Автоматика и телемеханика, № 3, 2009

Управление в социально-экономических системах

PACS 02.30.Yy, 02.50.Le

© 2009 г. К.С. СОРОКИН
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается класс многокритериальных линейно-квадратичных динамических задач при неопределенности, для которого приводится конструктивный способ построения гарантированного по исходам и рискам решения.

1. Введение

В статье рассматривается уже ставшая классической линейно-квадратичная динамическая задача, которая с учетом требований, проистекающих из реалий социально-экономического моделирования, претерпевает следующие модификации:

во-первых, помимо управляющего воздействия ЛПР (лица, принимающего решение) учитывается также и влияние неопределенных факторов, т.е. постановка становится игровой: в данном случае рассматривается класс контруправлений (т.е. ЛПР выбирает позиционную контрстратегию) "против" программной неопределенности;

во-вторых, качество управления оценивается не одним, а сразу несколькими критериями, таким образом, задача приобретает многокритериальный характер;

в-третьих, наряду с заданными критериями ЛПР учитывает еще и риски – формализация функции риска по Сэвиджу позволяет использовать это понятие в постановке задачи, не содержащей даже намека на стохастичность.

Таким образом, приходим к многокритериальной динамической задаче (в классе контрстратегий) при неопределенности и необходимости ее решения при оптимальном сочетании исходов и рисков. В настоящей статье ограничимся линейно-квадратичным вариантом во многом в целях получения явного вида решения для достаточно широкого класса задач. Аналогичным задачам, только в классе позиционных стратегий, посвящена монография [1].

2. Математическая модель

Под линейно-квадратичной многокритериальной позиционной динамической задачей при неопределенности (ДМЗН) понимается упорядоченный набор

$$\langle \Sigma, \mathfrak{A}, \mathcal{Z},\ J(U, Z, t_0, x_0)\rangle. \tag{1}$$

Здесь изменение управляемой системы Σ описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + u + A_1 z + a(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где t – время, меняющееся от $t_0 \geqslant 0$ до $\vartheta = \mathrm{const} > t_0$, фазовый вектор $x \in \mathbf{R}^m$, вектор управляющих воздействий ЛПР $u \in \mathbf{R}^m$, вектор неопределенных факторов $z \in \mathbf{R}^k$, а пара $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbf{R}^m$ – заданная начальная позиция. В (2) $m \times m$-матрица A, $m \times k$-матрица A_1 постоянны и компоненты m-вектора $a(t)$ непрерывны по $t \in [0, \vartheta]$ (обозначаем этот факт как $a(\cdot) \in C_m[0, \vartheta]$).

Следующим образом формализуется множество $\mathfrak{A}$ контрстратегий U, выбором которых "распоряжается" ЛПР:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} = \{U \div u(t,x,z) \,|\, u(t,x,z) = P(t)x + Q(t)z + p(t) \\ &\forall P(\cdot) \in C_{m\times m}[0,\vartheta],\ \forall Q(\cdot) \in C_{m\times k}[0,\vartheta]\ \forall p(\cdot) \in C_m[0,\vartheta]\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Множество $\mathcal{Z}$ программных неопределенностей Z определим следующим образом:

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z[t] \,|\, \dot{z}[t] = Bz[t] + b(t),\ \forall z[t_0] = z_0 \in \mathbb{R}^k\}, \tag{4}$$

где $k \times k$-матрица B постоянна, $b(\cdot) \in C_k[0, \vartheta]$. Заметим, что источником принятого в (4) описания множества неопределенности $\mathcal{Z}$ послужила модель Эванса из [2]; множество неопределенностей $\mathcal{Z}$ получаем, когда начальное значение z_0 "пробегает" все евклидово пространство $\mathbb{R}^k$, а множество контрстратегий $\mathfrak{A}$, – когда матрицы $P(t), Q(t)$ и вектор $p(t)$ "пробегают" все множество непрерывных на $[0, \vartheta]$ матриц и векторов соответственно.

Наконец, $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ – i-я компонента векторного критерия

$$J(U, Z, t_0, x_0) = (J_1(U, Z, t_0, x_0), \ldots, J_n(U, Z, t_0, x_0)),$$

заданного следующим линейно-квадратичным функционалом:

$$\begin{aligned} J_i(U,Z,t_0,x_0) &= x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + 2c_i' x(\vartheta) + \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} \{u'[t][D_i u[t] + 2K_i z[t] + 2M_i x(t)] + z'[t][L_i z[t] + \\ &+ 2N_i x(t)] + x'(t)G_i x(t) + 2d_i' u[t] + 2l_i' z[t] + 2g_i' x(t)\}dt \quad (i \in \mathbf{N}), \end{aligned} \tag{5}$$

здесь использованы *постоянные* $m \times m$-матрицы C_i, D_i, M_i, G_i, $m \times k$-матрицы K_i, N_i', $k \times k$-матрицы L_i, m-векторы c_i, d_i, g_i, k-векторы l_i, причем D_i, L_i, G_i и C_i симметричны; штрих сверху означает операцию транспонирования; множество порядковых номеров критериев обозначим через $\mathbf{N} = \{1, \ldots, n\}$.

3. Определение функций риска

Для каждого критерия $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ $(i \in \mathbf{N})$ из (5) рассмотрим вспомогательную однокритериальную линейно-квадратичную задачу

$$\langle \Sigma, \mathfrak{A}, \mathcal{Z},\ J_i(U, Z, t_0, x_0)\rangle. \tag{6}$$

В (6) управляемая динамическая система Σ описывается дифференциальным векторным линейным уравнением (2) с соответствующим начальным условием; $\mathfrak{A}$ –

множество контрстратегий U из (3); $\mathcal{Z}$ – множество программных неопределенностей Z из (4); $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ – линейно-квадратичный функционал, заданный в (5).

Построим функционал:

$$\max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z, t_0, x_0) = J_i\left(U^{(i)}, Z, t_0, x_0\right) = J_i[Z, t_0, x_0]. \tag{7}$$

Затем для каждого критерия $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ введем *функцию риска по этому критерию*

$$\Phi_i(U, Z, t_0, x_0) = J_i[Z, t_0, x_0] - J_i(U, Z, t_0, x_0). \tag{8}$$

"Содержательный смысл" функции риска: она численно оценивает риск (сожаление) ЛПР в том, что при неопределенности $Z \in \mathcal{Z}$ он выбирает контрстратегию $U \in \mathfrak{A}$, а не $U^{(i)}$, максимизирующую критерий $J_i(U, Z, t_0, x_0)$. Кроме того, отметим, что термин "функция риска" закрепился в литературе, в первую очередь, в связи со статическими задачами; и хотя при рассмотрении динамических задач правильнее говорить о функционале риска, по традиции используют слово "функция".

Заметим, что при определении контрстратегии используется z (де-факто – неопределенность Z), конкретно – неизвестное начальное значение z_0 вектор-функции $z(t)$. Тем не менее с учетом того, что ЛПР известна система из (4), задающая динамику неопределенности, это не нарушает формализацию риска по Сэвиджу [3], более того, в итоге будет построена функция $V_i(t_0, x_0, z_0) = J_i[Z, t_0, x_0]$, зависящая также от $z[t_0] = z_0$ и не зависящая от значения решения $z[t]$ системы из (4) в любой другой момент времени.

Далее используем *векторную функцию риска*, заданную n-векторным функционалом

$$\Phi(U, Z, t_0, x_0) = (\Phi_1(U, Z, t_0, x_0), \ldots, \Phi_n(U, Z, t_0, x_0)),$$

где компоненты $\Phi_i(U, Z, t_0, x_0)$, $i \in \mathbf{N}$, определены равенством (8).

4. Формализация гарантированного решения

Определение 1. Тройку $(U^*, J^p[t_0, x_0], \Phi^p[t_0, x_0]) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{R}^{2n}$ *назовем гарантированным по исходам и рискам решением задачи* (1)*, если при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ *существует неопределенность* $Z_p \in \mathcal{Z}$*, для которой* $J^p[t_0, x_0] = J(U^*, Z_p, t_0, x_0)$*,* $\Phi^p[t_0, x_0] = \Phi(U^*, Z_p, t_0, x_0)$ *и*

1) *контрстратегия* U^* *является максимальной по Парето* [4, 5] *в* $2n$*-критериальной динамической задаче*

$$\langle \Sigma, \mathfrak{A}, \{J_i(U, Z, t_0, x_0), -\Phi_i(U, Z, t_0, x_0)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle, \tag{9}$$

т.е. для каждой тройки $(Z, t_0, x_0) \in \mathcal{Z} \times [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ *несовместна система* $2n$ *неравенств*

$$\begin{cases} J_i(U, Z, t_0, x_0) \geqslant J_i(U^*, Z, t_0, x_0), \\ \Phi_i(U, Z, t_0, x_0) \leqslant \Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0) \quad \forall U \in \mathfrak{A} \ (i \in \mathbf{N}), \end{cases} \tag{10}$$

из которых хотя бы одно строгое;

2) *неопределенность* Z_p *минимальна по Парето в* $2n$*-критериальной задаче*

$$\langle \Sigma(U = U^*), \mathcal{Z}, \{J_i(U^*, Z, t_0, x_0), -\Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle, \tag{11}$$

т.е. при каждых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ *несовместна система* $2n$ *неравенств*

$$\begin{cases} J_i(U^*, Z, t_0, x_0) \leqslant J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0), \\ \Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0) \geqslant \Phi_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) \quad \forall Z \in \mathcal{Z} \ (i \in \mathbf{N}), \end{cases} \tag{12}$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

При этом $J^p[t_0, x_0]$ *назовем гарантированным векторным исходом, а* $\Phi^p[t_0, x_0]$ *– гарантированным векторным риском в задаче* (1) *с начальной позицией* (t_0, x_0).

5. Схема аналитического конструирования гарантированного решения

Утверждение 1. Система неравенств (для каждой тройки $(Z, t_0, x_0) \in \in \mathcal{Z} \times [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$)

$$J_i(U, Z, t_0, x_0) \geqslant J_i(U^*, Z, t_0, x_0) \quad \forall U \in \mathfrak{A} \quad (i \in \mathbf{N}) \tag{13}$$

несовместна (при хотя бы одном строгом) тогда и только тогда, когда несовместна система (10) *(также при хотя бы одном строгом).*

Это утверждение сразу следует из (8) с учетом того, что $J_i[Z, t_0, x_0]$ $(i \in \mathbf{N})$ от U не зависит.

Утверждение 2 [1, с. 281]. *Если для некоторого постоянного* n*-вектора* α *с положительными компонентами* α_i $(i \in \mathbf{N})$ *контрстратегия* $U^* \in \mathfrak{A}$ *найдена из (выполняющегося для всех* $(Z, t_0, x_0) \in \mathcal{Z} \times [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$) *равенства*

$$\max_{U \in \mathfrak{A}} \alpha' J(U, Z, t_0, x_0) = \alpha' J(U^*, Z, t_0, x_0) \tag{14}$$

при ограничениях (2)–(4), *то* U^* *является максимальной по Парето в задаче* (9) *и поэтому удовлетворяет требованию* (1) *определения 1.*

Утверждение 3. Если для некоторого постоянного n*-вектора* β *с компонентами* $\beta_i \in (0, 1)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *неопределенность* Z_p *удовлетворяет условию*

$$\begin{aligned} &\min_{Z \in \mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} [J_i(U^*, Z, t_0, x_0) - \beta_i \max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z, t_0, x_0)] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} [J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) - \beta_i \max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z_p, t_0, x_0)] \end{aligned} \tag{15}$$

при ограничениях (2) *(где* $U = U^*$), (3), (4) *и выполняющегося для всех* $(t_0, x_0) \in \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, *то* Z_p *является минимальной по Парето в задаче* (11) *и поэтому отвечает требованию* (2) *определения 1.*

Справедливость утверждения 3 устанавливается аналогично утверждению 2.

Приведенные утверждения позволяют предложить следующий конструктивный способ построения гарантированного решения для динамической n-критериальной задачи при неопределенности (1).

Шаг 1. Применяя метод динамического программирования, решить задачу (7): построить определенные на $[0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ функции $V_i(t_0, x_0, z_0)$ такие, что

$$\max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0, z_0) \quad \forall (t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \quad (i \in \mathbf{N}). \tag{16}$$

Шаг 2. На основании (14) построить явный вид контрстратегии $U^* \in \mathfrak{A}$, именно, найти $U^* \in \mathfrak{A}$, исходя из условия:

$$\max_{U\in\mathfrak{A}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i J_i(U, Z, t_0, x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i J_i(U^*, Z, t_0, x_0) \ \ \forall (Z, t_0, x_0) \in \mathcal{Z} \times [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \tag{17}$$

при ограничениях (2)–(4) (см. утверждения 1 и 2); здесь снова применяем метод динамического программирования.

Шаг 3. Найти n функций

$$\overline{V}_i(t_0, x_0, z_0) = J_i(U^*, Z, t_0, x_0) \quad \forall (t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{m+k} \ (i \in \mathbf{N}) \tag{18}$$

при ограничениях (2), (3) (где $U = U^* \div u(t, x, z)$) и (4); здесь так же, как и на шаге 2, применяем подходящий вариант метода динамического программирования.

Шаг 4. Построить

$$\begin{aligned} &J_i(U^*, Z, t_0, x_0) = \overline{V}_i(t_0, x_0, z_0), \\ &\Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0, z_0) - \overline{V}_i(t_0, x_0, z_0) \\ &\forall (t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \quad (i \in \mathbf{N}) \end{aligned} \tag{19}$$

и, исходя из (15), решить линейно-квадратичную задачу математического программирования

$$\begin{aligned} &\min_{z_0\in\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{V}_i(t_0, x_0, z_0) - \beta_i V_i(t_0, x_0, z_0)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{V}_i(t_0, x_0, z_p) - \beta_i V_i(t_0, x_0, z_p)\right] \quad \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{20}$$

при хотя бы одном наборе постоянных $\beta_i \in (0, 1)$, $i \in \mathbf{N}$; найденное z_p порождает (в силу (4)) неопределенность $Z_p \div z_p[t]$, где $z_p[t]$ есть решение системы

$$\dot{z} = Bz + b(t), \quad z(t_0) = z_p.$$

Шаг 5. Используя (19), найти

$$\begin{aligned} &J_i^p[t_0, x_0] = J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = \overline{V}_i(t_0, x_0, z_p) \quad (i \in \mathbf{N}), \\ &\Phi_i^p[t_0, x_0] = \Phi_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0, z_p) - \overline{V}_i(t_0, x_0, z_p) \quad (i \in \mathbf{N}); \end{aligned}$$

тогда гарантированное по исходам и рискам решение задачи (1) примет вид

$$(U^*, J^p[t_0, x_0], \Phi^p[t_0, x_0])$$

при любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, где

$$\begin{aligned} &J^p[t_0, x_0] = \left(\overline{V}_1(t_0, x_0, z_p), \ldots, \overline{V}_n(t_0, x_0, z_p)\right), \\ &\Phi^p[t_0, x_0] = \left(V_1(t_0, x_0, z_p) - \overline{V}_1(t_0, x_0, z_p), \ldots, V_n(t_0, x_0, z_p) - \overline{V}_n(t_0, x_0, z_p)\right). \end{aligned}$$

6. Явный вид гарантированного решения

На шагах 1, 2, 3 используются подходящие варианты метода динамического программирования. Все рассуждения проходят по типовой схеме, поэтому приведем ее только для шага 1, а для прочих укажем лишь конечный результат.

Шаг 1. Прежде чем найти функцию риска по i-му критерию из (8), следует построить функцию $V_i(t,x,z)$, исходя из равенства:

$$V_i(t_0,x_0,z_0)=\max_{U\in\mathfrak{A}}J_i(U,Z,t_0,x_0)=J_i\left(U^{(i)},Z,t_0,x_0\right)=J_i[Z,t_0,x_0]\ (i\in\mathbf{N}) \tag{21}$$

для любых $(t_0,x_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^m$, $Z\in\mathcal{Z}$ и при ограничениях (2)–(4), именно, при

$$\dot{x}=Ax+u+A_1z+a(t),\quad x(t_0)=x_0;$$
$$\dot{z}=Bz+b(t),\quad z[t_0]=z_0.$$

Чтобы применить здесь метод динамического программирования, вводится скалярная функция

$$W_i(t,x,u,z,V_i)=\frac{\partial V_i}{\partial t}+\left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]'[Ax+u+A_1z+a(t)]+\left[\frac{\partial V_i}{\partial z}\right]'[Bz+b(t)]+ \tag{22}$$
$$+u'[D_iu+2K_iz+2M_ix]+z'[L_iz+2N_ix]+x'G_ix+2d_i'u+2l_i'z+2g_i'x,$$

где, например, $\dfrac{\partial V_i}{\partial x}$ означает m-вектор-столбец, компоненты которого есть частные производные функции $V_i(t,x,z)$ по координатам m-вектора x; тогда $\left[\dfrac{\partial V_i}{\partial z}\right]'$ в (22) есть вектор-строка $\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial V_i}{\partial z_k}\right)$; далее для сокращения записей используем также обозначения

$$F_i(t,x,u,z)=u'[D_iu+2K_iz+2M_ix]+z'[L_iz+2N_ix]+x'G_ix+2d_i'u+2l_i'z+2g_i'x,$$
$$\chi_i(x)=x'C_ix+2c_i'x\quad(i\in\mathbf{N}).$$

Теорема 1 [1, с. 267]. *Пусть удалось найти m-вектор-функцию $u^*(t,x,z,V_i)$ и единственную непрерывно-дифференцируемую скалярную функцию $V_i(t,x,z)$ такие, что*

1) *при всех $x\in\mathbb{R}^m$, $z\in\mathbb{R}^k$ справедливо тождество*

$$V_i(\vartheta,x,z)=x'C_ix+2c_i'x\equiv\chi_i(x);$$

2) *имеет место*

$$W_i(t,x,u^*(t,x,z,V_i),z,V_i)=\max_u W_i(t,x,u,z,V_i)$$

для любых $t\in[0,\vartheta]$, $x\in\mathbb{R}^m$, $V_i\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}^k$;

3) *для каждых $(t,x,z)\in[0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$ выполняется тождество*

$$W_i(t,x,u(t,x,z,V_i(t,x,z)),z,V_i(t,x,z))\equiv 0;$$

4) *вектор-функция $u^*(t,x,z,V_i(t,x,z))=u^{(i)}(t,x,z)$ такова, что для $U^{(i)}\div u^{(i)}(t,x,z)$ имеет место включение $U^{(i)}\in\mathfrak{A}$, т.е.*

$$U^{(i)}\div u^{(i)}(t,x,z)=P_1^{(i)}(t)x+p^{(i)}(t)+P_2^{(i)}(t)z,$$

где $P_1^{(i)}(\cdot)\in C_{m\times m}[0,\vartheta]$, $p^{(i)}(\cdot)\in C_m[0,\vartheta]$, $P_2^{(i)}(\cdot)\in C_{m\times k}[0,\vartheta]$.

Тогда при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{m+k}$ *контрстратегия* $U^{(i)}$ *и функция* $V_i(t, x, z)$ *удовлетворяют равенству* (21).

Далее $D < 0\,(\leqslant 0)$ означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определенно отрицательна (неположительна)

Утверждение 4 [1, с. 272]. *Если в функционалах* (5)

$$D_i < 0, \quad C_i \leqslant 0, \quad G_i - M_i' D_i^{-1} M_i \leqslant 0 \quad (i \in N),$$

то контрстратегии $U^{(i)} \in \mathfrak{A}$ *и функции* $V_i(t, x, z)$ *реализуют при любых* ($i \in N$, $Z \in \mathcal{Z}$ *и* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$) *равенство* (21).

Теорема 1 приводит к следующему *способу* решения поставленной задачи (предполагаем выполненными требования утверждения 4):

а) из условия (2) теоремы 1 найдем $u^*(t, x, z, V_i)$, максимизирующее $W_i(t, x, u, z, V_i)$ при любых $(t, x, z, V_i) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, именно,

$$u^*(t, x, z, V_i) = -\frac{1}{2} D_i^{-1} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i \right]; \tag{23}$$

б) построим решение $V_i(t, x, z)$ уравнения с частными производными

$$W_i(t, x, u^*(t, x, z, V_i), z, V_i) = \frac{\partial V_i}{\partial t} +$$
$$+ \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} \right]' [A(t)x + u^*(t, x, z, V_i) + A_1 z + a(t)] +$$
$$+ \left[\frac{\partial V_i}{\partial z} \right]' [Bz + b(t)] + F_i(t, x, u^*(t, x, z, V_i), z) = 0$$

с граничным условием

$$V_i(\vartheta, x, z) = \chi_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall z \in \mathbb{R}^k.$$

Будем искать функцию $V_i(t, x, z)$ в виде линейно-квадратичной формы

$$V_i(t, x, z) = x'\Theta_i(t)x + 2z'\Xi_i(t)x + z'\chi_i(t)z + 2\xi_i'(t)x + 2\eta_i'(t)z + \omega_i(t), \tag{24}$$

где соответствующих размерностей матрицы $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$, векторы $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ и скалярная функция $\omega_i(t)$ подлежат определению; предполагаем, что $\Theta_i(t)$ и $\chi_i(t)$ симметричны.

Подставляя $V_i(t, x, z)$ из (24) в (23) для $u^*(t, x, z, V_i)$ и $W_i(t, x, u, z, V_i)$, получаем согласно условию (3) теоремы 1:

$$W_i(t, x, u^*(t, x, z, V_i(t, x, z)), z, V_i(t, x, z)) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} \right]' [Ax + A_1 z + a(t)] -$$
$$- \frac{1}{4} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i \right]' D_i^{-1} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i \right] +$$
$$+ \left[\frac{\partial V_i}{\partial z} \right]' [Bz + b(t)] + z'[L_i z + 2N_i x] + x'G_i x + 2l_i' z + 2g_i' x =$$
$$= x'\dot{\Theta}_i x + 2z'\dot{\Xi}_i x + z'\dot{\chi}_i z + 2\dot{\xi}_i' x + 2\dot{\eta}_i' z + \dot{\omega}_i(t) +$$
$$+ 2[x'\Theta_i + z'\Xi_i + \xi_i'][Ax + A_1 z + a(t)] - [x'(\Theta_i + M_i') +$$
$$+ z'(\Xi_i + K_i') + \xi_i' + d_i'] D_i^{-1} [(\Theta_i + M_i)x + (\Xi_i' + K_i)z + \xi_i + d_i] +$$
$$+ 2[x'\Xi_i' + z'\chi_i + \eta_i'][Bz + b(t)] +$$
$$+ z'L_i z + 2z'N_i x + x'G_i x + 2l_i' z + 2g_i' x = 0.$$

Приравнивая здесь и в условии (1) теоремы 1 коэффициенты при однотипных слагаемых, получаем, что тождества из (3) теоремы 1 выполнены при всех $(t,x,z) \in \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^{m+k}$, если матрицы $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$, векторы $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ и скалярная функция $\omega_i(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$
(25)\qquad \begin{cases} \dot\Theta_i + \Theta_i[A - D_i^{-1}M_i] + [A' - M_i'D_i^{-1}]\Theta_i - \\ - \Theta_i D_i^{-1}\Theta_i + G_i - M_i'D_i^{-1}M_i = 0_{m\times m}, \quad \Theta_i(\vartheta) = C_i; \\ \dot\Xi_i + \Xi_i A + A_1'\Theta_i - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\Theta_i + M_i) + \\ + B'\Xi_i + N_i = 0_{k\times n}, \quad \Xi_i(\vartheta) = 0_{k\times m}; \\ \dot\chi_i + \Xi_i A_1 + A_1'\Xi_i' - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\Xi_i' + K_i) + \\ + \chi_i B + B'\chi_i + L_i = 0_{k\times k}, \quad \chi_i(\vartheta) = 0_{k\times k}; \\ \dot\xi_i - (\Theta_i + M_i')D_i^{-1}(\xi_i + d_i) + A'\xi_i + \Theta_i a(t) + \\ + \Xi_i' b(t) + g_i = 0_m, \quad \xi_i(\vartheta) = c_i; \\ \dot\eta_i - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\xi_i + d_i) + B'\eta_i + A_1'\xi_i + \Xi_i a(t) + \\ + \chi_i b(t) + l_i = 0_k, \quad \eta_i(\vartheta) = 0_k; \\ \dot\omega_i + 2\xi_i' a(t) + 2\eta_i' b(t) - (d_i' + \xi_i')D_i^{-1}(d_i + \xi_i) = 0, \\ \omega_i(\vartheta) = 0. \end{cases}
$$

При выполнении предположений утверждения 4 из [6, с. 208] следует, что первое из (25) матричное дифференциальное уравнение типа Риккати имеет единственное, непрерывное, продолжимое на $[0,\vartheta]$ решение $\Theta_i(t)$. Подставляя $\Theta_i = \Theta_i(t)$ в следующее уравнение, из (25) получаем матричное дифференциальное линейное неоднородное векторное уравнение относительно Ξ_i с непрерывными (по t) коэффициентами. Такая система также имеет [7, с. 29] единственное, непрерывное решение $\Xi_i(t)$, продолжимое на $[0,\vartheta]$. Действуя аналогично, найдем решение $\chi_i(t)$, $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$, $\omega_i(t)$ системы (25).

Используя это решение, получаем, что контрстратегия

$$
\begin{aligned} &U^{(i)} \div u^{(i)}(t,x,z) = u^*(t,x,z,V_i(t,x,z)) = \\ &= -D_i^{-1}[(\Theta_i(t) + M_i)x + (\Xi_i'(t) + K_i)z + \xi_i(t) + d_i] \end{aligned}
$$

и функция

$$
V_i(t,x,z) = x'\Theta_i(t)x + 2z'\Xi_i(t)x + z'\chi_i(t)z + 2\xi_i'(t)x + 2\eta_i'(t)z + \omega_i(t)
$$

(где $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$, $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$, $\omega_i(t)$ являются решением соответствующих подсистем из (25)) реализуют равенство (21) при любых $Z \in \mathcal{Z}$ и $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$ $(i \in \mathbf{N})$.

Шаг 2. Для набора положительных чисел α_i $(i \in \mathbf{N})$ введем следующие матрицы и векторы:

$$
(26)\qquad \begin{aligned} &D_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i D_i,\ d_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i d_i,\ L_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i L_i,\ l_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i l_i, \\ &G_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i G_i,\ g_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i g_i,\ M_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i M_i,\ N_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i N_i, \\ &K_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i K_i,\ C_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i C_i,\ c_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i c_i. \end{aligned}
$$

Решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичную (25) (при выполнении требований утверждения 4),

$$
\begin{cases}
\dot\Theta_\alpha + \Theta_\alpha[A - D_\alpha^{-1}M_\alpha] + [A' - M'_\alpha D_\alpha^{-1}]\Theta_\alpha - \\
- \Theta_\alpha D_\alpha^{-1}\Theta_\alpha + G_\alpha - M'_\alpha D_\alpha^{-1}M_\alpha = 0_{m\times m}, \quad \Theta_\alpha(\vartheta) = C_\alpha; \\
\dot\Xi_\alpha + \Xi_\alpha A + A'_1\Theta_\alpha - (\Xi_\alpha + K'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\Theta_\alpha + M_\alpha) + \\
+ B'\Xi_\alpha + N_\alpha = 0_{k\times m}, \quad \Xi_\alpha(\vartheta) = 0_{k\times n}; \\
\dot\chi_\alpha + \Xi_\alpha A_1 + A'_1\Xi'_\alpha - (\Xi_\alpha + K'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\Xi'_\alpha + K_\alpha) + \\
+ \chi_\alpha B + B'\chi_\alpha + L_\alpha = 0_{k\times k}, \quad \chi_\alpha(\vartheta) = 0_{k\times k}; \\
\dot\xi_\alpha - (\Theta_\alpha + M'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\xi_\alpha + d_\alpha) + A'\xi_\alpha + \Theta_\alpha a(t) + \\
+ \Xi'_\alpha b(t) + g_\alpha = 0_m, \quad \xi_\alpha(\vartheta) = c_\alpha; \\
\dot\eta_\alpha - (\Xi_\alpha + K'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\xi_\alpha + d_\alpha) + B'\eta_\alpha + A'_1\xi_\alpha + \Xi_\alpha a(t) + \\
+ \chi_\alpha b(t) + l_\alpha = 0_k, \quad \eta_\alpha(\vartheta) = 0_k; \\
\dot\omega_\alpha + 2\xi'_\alpha a(t) + 2\eta'_\alpha b(t) - (d'_\alpha + \xi'_\alpha)D_\alpha^{-1}(d_\alpha + \xi_\alpha) = 0, \quad \omega_\alpha(\vartheta) = 0.
\end{cases} \tag{27}
$$

Тогда максимальная по Парето в задаче (9) контрстратегия U^* запишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
U^* \div u(t,x,z,V_\alpha(t,x,z)) &= u^*(t,x,z) = \\
&= -D_\alpha^{-1}\left[(\Xi'_\alpha(t) + K_\alpha)z + (\Theta_\alpha(t) + M_\alpha)x + (\xi_\alpha(t) + d_\alpha)\right].
\end{aligned} \tag{28}
$$

Шаг 3. Зная Парето-максимальное управление U^*, построенное шагом ранее, можно подставить его во всю ту же процедуру динамического программирования и найти функцию Беллмана по каждому критерию. Пусть в задаче (1) фиксирован индекс $i \in \mathbf{N}$ и контрстратегия U^*, имеющая вид (28), которую запишем в виде

$$
U^* \div u^*(t,x,z) = \overline{P}(t)x + \overline{p}(t) + \overline{Q}(t)z, \tag{29}
$$

где (см. (26))

$$
\begin{aligned}
\overline{P}(t) &= -D_\alpha^{-1}\left[\Theta_\alpha(t) + M_\alpha\right], \\
\overline{p}(t) &= -D_\alpha^{-1}\left[\xi_\alpha(t) + d_\alpha\right], \\
\overline{Q}(t) &= -D_\alpha^{-1}\left[\Xi'_\alpha(t) + K_\alpha\right],
\end{aligned} \tag{30}
$$

а $\Theta_\alpha(t)$, $\Xi_\alpha(t)$ и $\xi_\alpha(t)$ суть решение системы (27). Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\overline{A}(t) = A + \overline{P}(t), \quad \overline{a} = a(t) + \overline{p}(t), \quad \overline{A}_1(t) = A_1 + \overline{Q}(t), \\
&\overline{G}_i(t) = G_i + (\overline{P}(t))'D_i\overline{P}(t) + (\overline{P}(t))'M_i + M'_i\overline{P}(t), \\
&\overline{g}_i(t) = g_i + (\overline{P}(t))'D_i\overline{p}(t) + M'_i\overline{p}(t) + (\overline{P}(t))'d_i, \\
&\overline{L}_i(t) = L_i + (\overline{Q}(t))'D_i\overline{Q}(t) + (\overline{Q}(t))'K_i + K'_i\overline{Q}(t), \\
&\overline{l}_i(t) = l_i + (\overline{Q}(t))'D_i\overline{p}(t) + K'_i\overline{p}(t) + \overline{Q}'(t)d_i, \\
&\overline{N}_i(t) = N_i + (\overline{Q}(t))'D_i\overline{P}(t) + K'_i\overline{P}(t) + \overline{Q}'(t)M_i, \\
&\overline{r}_i(t) = (\overline{p}(t))'D_i\overline{p}(t) + 2d'_i\overline{p}(t).
\end{aligned} \tag{31}
$$

Система, аналогичная (25), имеет вид:

$$
(32)\qquad \begin{cases} \dot{\overline{\Theta}}_i + \overline{\Theta}_i\overline{A}(t) + (\overline{A}(t))'\overline{\Theta}_i + \overline{G}_i(t) = 0_{m\times m},\ \overline{\Theta}_i(\vartheta) = C_i; \\ \dot{\overline{\Xi}}_i + \overline{\Xi}_i\overline{A}(t) + (\overline{A}_1(t))'\overline{\Theta}_i + B'\overline{\Xi}_i + \overline{N}_i(t) = 0_{k\times m},\ \overline{\Xi}_i(\vartheta) = 0_{k\times m}; \\ \dot{\overline{\chi}}_i + \overline{\chi}_i B + B'\overline{\chi}_i + (\overline{A}_1(t))'(\overline{\Xi}_i)' + \overline{\Xi}_i\overline{A}_1(t) + \overline{L}_i(t) = 0_{m\times m}, \\ \overline{\chi}_i(\vartheta) = 0_{k\times k}; \\ \dot{\overline{\xi}}_i + (\overline{A}(t))'\overline{\xi}_i + \overline{\Theta}_i\overline{a}(t) + (\overline{\Xi}_i)'b(t) + \overline{g}_i(t) = 0_m,\ \overline{\xi}_i(\vartheta) = c_i; \\ \dot{\overline{\eta}}_i + (\overline{A}_1(t))'\overline{\xi}_i + \overline{\Xi}_i\overline{a}_i(t) + B\overline{\eta}_i(t) + (\overline{\chi}_i)'b(t) + \overline{l}_i(t) = 0_k,\ \overline{\eta}_i(\vartheta) = 0_k; \\ \dot{\overline{\omega}}_i + 2(\overline{\xi}_i)'\overline{a}(t) + 2(\overline{\eta}_i)'b(t) + \overline{r}_i(t) = 0,\ \overline{\omega}_i(\vartheta) = 0 \quad (i\in\mathbf{N}). \end{cases}
$$

Тогда искомая функция принимает вид:

$$
(33)\qquad \begin{aligned} &\overline{V}_i(t_0,x_0,z_0) = J_i(U^*,Z,t_0,x_0) = \\ &= x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 + 2z_0'\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 + z_0'\overline{\chi}_i(t_0)z_0 + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 + 2(\overline{\eta}_i(t_0))'z_0 + \overline{\omega}_i(t_0). \end{aligned}
$$

Шаги 4, 5 (векторные гарантии). Прежде всего здесь найдем минимальную по Парето неопределенность Z_p в задаче (11). Согласно (33) и (11) будет

$$
(34)\qquad \begin{aligned} &J_i(U^*,Z,t_0,x_0) = \overline{\varphi}_i(t_0,x_0) + z_0'\overline{\chi}_i(t_0)z_0 + 2z_0'\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 + 2(\overline{\eta}_i(t_0))'z_0, \\ &\max_U J_i(U^*,Z,t_0,x_0) = \varphi_i(t_0,x_0) + z_0'\chi_i(t_0)z_0 + 2z_0'\Xi_i(t_0)x_0 + 2(\eta_i(t_0))'z_0, \end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned} &\overline{\varphi}_i(t_0,x_0) = x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 + \overline{\omega}_i(t_0), \\ &\varphi_i(t_0,x_0) = x_0'\Theta_i(t_0)x_0 + 2(\xi_i(t_0))'x_0 + \omega_i(t_0), \end{aligned}
$$

а набор $\overline{\Theta}_i(t)$, $\overline{\Xi}_i(t)$, $\overline{\chi}_i(t)$, $\overline{\xi}_i(t)$, $\overline{\eta}_i(t)$, $\overline{\omega}_i(t)$ (соответственно, $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$, $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$, $\omega_i(t)$) есть решение системы (32) (соответственно, (25)). Тогда с учетом (34) утверждение 3 приводится к

$$
(35)\qquad \begin{aligned} &\min_{z_0\in\mathbb{R}^k}\left[z_0'\chi(t_0)z_0 + 2z_0'\Xi(t_0)x_0 + 2(\eta(t_0))'z_0 + \varphi(t_0,x_0)\right] = \\ &= \left[z_p'\chi(t_0)z_p + 2z_p'\Xi(t_0)x_0 + 2(\eta(t_0))'z_p + \varphi(t_0,x_0)\right], \end{aligned}
$$

здесь

$$
\begin{aligned} \chi(t) &= \sum_{i\in\mathbf{N}}\left[\overline{\chi}_i(t) - \beta_i\chi_i(t)\right], \\ \Xi(t) &= \sum_{i\in\mathbf{N}}\left[\overline{\Xi}_i(t) - \beta_i\Xi_i(t)\right], \\ \eta(t) &= \sum_{i\in\mathbf{N}}\left[\overline{\eta}_i(t) - \beta_i\eta_i(t)\right], \\ \varphi(t) &= \sum_{i\in\mathbf{N}}\left[\overline{\varphi}_i(t) - \beta_i\varphi_i(t)\right] \end{aligned}
$$

при постоянных $\beta_i\in(0,1)$ $(i\in\mathbf{N})$.

Затем уже по z_0, найденному из (35), однозначно (с помощью (4)) строится минимальная по Парето (в задаче (11)) неопределенность $Z_p \div z_p[t]$, где $z_p[t]$ – решение системы $\dot{z} = Bz + b(t)$, $z(t_0) = z_p$.

Итак, согласно (35) задача сводится к нахождению

$$\min_{z_0\in\mathbb{R}^k}\Psi(z)=\Psi(z_p),$$

здесь

$$\Psi(z)=z'\chi(t_0)z+2m'(t_0,x_0)z,$$
$$m(t_0,x_0)=\Xi(t_0)x_0+\eta(t_0).$$

Утверждение 5. Пусть удалось найти $\beta_i=\mathrm{const}\in(0,1)$ $(i\in\mathbf{N})$ *такие, что* $\chi(t_0)>0$. *Тогда*

$$z_p=-\chi^{-1}(t_0)m(t_0,x_0). \tag{36}$$

Перейдем к построению векторной гарантии $J^p[t_0,x_0]=J(U^*,Z_p,t_0,x_0)$, $\Phi^p[t_0,x_0]=\Phi(U^*,Z_p,t_0,x_0)$, компоненты которых с учетом (36), (33) и (24) примут вид

$$J_i(U^*,Z_p,t_0,x_0)=x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0-2m'(t_0,x_0)\chi^{-1}(t_0)\overline{\Xi}_i(t_0)x_0+$$
$$+m(t_0,x_0)'\chi^{-1}(t_0)\overline{\chi}_i(t_0)\chi^{-1}(t_0)m(t_0,x_0)+2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0-$$
$$-2(\overline{\eta}_i(t_0))'\chi^{-1}(t_0)m(t_0,x_0)+\overline{\omega}_i(t_0),$$
$$\Phi_i(U^*,Z_p,t_0,x_0)=\max_U J_i(U,Z_p,t_0,x_0)-J_i(U^*,Z_p,t_0,x_0)=$$
$$=V_i(t_0,x_0,z_p)-\overline{V}_i(t_0,x_0,z_p)=$$
$$=x_0'[\Theta_i(t_0)-\overline{\Theta}_i(t_0)]x_0-2m'(t_0,x_0)\chi^{-1}(t_0)[\Xi_i(t)-\overline{\Xi}_i(t_0)]x_0+$$
$$+m(t_0,x_0)'\chi^{-1}(t_0)[\chi_i(t_0)-\overline{\chi}_i(t_0)]\chi^{-1}(t_0)m(t_0,x_0)+2[\xi_i(t_0)-\overline{\xi}_i(t_0)]'x_0-$$
$$-2[\eta_i(t_0)-\overline{\eta}_i(t_0)]'\chi^{-1}(t_0)m(t_0,x_0)+\omega_i(t_0)-\overline{\omega}_i(t_0)$$

при любых $(t_0,x_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^m$; здесь $\overline{\Theta}_i(t)$, $\overline{\Xi}_i(t)$, $\overline{\chi}_i(t)$, $\overline{\xi}_i(t)$, $\overline{\eta}_i(t)$, $\overline{\omega}_i(t)$ – решение системы (32), а $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$, $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$, $\omega_i(t)$ – решение системы (25), $i\in\mathbf{N}$.

7. Основные результаты

Сформулируем итоговое утверждение.

Утверждение 6. Пусть для динамической n*-критериальной задачи* (1)–(5)

1) $D_i<0$, $C_i\leqslant 0$, $G_i-M_i'D_i^{-1}M_i\leqslant 0$ $(i\in\mathbf{N})$,

2) *существуют постоянные* $\alpha_i>0$ $(i\in\mathbf{N})$, *такие что* $G_\alpha-M_\alpha'D_\alpha^{-1}M_\alpha\leqslant 0$,

3) *существуют постоянные* $\beta_i\in(0,1)$, $i\in\mathbf{N}$, *такие что* $\chi(t)>0$, $t\in[0,\vartheta]$.

Тогда при любом выборе начальной позиции $(t_0,x_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^m$ *в задаче* (1)–(5) *существует гарантированное по исходам и рискам решение* $(U^*,\ J(U^*,Z_p,t_0,x_0),$ $\Phi(U^*,Z_p,t_0,x_0))$.

Кроме существования указанные утверждения позволяют предложить следующий конструктивный *способ* построения такого гарантированного решения:

а) проверить выполнение требования (1) и (2) утверждения 6;

б) найти решение $(\Theta_i(t),\Xi_i(t),\chi_i(t),\xi_i(t),\eta_i(t),\omega_i(t)\mid 0\leqslant t\leqslant\vartheta)$, $i\in\mathbf{N}$, системы (25);

в) используя б), определить

$$\max_U J_i(U,Z,t_0,x_0)=$$
$$=x_0'\Theta_i(t_0)x_0+2(\xi_i(t_0))'x_0+\omega_i(t_0)+z_0'\chi_i(t_0)z_0+2z_0'\Xi_i(t_0)x_0+2(\eta_i(t_0))'z_0\ (i\in\mathbf{N});$$

г) построить по формулам (26) матрицы $C_\alpha, D_\alpha, K_\alpha, M_\alpha, L_\alpha, N_\alpha, G_\alpha$, векторы c_α, d_α, l_α, g_α, проверить выполнение требования (2) утверждения 6;

д) найти решение $(\Theta_\alpha(t), \Xi_\alpha(t), \xi_\alpha(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ системы (27);

е) используя д), построить контрстратегию

$$U^* \div -D_\alpha^{-1}\left[(\Xi'_\alpha(t) + K_\alpha)z + (\Theta_\alpha(t) + M_\alpha)x + (\xi_\alpha(t) + d_\alpha)\right];$$

ж) найти решение $(\overline{\Theta}_i(t), \overline{\Xi}_i(t), \overline{\chi}_i(t), \overline{\xi}_i(t), \overline{\eta}_i(t), \overline{\omega}_i(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, $i \in N$, системы, (32);

з) с помощью ж) определить

$$J_i(U^*, Z, t_0, x_0) =$$
$$= x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 + \overline{\omega}_i(t_0) + z_0'\overline{\chi}_i(t_0)z_0 + 2z_0'\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 + 2(\overline{\eta}_i(t_0))'z_0 \ (i \in \mathbf{N});$$

и) с помощью б) и ж) построить

$$\chi(t) = \sum_{i\in\mathbf{N}}\left[\overline{\chi}_i(t) - \beta_i\chi_i(t)\right], \Xi(t) = \sum_{i\in\mathbf{N}}\left[\overline{\Xi}_i(t) - \beta_i\Xi_i(t)\right],$$
$$\eta(t) = \sum_{i\in\mathbf{N}}\left[\overline{\eta}_i(t) - \beta_i\eta_i(t)\right], m(t,x) = \Xi(t)x + \eta(t);$$

к) выбрать числа $\beta_i \in (0,1)$, $i \in \mathbf{N}$, такие, что $k \times k$-матрица

$$\chi(t_0) > 0;$$

л) построить гарантированный векторный исход

$$J^p[t_0, x_0] = (J_1(U^*, Z_p, t_0, x_0), \ldots, J_n(U^*, Z_p, t_0, x_0)),$$

где

$$J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 - 2m'(t_0)\chi^{-1}(t_0)\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 +$$
$$+ m(t_0, x_0)'\chi^{-1}(t_0)\overline{\chi}_i(t_0)\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 -$$
$$- 2(\overline{\eta}_i(t_0))'\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + \overline{\omega}_i(t_0),$$

и гарантированный векторный риск

$$\Phi^p[t_0, x_0] = (\Phi_1(U^*, Z_p, t_0, x_0), \ldots, \Phi_n(U^*, Z_p, t_0, x_0)),$$

где

$$\Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0) =$$
$$= x_0'[\Theta_i(t_0) - \overline{\Theta}_i(t_0)]x_0 - 2m'(t_0)\chi^{-1}(t_0)[\Xi_i(t) - \overline{\Xi}_i(t_0)]x_0 +$$
$$+ m(t_0, x_0)'\chi^{-1}(t_0)[\chi_i(t_0) - \overline{\chi}_i(t_0)]\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + 2[\xi_i(t_0) - \overline{\xi}_i(t_0)]'x_0 -$$
$$- 2[\eta_i(t_0) - \overline{\eta}_i(t_0)]'\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + \omega_i(t_0) - \overline{\omega}_i(t_0).$$

Найденная в результате тройка $(U^*, J^p[t_0, x_0], \Phi^p[t_0, x_0])$ и образует гарантированное по исходам и рискам решение многокритериальной динамической задачи (1)–(5) с начальной позицией (t_0, x_0).

Автор благодарит профессора В.И. Жуковского за постановку задачи и обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Интелекти, 2004.
2. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 2002.
3. *Savage L.Y.* The theory of statistical decision // J. Amer. Statist. Associat. 1951. № 46. P. 55–67.
4. *Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E.* The Vector-Valued Maximin. N.Y.: Academ. Press, 1994.
5. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
6. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
7. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1961.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 24.12.2007