Х. Абдуваитов, К вопросу об устойчивости градиентных систем,
Автомат. и телемех., 1987, выпуск 6, 3–6

УДК 517.977

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАДИЕНТНЫХ СИСТЕМ

АБДУВАИТОВ Х.

(Душанбе)

Устанавливается, что асимптотически устойчивые градиентные системы с непрерывно дифференцируемыми потенциалами можно соединить невырожденной деформацией.

1. Введение

Анализ сходимости ряда непрерывных алгоритмов отыскания корней конечных систем алгебраических уравнений, оптимальных и седловых точек функционалов качества различных систем и др. сводится к анализу устойчивости состояний равновесия градиентных систем (см. [1–3]).

В работе [3] предложен следующий общий прием анализа устойчивости состояния равновесия x_0 градиентной системы S_0, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{x}=-\nabla f_0(x). \tag{1}$$

Опишем его схему.

Семейство градиентных систем S_λ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$, описываемых уравнениями

$$\dot{x}=-\nabla_x f(x,\lambda),$$

называется невырожденной деформацией системы S_0 в систему S_1, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}=-\nabla f_1(x), \tag{2}$$

если вектор-функция $\nabla_x f(x;\lambda)$ непрерывна по совокупности переменных (x,λ), $f(x;\lambda)=f_0(x)$, $f(x;1)=f_1(x)$ и при каждом λ точка x_0 является изолированным состоянием равновесия системы S_λ.

Н. А. Бобылеву принадлежит следующее утверждение.

Теорема 1 [3]. Пусть существует невырожденная деформация S_λ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ градиентной системы S_0 в градиентную систему S_1.

Тогда состояние равновесия x_0 системы S_0 асимптотически устойчиво в том и только том случае, если x_0 — асимптотически устойчивое состояние равновесия градиентной системы S_1.

Таким образом, для анализа устойчивости градиентной системы S_0 достаточно построить невырожденную деформацию этой системы в более простую систему S_1, которую удается исследовать на устойчивость.

Возникает естественный вопрос об обращении теоремы Н. А. Бобылева, т. е. о выяснении условий, при выполнении которых две асимптотически устойчивые градиентные системы можно соединить невырожденной деформацией. Отметим, что в случае, когда правые части уравнений (1) и (2) являются полиномами от $x_1,\ldots,x_n$, то невырожденная деформация, соединяющая две асимптотически устойчивые системы, всегда существует.

В этом случае семейство потенциалов градиентных систем, осуществляющих невырожденную деформацию, можно определить равенством $f(x; \lambda) = \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_0(x)$ (доказательство этого утверждения см., например, в монографии Дж. Милнора [4]). Невырожденная деформация существует и в случае, когда правые части систем (1) и (2) аналитичны. Доказательство этого утверждения опирается на лемму о выборе кривых (см., например, [4]) и неравенство Лоясевича [5].

В ряде важных случаев потенциалы изучаемых градиентных систем являются не аналитическими, а лишь непрерывно дифференцируемыми функциями.

Настоящая работа посвящена выяснению условий, обеспечивающих наличие невырожденной деформации, соединяющей две асимптотически устойчивые градиентные системы с непрерывно дифференцируемыми потенциалами.

2. Основной результат

Пусть T — единичный шар $|x| \leqslant 1$ в евклидовом пространстве R^n. Рассмотрим градиентные системы S_0 и S_1, потенциалы $f_0(x)$ и $f_1(x)$ которых определены и непрерывно дифференцируемы на T. Динамика систем S_0 и S_1 описывается соответственно уравнениями (1) и (2). Будем предполагать, что начало координат θ является единственным в T состоянием равновесия каждой системы S_0, S_1.

Теорема 2. Пусть $n \neq 3, 4, 5$ и θ — асимптотически устойчивое состояние равновесия систем S_0 и S_1. Тогда существует невырожденная деформация, соединяющая системы S_0, S_1.

Доказательство этой теоремы вынесено в приложение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Не ограничивая общности, можно считать функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ бесконечно дифференцируемыми, причем $f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $f_1(\theta) = 0$. Очевидно, $x = \theta$ является точкой локального минимума функции $f_1(x)$.

Пусть число $0 < r < 1$ такое, что $f_1(x) > 0$ при $0 < |x| \leqslant r$, а число $c > 0$ выбрано так, что $c < \min\{f_1(x) : |x| = r\}$. Тогда $V_c = \{x : |x| < r,\ f_1(x) = c\}$ является гладким односвязным многообразием. Пусть S_c — сфера радиуса $\sqrt{1+c}$. Гладким односвязным многообразием с краем V_c и S_c является также множество $W_c = \{x : |x| \leqslant \sqrt{1+c}\} \setminus \{x : |x| < r,\ f_1(x) < c\}$. Рассмотрим триаду гладких многообразий $(W_c;\ V_c,\ S_c)$.

Определение 1 [6]. Функцией Морса триады гладких многообразий $(W_c;\ V_c,\ S_c)$ называется всякая гладкая функция $h : W_c \to [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

1) $h^{-1}(0) = V_c$, $h^{-1}(1) = S_c$;

2) все критические точки h являются внутренними (т. е. лежат в $W_c \setminus dW_c$) и не вырождены.

Определение 2 [6]. Числом Морса μ триады $(W_c;\ V_c,\ S_c)$ называется минимум числа критических точек, взятый по всем функциям Морса h.

Ниже, при доказательстве леммы, используется теорема об h-кобордизме. Напомним ее. Через $H_*(W_c, S_c)$ обозначим относительные гомологические группы пространства $W_c \bmod S_c$ (см. [6]).

Теорема 3 [7]. Пусть триада $(W_c;\ V_c,\ S_c)$ удовлетворяет условиям: W_c, V_c, S_c односвязны; $H_*(W_c, S_c) = 0$; $\dim W_c = n \geqslant 6$. Тогда W_c диффеоморфно $S_c \times [0, 1]$.

Теперь сформулируем и докажем лемму, на которой основано доказательство теоремы 2.

Лемма. Пусть $n \neq 3, 4, 5$. Тогда число Морса μ триады $(W_c;\ V_c,\ S_c)$ равно нулю.

Доказательство леммы. В силу теоремы 3 для доказательства леммы достаточно проверить, что $H_*(W_c, S_c) = 0$. Последнее следует, если S_c является деформационным ретрактом W_c, т. е. если существует гомотопия θ_t: $W_c \to W_c$ с $\theta_0 = I$, $\theta_1(W_c) \subset S_c$ и $\theta_1 | S_c = I$.

Пусть $c<c_1<\min\{f_1(x):|x|=r\}$ и $r_1<r$, такое, что $f_1(x)<c_1$ при $|x|=r_1$. Число c можно считать выбранным так, что $c<\min\{f_1(x):|x|=r_1\}$. Пусть $W_0=\{x:|x|<r,\ c\leqslant f_1(x)\leqslant c_1\}$, $W_1=W_c\setminus W_0$, $V_1=\{x:|x|<r,\ f_1(x)=c_1\}$.

Пусть $s(x)$ — время, в течение которого решение $z(t;\ x)$ системы $\dot z=\nabla f_1(x)$, выпущенное из точки $x\in W_0$, достигает поверхности V_1. Определим отображение $\theta(x,\lambda):W_c\times[0,1]\to W_c$. Пусть при $0\leqslant\lambda<1/2$

$$\theta(x,\lambda)=\begin{cases} z(2\lambda s(x);x), & x\in W_0,\\ x, & x\in W_1,\end{cases}$$

а при $1/2\leqslant\lambda\leqslant 1$

$$\theta(x,\lambda)=\begin{cases} z(s(x);x)\,[2(1-\lambda)+(2\lambda-1)\sqrt{1+c}/|z(s(x);x)|\,], & x\in W_0,\\ 2(1-\lambda)x+(2\lambda-1)\sqrt{1+c}\,x/|x|, & x\in W_1.\end{cases}$$

Очевидно, $\theta(x,0)=I$, $\theta(x,1)\subset S_c$ и $\theta(x,1)=I$ при $x\in S_c$. Следовательно S_c — деформационный ретракт W_c. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. По лемме существует функция $g:W_c\to[0,1]$, такая, что $g^{-1}(0)=V_c$, $g^{-1}(1)=S_c$ и $\nabla g(x)\neq\theta$ при $x\in W_c$. Рассмотрим функцию

$$h(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{при}\quad |x|<r,\quad f_1(x)<c,\\ g(x)+c & \text{при}\quad x\in W_c,\\ f_0(x) & \text{при}\quad |x|>\sqrt{1+c}.\end{cases}$$

Вектор-функция $\nabla h(x)$ определена и непрерывна на $R^n\setminus(V_c\cup S_c)$. А на множествах V_c и S_c определим ее равенством $\nabla h(x)=\nabla g(x)$. Очевидно, $\nabla h(x)$ отлична от нуля при $x\neq\theta$ и непрерывна всюду на R^n, кроме, быть может, точек множества V_c, S_c. Однако если следить за направлением вектора $\nabla h(x)$, то оно непрерывно всюду на R^n. Поэтому существует гладкая на R^n вектор-функция $F(x)$, такая, что

(П.1) $\qquad (\nabla h(x),F(x))>0,\quad x\neq\theta,$

причем функцию $F(x)$ можно считать такой, что при $|x|>2\sqrt{1+c}$ $F(x)=\nabla h(x)/2$, т. е. $F(x)=x$.

Рассмотрим уравнение

(П.2) $\qquad \dot z=F(z),$

и пусть $z(t;\ x)$ — ее решение, удовлетворяющее условию $z(0;\ x)=x$. Пусть $\varepsilon(x)=\min\{h(z(1;\ x))-h(x),\ h(x)-h(z(-1;\ x))\}$ и гладкая функция $h_0(x)$ такая, что справедливо

(П.3) $\qquad |h_0(x)-h(x)|\leqslant\varepsilon(x)/3$

и $h_0(x)=h(x)$ при $|x|>2\sqrt{1+c}$. Рассмотрим функцию

$$h_1(x)=\frac{2}{e^2-1}\int\limits_0^1 h_0(z(s;x))\,ds.$$

В силу выбора $\varepsilon(x)$ и неравенства (П.3) нетрудно видеть, что $h_0(z(1;\ x))-h_0(x)>0$. Поэтому

$$dh_1(z(t;x))/dt=2[h_0(z(t+1;x))-h_0(z(t;x))]/(e^2-1)>0.$$

Следовательно, имеет место

(П.4) $\qquad (\nabla h_1(x),F(x))>0,\quad x\neq\theta.$

Из неравенств (П.1) и (П.4) следует, что векторы $\nabla h_1(x)$ и $\nabla h(x)$ непротивоположно направлены. Поэтому в окрестности нуля системы $\dot x=\nabla f_1(x)$ и $\dot x=\nabla h_1(x)$ можно соединить невырожденной деформацией.

Заметим, что при $|x|>2\sqrt{1+c}$ и $t>0$ решение $z(t;\ x)$ системы (П.2) имеет вид $z(t;\ x)=x\exp t$. Так как при $|x|>2\sqrt{1+c}$ $h_0(x)=h(x)=f_0(x)$, то непосредственной проверкой легко убедиться, что $h_1(x)=f_0(x)$ при $|x|>2\sqrt{1+c}$.

Рассмотрим функцию

$$h(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda^2 h_1(x/\lambda), & 0<\lambda\leqslant 1,\\ f_0(x), & \lambda=0.\end{cases}$$

Легко убедиться, что семейство систем $\dot{x}=\nabla_x h(x,\ \lambda)$ является невырожденной деформацией системы $\dot{x}=\nabla h_1(x)$ в систему $\dot{x}=\nabla f_0(x)$. Теорема доказана.

Идея построения гладкой функции $h_1(x)$, удовлетворяющей неравенству (П.4), по непрерывной функции $h(x)$, возрастающей вдоль фазовых траекторий системы (П.2), указана автору Э. Мухамадиевым.

Автор благодарит М. А. Красносельского, Э. Мухамадиева и Н. А. Бобылева за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыбашов М. В.* Об устойчивости градиентных систем // АиТ. 1974. № 9. С. 12–18.
2. *Рыбашов М. В.* Следящий градиентный алгоритм // АиТ. 1978. № 10. С. 17–23.
3. *Бобылев Н. А.* Об одном приеме исследования устойчивости градиентных систем // АиТ. 1980. № 8. С. 33–35.
4. *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
5. *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций. М.: Мир, 1968.
6. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
7. *Милнор Дж.* Теорема об h-кобордизме. М.: Мир, 1969.

Поступила в редакцию
16.XII.1985

ON STABILITY OF GRADIENT SYSTEMS

ABDUVAITOV Kh.

Asymptotically stable gradient systems whose potentials are continuously differentiated can be related through non-singular deformation.