\}=\frac{a^{1-2\beta}x^{-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left\{\Gamma(2\beta)\,C_{0ax}^{1,\lambda_2}[\tau(x)]-\frac{\pi\gamma_3\nu(ax)}{\sin(2\beta\pi)}\right\},$$

где $\gamma_3=\ \Gamma(\beta)\,(2-4\beta)^{2\beta}/[2\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(2\beta)]$.

Подставляя (10) в (6) получим функциональное уравнение вида

$$\Phi(x)+a^{1-2\beta}\omega(x)\Phi(ax)=\delta_1(x),\ 0<x<1, \tag{11}$$

где

$$\Phi(x)=\Gamma(2\beta)C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)]-\frac{\pi\gamma_3}{\sin(2\beta\pi)}\nu(x), \tag{12}$$

$$\Phi(ax)=\Gamma(2\beta)C_{0(ax)}^{1,\lambda_2}[\tau(x)]-\frac{\pi\gamma_3}{\sin(2\beta\pi)}\nu(ax).$$

Применив метод итераций [5] к решению функционального уравнения (10), для n-ой итерации имеем;

$$\Phi(x)=(-a^{1-2\beta})^n\varpi_n(x)\Phi(a^nx)+\sum_{j=0}^{n-1}(-a^{1-2\beta})^j\varpi_j(x)\delta_1(a^jx), \tag{13}$$

Функцию $\Phi(x)$ будем искать в классе функций $C(0,1)$ и ограниченных при $x=0$. Переходя в (13) к пределу при $n\to\infty$ и учитывая (8),$0<a<1$, $0<M_0a^{2\beta-1}<1$ а также ограниченность искомой функции $\Phi(x)$, получим

$$\Phi(x)=F_1(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{14}$$

Учитывая (12), из (14), получим функциональное соотношение, между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенное из области Ω_1^-:

$$\nu(x)=\gamma_4C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)]-\frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)}F_1(x), \tag{15}$$

где $\gamma_4 = \Gamma(2\beta)\sin(2\beta\pi)/\pi\gamma_3$.

В силу $0 < a < 1$, $0 < M_0 a^{2\beta-1} < 1$ и $\delta(x) \in C[0,1]$, ряд в составе $F_1(x)$ сходится абсолютно равномерно , при $x \in [0,1]$.

Пусть $u(x,y)$ решение однородной задачи T_n^∞. При этом $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv \varphi_3(x) \equiv \varphi_4(x) \equiv \psi_1(x) \equiv F_1(x) \equiv 0$ и в области Ω^+ справедливо тождество

$$(y^m u u_x)_x + (u u_y)_y - y^m (u_x)^2 - (u_y)^2 - y^m \lambda_1^2 u = 0, \tag{16}$$

Интегрируя тождество (16) по области Ω^+ и применяя формулу Гаусса-Остроградского имеем

$$\iint\limits_{\Omega^+} \left[y^m (u_x)^2 + (u_x)^2 + \lambda_1^2 y^m u^2 \right] dxdy + \int\limits_0^1 \tau(x)\,\nu(x)\,dx = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл

$$\Delta = \int\limits_0^1 \tau(x)\,\nu(x)\,dx. \tag{18}$$

Обращая равенство (15) относительно $\tau(x)$ при $F_1(x) \equiv 0$ с учетом условий (7) , получим

$$\tau(x) = \gamma_4 \int\limits_0^x \nu(t)\,(x-t)^{-2\beta}\,\overline{J}_{-\beta}\left[\lambda_2(x-t)\right]dt. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и учитывая формулы [1]-[2]

$$|x-t|^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta} \int\limits_0^\infty z^{2\beta-1} \cos z(x-t)\,dz,$$

$$J_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] = \frac{|\lambda_2(x-t)/2|^{-\beta}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-\beta)} \int\limits_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{-\beta-1/2} \cos\lambda_2\xi\,(x-t)\,d\xi,$$

после несложных преобразований, имеем

$$\Delta = \frac{\gamma_4}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta} \int\limits_0^{+\infty} z^{2\beta-1} dz \int\limits_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{-\beta-1/2} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^2 \left[\left(\int\limits_0^1 \nu(t)\sin t z_j dt \right)^2 + \left(\int\limits_0^1 \nu(t)\cos t z_j dt \right)^2 \right] d\xi,$$

где $z_j = z - (-1)^j \lambda_2 \xi$, и откуда следует что $\Delta \geq 0$. Учитывая $\Delta \geq 0$ и $u(x,y) \equiv 0$ на $\overline{\sigma_1} \cup \overline{\sigma_2} \cup \overline{\sigma_3}$, из (17) при $\lambda_1 \neq 0$ получим что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}^+$. Если $\lambda_1 = 0$, то $u(x,y) \equiv const$ в $\bar{\Omega}^+$. В силу нулевых граничных условий и в этом случае получаем $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}^+$.

Тогда $\tau(x) \equiv 0$ на $\overline{AB}$, откуда из (15) следует, что $\nu(x) \equiv 0$ на $\overline{AB}$. Тогда, согласно формуле (9), $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_1^-$.

Регулярное решение задачи Гурса в области Ω_2^- удовлетворяющее условию (5) и

$$u|_{\Gamma_3} = \psi_2(x), 1/2 \le x \le 1$$

имеет вид

$$u(x,y) = \Phi(\psi_1, \psi_2), \tag{20}$$

где $\psi_2(x) \in C[1/2,1] \cap C^2(1/2,1)$ и

$$\psi_2(x) = \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau[x+(1-x)(2t-1)]}{[t(1-t)]^{1-\beta}} \bar{I}_{\beta-1}\left[2\lambda_2(1-x)\sqrt{t(1-t)}\right] dt + \tag{21}$$

$$+\gamma_2 y \int_0^1 \frac{\nu[x+(1-x)(2t-1)]}{[t(1-t)]^{\beta}} \bar{I}_{-\beta}\left[2\lambda_2(1-x)\sqrt{t(1-t)}\right] dt.$$

Следовательно , учитывая функциональное соотношение (21) имеем $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0$. Отсюда из (20) получим $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_2^-$.

Регулярное решение задачи Дарбу в области Ω_3^- удовлетворяющее условию (4) и

$$u|_{\Gamma_2} = \psi_3(x), 1 \le x < +\infty$$

имеет вид [2]

$$u(x,y) = \gamma_4 \int_1^{\xi} [(\xi-t)(\eta-t)]^{\beta-1} \bar{J}_{\beta-1}\left[\lambda_2\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right] \varphi_4(t)\, dt + \tag{22}$$

$$+\int_1^{\eta} \Phi_1(t)\, \upsilon(0,t;\xi,\eta)\, dt,$$

где $\Phi_1(t) = \psi_3'(t/2) + 2\beta\psi_3(t/2)/t, \psi_3(t) \in C[1,+\infty] \cap C^2(1,+\infty)$,

$$\upsilon(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} \upsilon_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), \eta > \xi_0, \\ \upsilon_3(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), \eta < \xi_0 \end{cases}$$

$$\upsilon_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta} \Xi_2(\beta, 1-\beta, 1; s_1, s_2),$$

$$\upsilon_3(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = k\frac{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\eta_0-\eta)^{1-\beta}(\xi_0-\xi)^{1-\beta}} H_3\left(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; \frac{1}{s_1}, s_2\right).$$

Ξ_2 и H_3 – гипергеометрические функции Гумберта и Горна [6], а

$$s_1 = \frac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{(\eta_0-\xi_0)(\eta-\xi)}, s_2 = \frac{\lambda_2^2}{4}(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta), k = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}.$$

Функциональное соотношение на характеристике Γ_2 имеет вид

$$\psi_3(x) = \Phi(\psi_1, \psi_2).$$

Так как $\varphi_4(x) \equiv \psi_3(x) \equiv 0$, то из (22) получим $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_3^-$. Следовательно $u(x,y) \equiv 0$, в $\overline{\Omega}$, откуда следует единственность решения задачи T_n^∞.

Теперь переходим к доказательству существования решения задачи T_n^∞. При этом от заданные функции удовлетворяют следующим условиям, $\delta(x) = x^{1-\beta}\delta_0(x), \delta_0(x) \in C^2[0,1], \varphi_4(x) \in C[1/2,+\infty) \cap C^2(1/2,+\infty), \varphi_j(y) = y^2\overline{\varphi}_j(y), \overline{\varphi}_j(y) \in C[0,1], \omega(x) \in C^2[0,1]$.

Нетрудно убедиться, что решение задачи N для уравнения (1) в области Ω^+ имеет вид

$$u(x,y) = -\int_0^1 \nu(\xi)G(\xi,0;x,y;\lambda_1)\,d\xi - \int_0^1 \eta^m\varphi_1(\eta)G_\xi(0,\eta;x,y;\lambda_1)\,d\eta + \tag{23}$$

$$+\int_0^1 \eta^m\varphi_2(\eta)G_\xi(1,\eta;x,y;\lambda_1)\,d\eta - \int_0^1 \varphi_3(\xi)G_\eta(\xi,1;x,y;\lambda_1)\,d\xi.$$

Здесь $G(\xi,\eta;x,y;\lambda_1)$ – функция Грина задачи N, имеющая вид

$$G(\xi,\eta;x,y;\lambda_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}[G_\Gamma(\xi+2n,\eta;x,y;\lambda_1) - G_\Gamma(-\xi+2n,\eta;x,y;\lambda_1)],$$

где $G_\Gamma(\xi,\eta;x,y;\lambda_1)$ - функция Грина для горизонтальной полуполосы, которая имеет вид:

$$G(\xi,\eta;x,y;\lambda_1) = \begin{cases} G_1(\xi,\eta;x,y;\lambda_1), & y \le \eta \le 1, \\ G_2(\xi,\eta;x,y;\lambda_1), & 0 \le \eta \le y, \end{cases}$$

$$G_1(\xi,\eta;x,y;\lambda_1) = -\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]}I_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]I_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho -$$

$$-\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu])}K_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]I_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho +$$

$$+\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]}I_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]K_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho +$$

$$+\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu]}K_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]K_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho,$$

$$G_2(\xi,\eta;x,y;\lambda_1) = -\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]}I_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]I_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho +$$

$$-\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu]}K_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]I_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho +$$

$$+\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]}I_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]K_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho +$$

$$+\frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu]}K_\alpha\left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}}\right]K_\alpha\left[2\alpha\mu\eta^{\frac{m+2}{2}}\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho,$$

$$\alpha=\frac{1}{m+2},\quad a_1=\frac{\pi}{2\sin\alpha\pi},\mu^2=\rho^2+\lambda_1^2.$$

Здесь $K_\alpha[z]$- модифицированная функция Бесселя второго рода [1].

Из (23) при $y\to 0$ получаем фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на AB из эллиптической Ω^+ части смешанной области Ω в следующем виде

$$\tau(x)=-\int\limits_0^1 \nu(t)H_1(x,t)dt-\int\limits_0^1 \nu(t)H_2(x,t)dt+F_2(x), \tag{24}$$

$$H_1(x,t)=k_1\left\{|x-t|^{-2\beta}-(x+t)^{-2\beta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n-x+t)^{-2\beta}-(2n-x-t)^{-2\beta}+(2n+x-t)^{-2\beta}-(2n+x+t)^{-2\beta}\right]\right\},$$

$$H_2(x,t)=f(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[f(x,t+2n)+f(x,t-2n)\right]$$

$$f(x,t)=k_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_1|^k}{\Gamma(k-\beta+1)\,k!}\left[\left(\frac{|x-t|}{2}\right)^{2k-2\beta}-\left(\frac{x+t}{2}\right)^{2k-2\beta}\right]+$$

$$+k_3\left[(x+t)^{-\beta}I_\beta\left((x+t)\,|\lambda_1|\right)-|x-t|^{-\beta}I_\beta\left(|x-t|\,|\lambda_1|\right)\right]+$$

$$+k_4\int\limits_0^\infty \frac{K_{1/2-\beta}[(1-2\beta)\sqrt{\rho^2+\lambda_1^2}]}{I_{\beta-1/2}[(1-2\beta)\sqrt{\rho^2+\lambda_1^2}]}\left[\rho^2+\lambda_1^2\right]\sin\rho x\,\sin\rho\xi\,d\rho,$$

$$F_2(x)=-\int\limits_0^\infty \eta^m\varphi_1(\eta)\,G_\xi(0,\eta;x,0;\lambda_1)d\eta+\int\limits_0^\infty \eta^m\varphi_2(\eta)\,G_\xi(1,\eta;x,0;\lambda_1)d\eta-$$

$$-\int\limits_0^1 \varphi_3(\xi)\,G_\eta(\xi,1;x,0;\lambda_1)\,d\xi,$$

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},k_2=\frac{(m+2)^{-2\beta}\sqrt{\pi}}{2\Gamma^2(1/2+\beta)},k_3=|2\lambda_1|^\beta,k_2=\frac{4\,(m+2)^{-2\beta}}{\pi\Gamma^2(1/2+\beta)}.$$

Исключая функцию $\tau(x)$ в (15) и (24) получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\nu(x)$ в виде:

$$\nu(x)+\gamma_5\int\limits_0^1 \nu(t)K(x,t)dt=\int\limits_0^1 \nu(t)\,L(x,t)dt+F_3(x), \tag{25}$$

где

$$K(x,t)=\left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta}\left\{\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\quad\left(\frac{t}{2n-t}\right)^{2\beta}\left(\frac{1}{2n-t+x}+\frac{1}{2n-t-x}\right)-\right.\right.$$

$$-\left(\frac{t}{2n+t}\right)^{2\beta}\left(\frac{1}{2n+t-x}+\frac{1}{2n+t+x}\right)\quad\}\Bigg\},$$

$$L_1(x,t)=\frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)(1+\sin\pi\beta)}\left\{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x(x-\xi)^{2\beta-1}\left[H_2(\xi,t)\left[1-\bar{J}_\beta[\lambda_2(x-\xi)]\right]\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_2^2}{2(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)}\int\limits_0^x(x-\xi)^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}\left[\lambda(x-\xi)\right]H_2(\xi,t)d\xi\right\},$$

$$F_3(x)=\frac{\gamma_4}{(1+\sin\pi\beta)}\left\{C_{0x}^{1,\lambda}\left[F_2(x)\right]-\frac{1}{\Gamma(2\beta)}F_1(x)\right\},$$

$$\gamma_5=\cos\pi\beta/\pi(1+\sin\pi\beta).$$

В силу условий, наложенных на заданные функции имеем $F_3(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, причем $F_3(x)=O\left(x^{2\beta}\right)$.

Теперь переходим к решению уравнения (19) с этой целью запишем его в виде

$$\nu(x)+\gamma_5\int\limits_0^1\nu(t)K(x,t)\,dt=F_4(x),\tag{26}$$

где $F_4(x)=F_3(x)-\int\limits_0^1\nu(t)L(x,t)\,dt$.

Полагая $\nu(x)=x^{2\beta}\mu(x)$, $K(x,t)=\left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta}K_1(x,t)$, $F_4(x)=x^{2\beta}F_5(x)$, приведем уравнение (26) к виду

$$\mu(x)+\gamma_5\int\limits_0^1\mu(t)K_1(x,t)\,dt=F_5(x),\tag{27}$$

где

$$K_1(x,t)=\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\quad\left(\frac{t}{2n-t}\right)^{2\beta}\left(\frac{1}{2n-t+x}+\frac{1}{2n-t-x}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{t}{2n+t}\right)^{2\beta}\left(\frac{1}{2n+t-x}+\frac{1}{2n+t+x}\right)\right\}.$$

Найдем с начала функцию $K_0(x,t)$, имеющую те же линии особенностей что и ядро $K_1(x,t)$ и такую что сингулярное интегральное уравнение с ядром $K_0(x,t)$ допускает решение в замкнутом виде.

В качестве ядра $K_0(x,t)$ возьмем выражение

$$K_0(x,t)=\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+t+x}+\frac{1}{2n+t-x}-\frac{1}{2n-t+x}-\frac{1}{2n-t-x}\right).$$

И запишем уравнение (27) в виде

$$\mu(x)+\gamma_5\int\limits_0^1\mu(t)K_0(x,t)\,dt=F_5(x)-\gamma_5\int\limits_0^1\Delta K(x,t)\mu(t)\,dt\tag{28}$$

где $\Delta K(x,t) = K_0(x,t) - K_1(x,t)$.

Пользуясь разложением ядер $K_1(x,t)$ и $K_0(x,t)$ функцию $\Delta K(x,t)$ можно писать в виде:

$$\Delta K(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-t)^{1-2\beta}\left[(2n-t)^{2\beta}-t^{2\beta}\right]}{(2n-t)^2-x^2} - \frac{(2n+t)^{1-2\beta}\left[(2n+t)^{2\beta}-t^{2\beta}\right]}{(2n+t)^2-x^2}\right\}.$$

Отсюда нетрудно доказать, что $\Delta K(x,t)$ – ограниченна в квадрате $0 \le x,t \le 1$.

Теперь считая правую часть уравнения (28) известной, запишем ее виде

$$\mu(x) + \gamma_5 \int_0^1 \mu(t) K_0(x,t)\,dt = F_6(x). \tag{29}$$

Используя разложения $ctgx$ на простейшие дроби

$$ctgz = \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-k^2\pi^2},\;\; z \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi....$$

можно упростить ядро $K_0(x,t)$:

$$K_0(x,t) = \frac{\pi}{2}\left[ctg\frac{\pi}{2}(t-x) + ctg\frac{\pi}{2}(t+x)\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left(\sin^2\frac{\pi t}{2}\right)}{\sin^2\frac{\pi t}{2} - \sin^2\frac{\pi x}{2}}.$$

Произведя замену $z = \sin^2\frac{\pi x}{2}$, $\zeta = \sin^2\frac{\pi t}{2}$ и полагая $\rho(z) = \mu(x)$, $r(z) = F_6(x)$ из (26) получим сингулярное интегральное уравнение типа Коши

$$\rho(z) + \gamma_5 \int_0^1 \frac{\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = r(z). \tag{30}$$

Так как $1-\gamma_5^2 \ne 0$, то уравнение (30) является уравнение нормального типа. В соответствии с этим решение уравнения (30) может быть построено согласно общей теории [7]. Из постановки задачи T_n^{∞}, введенных обозначений и свойств заданных функций следует что решение уравнение (30) будем искать в классе $h(0)$, то есть в классе функций, ограниченных при $z \to 0$ и неограниченных при $z \to 1$.Индекс χ уравнение (30) классе $h(0)$ равен нулю, а каноническая функция $\mathrm{X}(z)$ класса $h(0)$ имеет вид:

$$\mathrm{X}(z) = [z/(z-1)]^{\frac{1-2\beta}{4}}.$$

Тогда, согласно общей теории уравнения (30) имеет единственное решения и оно дается формулой

$$\rho(z) = \frac{\sqrt{1+\sin\pi\beta}}{\sqrt{2}}\left[r(z)\cos\frac{\pi}{2}\left(\beta - \frac{1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\pi}\int_0^1\left(\frac{z(1-\zeta)}{\zeta(1-z)}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}}\frac{r(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\right]. \tag{31}$$

Учитывая (31) и возвращаясь к прежним переменным x,t, и к функции $\nu(x)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью, эквивалентное (в классе разрешимости и в классе искомых решений) задаче T_n^∞.

$$\nu(x)+\int_0^1 \nu(t)\; K_2(x,t)\,dt = F_7(x), \tag{32}$$

где

$$K_2(x,t)=\gamma_6\left[\gamma_5\left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta}\Delta K(x,t)-L(x,t)\right]+$$

$$+\gamma_7\int_0^1\left(\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{tg\frac{\pi t}{2}}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}\left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta}K_0(x,\xi)\left[\gamma_5\Delta K(\xi,t)-L(\xi,t)\right]d\xi,$$

$$F_6(x)=\gamma_6 F_2(x)+\gamma_7\int_0^1\left(\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{tg\frac{\pi t}{2}}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}\left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta}K_0(x,t)\,F_2(t)\,dt,$$

$$\gamma_6=\frac{\sqrt{1+\sin\pi\beta}}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right),\;\gamma_7=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin\pi\beta}}{\sqrt{2}}.$$

В силу единственности решения задачи T_n^∞, существует единственное решение уравнения (32). □

Заключение

После того как найдено $\nu(x)$, функция $\tau(x)$ находиться из (15). Затем решение задачи T_n^∞ в областях Ω^+ и Ω_1^- находится по формулам (9),(20),(22) и (23) соответственно.

Библиографический список

1. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М:Высшая школа.1965.424с.
2. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
4. Бакиевич Н.И. Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $y^m u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2 y^m u=0$ // Изв .высш. уч. зав. Серия «Математика». 1964. №2(39). С.7-13.
5. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974. 155 с.
6. Самко С.Г., Килбас А.А, Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688.с.
7. Мусхелешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.03.2014