S. E. Stepanov, Bochner's technique for an m-dimensional compact manifold with an $\mathrm{SL}(m,R)$-structure,
Algebra i Analiz, 1998, Volume 10, Issue 4, 192–209

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 4

ТЕХНИКА БОХНЕРА ДЛЯ m-МЕРНОГО КОМПАКТНОГО МНОГООБРАЗИЯ С $\mathrm{SL}(m, R)$-СТРУКТУРОЙ

© С. Е. Степанов

Целью данной статьи является расширение области применения техники Бохнера (РЖМат 1985, 2А746). Здесь с помощью техники Бохнера изучаются векторные поля и дифференциальные формы на компактном многообразии M с краем ∂M. В отличие от публикаций других авторов многообразие M оснащается только $\mathrm{SL}(m, R)$-структурой, что, кроме очевидных обобщений известных результатов, позволяет находить интересные приложения.

Доказываемые в статье утверждения о киллинговых формах являются новыми и для римановой геометрии; теоремы же о специальных конциркулярных и соленоидальных векторных полях обобщают известные утверждения о специальных конциркулярных, гармонических и киллинговых векторных полях на римановых многообразиях.

§1. Введение

1.1. Техника Бохнера — один из основных аналитических методов глобальной дифференциальной геометрии. Введенный пятьдесят лет назад С. Бохнером (см. [1]) он является общим для доказательства так называемых теорем об обращении в нуль (vanishing theorems), в которых констатируется обращение в нуль тех или иных топологических или геометрических инвариантов (таких, как числа Бетти и размерность векторного пространства Киллинга) замкнутого (т. е. компактного без края) риманова многообразия при определенных ограничениях на его кривизну.

В каждом из двух опубликованных обзоров работ, выполненных с использованием техники Бохнера (см. [2] и [3]), список цитированной литературы превышает 70 наименований, включая монографии. Анализ этих работ

Ключевые слова: техника Бохнера, компактное многообразие, $\mathrm{SL}(m, R)$-структура.

позволяет выделить следующую особенность в изложении результатов: техника Бохнера всегда применяется для исследования объектов на римановых многообразиях.

1.2. Целью данной статьи, как и других работ автора (см., например, [4–6]), является расширение области применения техники Бохнера. В частности, с помощью техники Бохнера изучаются векторные поля и дифференциальные $(m-1)$-формы на компактном m-мерном многообразии с краем. В отличие от публикаций других авторов мы находимся в более общей ситуации, оснащая многообразие только $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$-структурой. Кроме очевидных обобщений известных результатов, это позволяет находить интересные приложения (см., например, [7]).

Доказываемые в статье утверждения о киллинговых $(m-1)$-формах являются новыми и для римановой геометрии, теоремы же о соленоидальных векторных полях обобщают известные утверждения о гармонических и киллинговых векторных полях на римановых многообразиях (см. [1, 2] и [3]).

Публикуемые результаты были анонсированы на Международной геометрической школе-семинаре памяти Н. В. Ефимова (см. [8]).

§2. Определения и предварительные результаты

2.1. Пусть M — связное дифференцируемое многообразие размерности m, а $\mathrm{L}(M)$ — его расслоение линейных реперов со структурной группой $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$. Зададим $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$-структуру на M, как главное $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$-подрасслоение расслоения $\mathrm{L}(M)$. Хорошо известно, что $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$-структура есть не что иное, как элемент объема на M, т. е. m-форма η, всюду отличная от нуля (см. [9, с. 13]).

Известна проблема (см. [10, с. 213]) сопоставления с каждой G-структурой на многообразии M однозначно определенной сводимой к G линейной связности ∇. Так, в случае псевдориманова многообразия (M,g) произвольного индекса k, на расслоении $\mathrm{L}(M)$ существует единственная линейная связность ∇ с нулевым кручением, сводимая к $\mathrm{O}(m,k)$. Такая связность называется связностью Леви–Чевита и характеризуется условием $\nabla g = 0$, где g — фундаментальная форма, соответствующая $\mathrm{O}(m,k)$-структуре.

Линейная связность ∇ без кручения, сводимая к $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$, называется *эквиаффинной* (см., например [11, с. 150]) и характеризуется условием $\nabla\eta = 0$. При этом пара (η,∇) называется *эквиаффинной структурой* на M, а геометрия многообразия M с эквиаффинной структурой (η, ∇) носит название *аффинной дифференциальной геометрии* (см. [12]).

Тензор кривизны R эквиаффинной связности ∇ допускает в каждой точке $x \in M$ инвариантное относительно действия группы $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$ разложение

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{m-1}\{\mathrm{Ric}(Z,Y)X - \mathrm{Ric}(Z,X)Y\} + W(X,Y)Z$$

для любых $X, Y, Z \in T_xM$ (см. [4]). Здесь через Ric обозначен *тензор Риччи*, который представляет собою (см. [11, с. 151]) ковариантное симметрическое тензорное поле степени 2, определяемое так: $\mathrm{Ric}(X,Y)$ равняется следу отображения $Z \mapsto R(Z,X)Y$ для T_xM, где X, Y, $Z \in T_xM$. В свою очередь тензорное поле W типа $(3,1)$ является *тензором проективной кривизны Вейля* (см. [13, с. 165]). В соответствии с данным разложением выделяются два класса эквиаффинных структур: *Риччи-плоские*, для которых $\mathrm{Ric} \equiv 0$, и *эквипроективные*, для которых $W \equiv 0$ (см. [11, с. 169]).

2.2. Автодиффеоморфизм многообразия M является автоморфизмом $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$-структуры тогда и только тогда, когда он сохраняет элемент объема η. Пусть X — векторное поле на M. Функция $\operatorname{div} X$, определяемая равенством

$$(\operatorname{div} X)\eta = \mathcal{L}_X \eta$$

(см. [14, с. 259]), где $\mathcal{L}_X$ — дифференцирование Ли в направлении X, называется *дивергенцией* поля X относительно m — формы η. Очевидно, что X является инфинитезимальным автоморфизмом $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$-структуры тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} X = 0$. Такое векторное поле X называется *соленоидальным*.

Определим для векторного поля X тензорное поле $A_X = \mathcal{L}_X - \nabla_X$, как поле эндоморфизмов касательного расслоения TM (см. [14, с. 221]). Непосредственно проверяется, что $\operatorname{trace} A_X = -\operatorname{div} X$ (см., например, [12, с. 260]).

В каждой точке $x \in M$ справедливо инвариантное относительно действия группы $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$ разложение (ср. [4])

$$A_X = \left(-\frac{1}{m}\operatorname{div} X\right)\mathrm{id} + \overset{o}{A}_X,$$

в соответствии с которым выделяются два класса векторных полей на M:

соленоидальные векторные поля, образующие подалгебру $\mathbb{R}$-алгебры Ли векторных полей на M (см. [4]), и *специальные конциркулярные векторные поля*, для каждого из которых, согласно определению (см., например, [15, с. 322]), имеем

$$A_X = \left(-\frac{1}{m}\operatorname{div} X\right)\operatorname{id}. \tag{2.1}$$

Непосредственно проверяется, что специальные конциркулярные векторные поля на многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) образуют $\mathbb{R}$-модуль $\mathrm{S}(M, \mathbb{R})$. При этом справедлива следующая теорема (см. [4]).

Теорема 1. *Эквиаффинная структура (η, ∇) на m-мерном многообразии M является эквипроективной тогда и только тогда, когда на M существуют m линейно независимых специальных конциркулярных векторных полей.*

Сформулированное утверждение обобщает факт, хорошо известный для риманова многообразия постоянной секционной кривизны (см. [16]).

В заключение этого пункта введем одно полезное для будущего понятие. А именно назовем *главными кривизнами* векторного поля X в точке $x \in M$ корни $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ характеристического многочлена $C[\lambda(x)] = \operatorname{Det}[\lambda \operatorname{id} - A_x](x)$, в случае специального конциркулярного векторного поля X справедливо равенство $\lambda_1(x) = \cdots = \lambda_m(x) = -\frac{1}{m}\operatorname{trace} A_X$, а для соленоидального векторного поля X — равенство $\lambda_1(x) + \cdots + \lambda_m(x) = 0$. В частности, если X — киллингово (соответственно гармоническое) векторное поле (см. [1, с. 34–36]) на римановом многообразии M со связностью Леви-Чивита ∇, то порождаемое им тензорное поле A_X является кососимметрическим (соответственно симметрическим бесследовым), а потому в каждой точке $x \in M$ поле X имеет только мнимые (соответственно только вещественные) главные кривизны. При этом в обоих случаях векторное поле X будет соленоидальным.

Замечание (см. [18]). Пусть Y — векторное поле на M, определяющее в каждой точке $x \in M$ *направление кривизны поля* X, т. е. $A_X Y_x = \lambda(x) Y_x$. Обозначим через $\gamma(x)$ интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку $x \in M$. Рассмотрим касательное пространство $T_x M$ как аффинное касательное пространство $A_x M$ и обозначим через $\Gamma(x)$ развертку $\gamma(x)$ на $A_x M$ (подробнее см. об этом [14, с. 123–130]). Тогда прямые, определяемые векторным полем

X и проходящие через точки $\Gamma(x)$, будут образовывать развертывающуюся поверхность. В частности, для специального конциркулярного векторного поля последнее будет выполняться для произвольной кривой многообразия M.

2.3. Рассмотрим на многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) произвольную геодезическую $\gamma : J \subset \mathbb{R} \to M$, отнесенную к аффинному параметру t. В этом случае $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ для касательного векторного поля $\frac{d\gamma}{dt}$ геодезической γ.

Дифференциальную p-форму ω на многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) назовем *киллинговой*, если $(p-1)$-форма $i_{\frac{d\gamma}{dt}}\omega = \operatorname{trace}\left(\frac{d\gamma}{dt} \otimes \omega\right)$ будет ковариантно постоянной вдоль геодезической γ (ср. [1, с. 55–56]). Это означает, что $(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\omega)\left(\frac{d\gamma}{dt}, X_2, \ldots, X_p\right) = 0$ для любых полей $X_2, \ldots, X_p \in C^\infty TM$. В силу произвольности выбора геодезической γ последнее возможно тогда и только тогда, когда $\nabla\omega \in C^\infty \Lambda^{p+1} M$, что равносильно выполнимости уравнения $d\omega = (p+1)\nabla\omega$. Очевидно, что множество киллинговых p-форм образует $\mathbb{R}$-модуль $\mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$.

Теорема 2. *Пусть на m-мерном многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) заданы p линейно независимых специальных конциркулярных векторных полей $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(p)}$, $0 < p < m$. Тогда $(m-p)$-форма ω, дуальная относительно m-формы объема η тензорному полю $\operatorname{alt}[\xi_{(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{(p)}]$, будет киллинговой.*

Доказательство. На многообразии M с $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$-структурой можно задать аффинный аналог риманова оператора Ходжа — изоморфизм $* : \Lambda^p TM \to \Lambda^{m-p} M$ векторного расслоения $\Lambda^p TM$ кососимметрических p-тензоров в расслоение $\Lambda^{m-p} M$ внешних дифференциальных $(0, m-p)$-форм. Так, в частности, в условии теоремы $\omega = *[\operatorname{alt}(\xi_{(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{(p)})]$, т. е.

$$\omega(X_{m-p+1}, \ldots, X_m) = \eta(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(p)}, X_{m-p+1}, \ldots, X_m)$$

для произвольных полей $X_{m-p+1}, \ldots, X_m \in C^\infty TM$. Ковариантно дифференцируя p-форму ω в направлении произвольного векторного поля X, получаем

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X \omega)(X_{m-p+1}, \ldots, X_m) \\
&\quad = \{\lambda_1 \eta(X, \xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(m)}, X_{m-p+1}, \ldots, X_m) + \ldots \\
&\qquad + \lambda_p \eta(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(p-1)}, X, X_{m-p+1}, \ldots, X_m)\}.
\end{aligned}$$

Здесь принято во внимание, что $\nabla_X \xi_{(\alpha)} = \lambda_\alpha X$ для всех $\lambda = 1, \dots, p$. А потому $\nabla \omega \in C^\infty \Lambda^{m-p+1} M$. •

Следствие. *На m-мерном многообразии M с эквипроективной структурой (η, ∇) существуют по меньшей мере $\frac{m!}{p!(m-p)!}$ линейно независимых киллинговых p-форм, т. е.*

$$\dim \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R}) \geqslant \frac{m!}{p!(m-p)!}.$$

Нетрудно проверить, что оператор $*$ устанавливает изоморфизм между пространствами специальных конциркулярных векторных полей и киллинговых $(m-1)$-форм.

Теорема 3. *Для m-мерного многообразия M с эквиаффинной структурой (η, ∇) пространства $\mathrm{S}(M, \mathbb{R})$ и $\mathbf{K}^{m-1}(M, \mathbb{R})$ $*$-изоморфны.*

Доказательство. Согласно определению, ковариантная производная $\nabla \omega$ киллинговой $(m-1)$-формы ω является m-формой. Тогда векторное поле $\xi = *\omega$ будет специальным конциркулярным векторным полем. Действительно, в координатной окрестности U с локальной координатной системой $x^1, \dots, x^m$ зададим m-форму η ее локальными компонентами $\eta_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_m} = \frac{1}{m!} \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^{\ell_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{\ell_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\ell_m}}\right)$, а взаимный ей m-вектор определим известными условиями

$$\eta^{\ell_1 \dots \ell_s k_{s+1} k_m} \eta_{i_1 \dots i_s k_{s+1} \dots k_m} = s!(m-s)! \delta^{\ell_1}_{[i_1} \dots \delta^{\ell_s}_{i_s]}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_k \xi^{i_1} &= \sum_{i_2 < \dots < i_m}^{12\dots m} \nabla_k \omega_{i_2} \dots {}_{i_m} \eta^{i_1 i_2 \dots i_m} = \frac{1}{m} \sum_{i_2 < \dots < i_m}^{12\dots m} (d\omega)_{k i_2 \dots i_m} \eta^{i_1 i_2 \dots i_m} \\ &= \frac{1}{m} [(d\omega)_{12\dots m} \eta^{12\dots m}] \delta^{i_1}_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

и, следовательно, векторное поле $\xi = *\omega$ — специальное конциркулярное. Обратное соответствие справедливо в силу теоремы 2. •

§3. Теоремы бохнеровского типа в глобальной геометрии тензорных расслоений над многообразием с $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$-структурой

3.1. Пусть M — m-мерное компактное многообразие с краем ∂M. Край ∂M представляет собой замкнутое $(m-1)$-мерное подмногообразие в M, касательное пространство $T_x \partial M$ которого в каждой точке $x \in \partial M$ является подпространством в $T_x M$ (см. [16, с. 252]).

Зададим вдоль ∂M векторное поле $\mathcal{N}$ как сечение касательного расслоения TM такое, что в каждой точке $x \in \partial M$ вектор $\mathcal{N}_x$ трансверсален, $T_x \partial M$. В этом случае над ∂M касательное расслоение TM разлагается в прямую сумму $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ *вертикального* $\mathcal{V}$ *и горизонтального* $\mathcal{H}$ подрасслоений таких, что $\mathcal{H}_x = T_x \partial M$ и $\mathcal{V}_x = \operatorname{span}\{\mathcal{N}_x\}$, $x \in \partial M$.

Пусть на многообразии M задана линейная связность ∇ без кручения. Тогда для произвольных векторных полей X' и Y', касательных к ∂M, их ковариантная производная разлагается в прямую сумму

$$\nabla_{X'} Y' = \operatorname{Pr}_{\mathcal{H}} \nabla_{X'} Y' \oplus \operatorname{Pr}_{\mathcal{V}} \nabla_{X'} Y'.$$

Примем следующие обозначения: $\operatorname{Pr}_{\mathcal{H}} \nabla_{X'} Y' = \nabla'_{X'} Y'$ и $\operatorname{Pr}_{\mathcal{V}} \nabla_{X'} Y' = Q(X', Y')\mathcal{N}$. Тогда отображение $(X', Y') \mapsto \nabla'_{X'} Y'$ определит (см. [11] и [19, с. 221–222]) на ∂M линейную связность ∇' без кручения, а отображение $(X', Y') \mapsto Q(X', Y')\mathcal{N}$ определяет в каждой точке $x \in \partial M$ билинейную симметрическую форму $Q_X : \mathcal{H}_X \times \mathcal{H}_X \to \mathbb{R}$, которую в соответствии с общей теорией (см. [11] и [21, с. 21]) мы называем *второй фундаментальной формой для* ∂M *в точке* x.

Заметим, что связность ∇' и форма Q зависят от выбора поля $\mathcal{N}$. Например, заменяя его другим векторным полем $\overset{*}{\mathcal{N}} = Z + f\mathcal{N}$, оснащающим край ∂M многообразия M, для любой отличной от нуля $f \in C^\infty \partial M$ и произвольных X', Y', $Z' \in C^\infty T \partial M$ получим $Q = f\overset{*}{Q}$ и $\nabla'_{X'} Y' = \overset{*}{\nabla}'_{X'} Y' + \overset{*}{Q}(X', Y')Z'$. При этом если край ∂M многообразия M *невырожден* относительно $\mathcal{N}$, т. е. $\det \|Q\| \neq 0$, то он невырожден и относительно поля $\overset{*}{\mathcal{N}}$.

Если Q_x тождественно равна нулю в каждой точке $x \in \partial M$, то $\operatorname{Pr}_{\mathcal{V}} \nabla_{X'} Y' = 0$ для векторных полей X' и Y' на ∂M и, следовательно, ∂M является *вполне геодезическим подмногообразием в* M (см. [21, с. 57–59]). Это свойство, как видно из предыдущего, не зависит от выбора поля $\mathcal{N}$.

Замечание. Наличие $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$ — структуры на многообразии M влечет задание на ∂M индуцированной $\mathrm{SL}(m-1,\mathbb{R})$-структуры. Действительно, задание $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$-структуры на компактном m-мерном многообразии M приводит (см. [19, с. 196; 20, с. 93–96]) к его ориентации. Обозначим, как и раньше, элемент объема многообразия M через η. Тогда задание трансверсального к ∂M поля $\mathcal{N}$ направленных наружу векторов определяет ориентацию края ∂M и позволяет определить его η' — элемент объема следующими очевидными равенствами:

$$\eta'(e_2,\ldots,e_m)=\eta(\mathcal{N}_x,e_2,\ldots,e_m) \tag{$*$}$$

для ориентированных адаптированных реперов $\{\mathcal{N}_x,e_2,\ldots,e_m\}$ таких, что $T_x\,\partial M=\mathrm{span}\{e_2,\ldots,e_m\}$ во всех точках $x\in\partial M$. Условимся в дальнейшем выбирать вдоль края ∂M ориентированные адаптированные реперы только описанного выше вида, а элемент объема η' края ∂M задавать равенствами $(*)$.

Теорема 4. *Пусть M — компактное m-мерное многообразие с краем ∂M и эквиаффинной структурой (η,∇), а $\xi\in C^\infty TM$ — векторное поле, касающееся края ∂M. Тогда имеет место интегральное уравнение*

$$\int\limits_M[\mathrm{Ric}(\xi,\xi)+\mathrm{trace}(A\xi^2)-(\mathrm{trace}\,A\xi)^2]\eta=\int\limits_{\partial M}Q(\xi,\xi)\eta', \tag{3.1}$$

где $A_\xi=\mathcal{L}_\xi-\nabla_\xi$ и Q — вторая фундаментальная форма края ∂M.

Доказательство. Для любой $(m-1)$-формы на M имеет место (см., например, [20, с. 103]) теорема Стокса

$$\int\limits_M d\omega=\int\limits_{\partial M}\omega. \quad \bullet$$

При $\omega=i_X\eta$ для некоторого $X\in TM$ придадим ей следующий вид:

$$\int\limits_M d(i_X\eta)=\int\limits_{\partial M}i_X\eta.$$

Согласно известной формуле для p-формы Θ (см., например, [14, с. 43]),

$$\mathcal{L}_X\Theta = i_X d\Theta + d(i_X\Theta),$$

имеем $d(i_X\eta) = \mathcal{L}_X\eta$. Так как связность ∇ эквиаффинная, то $\mathcal{L}_X\eta = -\operatorname{trace} A_X\eta = (\operatorname{div} X)\eta$. В результате для произвольного $X \in C^\infty TM$ имеем

$$-\int\limits_M (\operatorname{trace} A_X)\eta = \int\limits_{\partial M} i_X\eta. \tag{3.2}$$

Будем полагать в (3.2), что

$$X = (\operatorname{trace} A_\xi)\xi - A_\xi\xi \tag{3.3}$$

для $\xi \in C^\infty TM$ и касающегося границы ∂M. Тогда $i_X\eta = Q\eta'$ или, в более подробной форме,

$$(i_X\eta)_x = \eta(X_x, e_2, \dots, e_m) = Q(\xi,\xi)_x\eta'(e_2, \dots, e_m) \tag{3.4}$$

в каждой точке $x \in \partial M$. С другой стороны, элементарными преобразованиями, так же как и в римановом случае (см. [1, с. 44–45]), получаем

$$\operatorname{trace} A_X = -\operatorname{Ric}(\xi,\xi) - \operatorname{trace}(A\xi^2) + (\operatorname{trace} A\xi)^2. \tag{3.5}$$

В силу равенств (3.4) и (3.5) формула (3.2) принимает требуемый вид (3.1). В частности, если ∂M является вполне геодезическим подмногообразием или $\partial M = \varnothing$, правая часть в интегральной формуле (3.1) равна нулю. •

Теорема 5. *Пусть M — m-мерное компактное многообразие с эквиаффинной структурой (η, ∇), ∂M — его край, ξ — специальное конциркулярное векторное поле, заданное на M и трансверсальное краю ∂M во всех его точках. Тогда*

$$\int\limits_M \left[\operatorname{Ric}(\xi,\xi) - \frac{m-1}{m}(\operatorname{div}\xi)^2\right]\eta = -\frac{m-1}{m}\int\limits_{\partial M} f\cdot(\operatorname{div}\xi)\eta, \tag{3.6}$$

где $\xi = Z' + f\mathcal{N}$ для $Z' \in C^\infty TM$ и не обращающейся в нуль функции $f \in C^\infty \partial M$.

Доказательство. Для специального конциркулярного векторного поля ξ будем иметь

$$X = -\{(\operatorname{div}\xi)\xi + A_\xi\xi\} = -\frac{m-1}{m}(\operatorname{div}\xi)\xi.$$

Поскольку поле ξ трансверсально к ∂M, то $\xi = Z' + f\mathcal{N}$ для некоторого $Z' \in C^\infty T\partial M$ и необращающейся в нуль C^∞-функции $f : \partial M \to \mathbb{R}$. А потому в каждой точке x края ∂M имеем

$$(i_X\eta)_x = \eta(X_x, e_2, \ldots, e_m) = -\frac{m-1}{m}(f(x)(\operatorname{div}\xi)_x\eta'(e_2, \ldots, e_m).$$

Вследствие этого придадим формуле (3.2) следующий вид:

$$\int_M \left[\operatorname{Ric}(\xi,\xi) - \frac{m-1}{m}(\operatorname{div}\xi)^2\right]\eta = -\frac{m-1}{m}\int_{\partial M} f\cdot(\operatorname{div}\xi)\eta'. \quad \bullet$$

3.3. Рассмотрим $(m-1)$-форму ω на m-мерном ориентированном компактном многообразии M, вдоль края ∂M которого задано направленное наружу векторное поле $\mathcal{N}$. Пусть $X_2, \ldots, X_m$ — линейно независимые векторы из T_xM в произвольной точке x края ∂M. Тогда $X_a = e_a + \lambda_a\mathcal{N}$ для $a = 2, \ldots, m$. В результате

$$\omega(X_2, \ldots, X_m) = t\omega + \sum_{a=2}^{m}(-1)^{a+1}\lambda_a\cdot(n\omega)(e_2, \ldots, \widehat{e}_a, \ldots, e_m),$$

где через $t\omega = \omega(e_2, \ldots, e_m)$ обозначена *касательная составляющая* формы ω, а через $(n\omega)(e_2, \ldots, \widehat{e}_a, \ldots, e_m) = \omega(\mathcal{N}, e_2, \ldots, e_{a-1}, e_{a+1}, \ldots, e_m)$ — компонеты ее *нормальной составляющей.*

Назовем форму $\omega \in C^\infty\Lambda^{m-1}M$ *нормальной* (*касательной*) к краю ∂M многообразия M, если $t\omega = 0$ (соответственно $n\omega = 0$) в каждой точке $x \in \partial M$.

Теорема 6. *Пусть M — компактное m-мерное ($m \geqslant 2$) многообразие с эквиаффинной структурой (η, ∇) и ω — киллингова $(m-1)$-форма на M, нормальная к краю ∂M. Если для произвольных $X \in C^\infty TM$ и $X' \in C^\infty T\partial M$*

(1) $\mathrm{Ric}(X, X) \leqslant 0$ *и* $Q(X', X') \geqslant 0$, *то* $\nabla\omega = 0$;

(2) $\mathrm{Ric}(X, X) \leqslant 0$, *за исключением хотя бы одной точки* $x \in M$, *где* $\mathrm{Ric}(X, X) < 0$, *и* $Q(X', X') \geqslant 0$, *то ω может быть только нуль-формой.*

Доказательство. В условиях теоремы векторное поле $\xi = *\omega$ будет касательным к ∂M, поскольку в этом случае $\eta(\xi_x, e_2, \dots, e_m) = 0$ в каждой точке $x \in \partial M$. Если при этом ω — киллингова форма, то в силу теоремы 3 векторное поле $\xi = *\omega$ будет специальным конциркулярным. Интегральное уравнение (3.1) для специального конциркулярного векторного поля ξ примет следующий вид:

$$\int_M \left[\mathrm{Ric}(\xi, \xi) - \frac{m-1}{m}(\mathrm{div}\,\xi)^2\right]\eta = \int_{\partial M} Q(\xi, \xi)\eta'. \tag{3.7}$$

Анализ интегрального уравнения (3.7) позволяет заключить, что при $m \geqslant 2$, $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) \leqslant 0$ и $Q(\xi, \xi) \geqslant 0$ всюду на M и ∂M соответственно из (3.7) автоматически вытекает следующее: $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) = 0$ на M, $Q(\xi, \xi) = 0$ вдоль ∂M и, что самое главное, $\mathrm{div}\,\xi = 0$. Дополнительное же условие, что $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) < 0$ в какой-либо точке $x \in M$ обязательно вступит в противоречие с ранее сформулированным требованием $Q(\xi, \xi) \geqslant 0$ к уравнению (3.7). •

Замечание. В п. (1) доказанной теоремы условие „$\mathrm{Ric}(X, X) \leqslant 0$“ можно заменить более жестким, потребовав, чтобы структура (η, ∇) была Риччи-плоской. В свою очередь в п. (1) и (2) условие „$Q(X', X') \geqslant 0$“ можно снять, если потребовать, чтобы край ∂M являлся вполне геодезическим подмногообразием в M или даже $\partial M = \varnothing$.

Прежде чем рассматривать киллингову форму $\omega \in C^\infty\Lambda^{m-1}M$, касающуюся края многообразия, докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть M — компактное m-мерное ($m \geqslant 2$) многообразие с эквиаффинной структурой (η, ∇) и ξ — специальное конциркулярное векторное поле, трансверсальное к его краю ∂M. Пусть, далее,* $\mathrm{div}\,\xi \leqslant 0$ *во всех тех точках $x \in \partial M$, где ξ_x направлен наружу, и* $\mathrm{div}\,\xi \geqslant 0$, *где ξ_x направлен внутрь. Тогда если для всех $X \in C^\infty TM$*

(1) $\mathrm{Ric}(X, X) \leqslant 0$, *то* $\nabla\xi = 0$;

(2) $\mathrm{Ric}(X,X) \leqslant 0$, *за исключением хотя бы одной точки* $x \in M$, *где* $\mathrm{Ric}(X,X) < 0$, *то* ξ *может быть только нулевым векторным полем.*

Доказательство. В условиях теоремы имеем $\xi_x = Z'_x + f(x)\mathcal{N}_x$ в каждой точке $x \in \partial M$. Если вектор ξ_x направлен наружу в точке $x \in \partial M$, то $f(x) > 0$. Если же ξ_x направлен внутрь, то $f(x) < 0$. Рассмотрим интегральное уравнение (3.6), из которого при $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \leqslant 0$, а также условии, что $\mathrm{div}\,\xi \leqslant 0$ всех точках $x \in \partial M$, где вектор ξ_x направлен наружу, и $\mathrm{div}\,\xi \geqslant 0$, где ξ_x направлен вовнутрь, из (3.6) последует: $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) = 0$ и $\nabla\xi = 0$. Дополнительное требование, что $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) < 0$ хотя бы в одной точке x многообразия M приведет к противоречию с (3.6). •

Пусть форма $\omega \in C^\infty\Lambda^{m-1}M$ касается края ∂M многообразия M, т. е. $\omega = t\omega$ вдоль ∂M. Тогда для векторного поля $\xi = *\omega$ в каждой точке $x \in \partial M$ справедливо равенство $\eta(\xi_x, e_2, \dots, e_m) = \omega(e_2, \dots, e_m)$. Если при этом форма ω не обращается в нуль на ∂M, то во всех точках края векторы поля $\xi = *\omega$ будут ему трансверсальны. Принимая во внимание сказанное из доказанной выше леммы, выводим справедливость следующего утверждения.

Теорема 7. *Пусть* M *— компактное* m*-мерное* ($m \geqslant 2$) *многообразие с эквиаффинной структурой* (η, ∇) *и* ω *— киллингова* $(m-1)$*-форма, заданная на* M *и касающаяся его края* ∂M. *Пусть далее векторное поле* $\xi = *\omega$, *трансверсальное* ∂M, *имеет* $\mathrm{div}\,\xi \leqslant 0$ *во всех точках* $x \in \partial M$, *где* ξ_x *направлен наружу, и* $\mathrm{div}\,\xi \geqslant 0$, *где* ξ_x *направлен вовнутрь. Тогда если для всех* $X \in C^\infty TM$

(1) $\mathrm{Ric}(X,X) \leqslant 0$, *то* $\nabla\xi = 0$;

(2) $\mathrm{Ric}(X,X) \leqslant 0$, *за исключением хотя бы одной точки* $x \in M$, *где* $\mathrm{Ric}(X,X) < 0$, *то* ω *может быть только нуль-формой.*

Замечание. Пусть форма $\omega \in C^\infty\Lambda^{m-1}M$ касается края ∂M многообразия M, тогда, как это доказано, для векторного поля $\xi = *\omega$ в каждой точке $x \in \partial M$ справделиво равенство $\eta(\xi_x, e_2, \dots, e_m) = t\omega$. Одновременно из (2.2) следует, что $\mathrm{div}\,\xi = (d\omega)_{12\dots m}\eta^{12\dots m}$. В результате подыинтегральному выражению в правой части уравнения (3.6) можно придать вид $[(d\omega)_{12\dots m}\eta^{12\dots m}]t\omega$. А потому условия на знакоопределенность $\mathrm{div}\,\xi$ в точках края ∂M можно заменить одним требованием $\int_{\partial M}[(d\omega)_{12\dots m}\eta^{12\dots m}]t\omega \geqslant 0$.

В заключение сформулируем одно теперь уже очевидное следствие.

Следствие. *Пусть M — замкнутое m-мерное ($m \geqslant 2$) многообразие с эквиаффинной структурой (η, ∇). Если для любого $X \in TM$*

(1) $\mathrm{Ric}(X, X) \leqslant 0$, *то на M не найдется киллинговой $(m-1)$-формы, отличной от ковариантно постоянной;*

(2) $\mathrm{Ric}(X, X) \leqslant 0$ *на M и* $\mathrm{Ric}(X, X) < 0$ *хотя бы в одной точке, то* $\dim \mathbf{K}^{m-1}(M, \mathbb{R}) = 0$.

3.4. Рассмотрим $\mathbb{R}$-модуль соленоидальных векторных полей ξ на компактном многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) и докажем справедливость следующих двух утверждений.

Теорема 8. *Пусть M — компактное многообразие с эквиаффинной структурой (η, ∇) и ξ — соленоидальное векторное поле, касающееся его края ∂M. Пусть выполняется одно из двух следующих условий:*

(1) $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) \geqslant 0$ *на M,* $Q(\xi, \xi) \leqslant 0$ *вдоль ∂M и главные кривизны поля ξ в каждой точке многообразия M вещественные;*

(2) $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) \leqslant 0$ *на M,* $Q(\xi, \xi) \geqslant 0$ *вдоль ∂M и главные кривизны поля ξ в каждой точке многообразия M мнимые.*

Тогда $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) = 0$ *на M,* $Q(\xi, \xi) = 0$ *вдоль ∂M и ξ порождает нильпотентное поле эндоморфизмов A_ξ касательного расслоения TM.*

Теорема 9. *На компактном многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) не существует соленоидального векторного поля ξ, касающегося его края ∂M, и такого, что выполняется одно из следующих двух условий:*

(1) *всюду на M главные кривизны поля ξ — вещественные и* $\mathrm{Ric}(X, X) \geqslant 0$, *за исключением хотя бы одной точки, где* $\mathrm{Ric}(X, X) > 0$, *и* $Q(X', X') \leqslant 0$;

(2) *всюду на M главные кривизны поля ξ — мнимые и* $\mathrm{Ric}(X, X) \leqslant 0$, *за исключением хотя бы одной точки, где* $\mathrm{Ric}(X, X) > 0$, *и* $Q(X', X') \geqslant 0$ *для произвольных $X \in C^\infty TM$ и $X' \in C^\infty T\partial M$.*

Доказательство. Как было установлено, для каждого такого соленоидального векторного поля $\operatorname{div} \xi = 0$, а потому интегральное уравнение (3.1) представнет в виде:

$$\int_M [\mathrm{Ric}(\xi, \xi) + \mathrm{trace}(A\xi^2)]\eta = \int_{\partial M} Q(\xi, \xi)\eta'. \tag{3.8}$$

Если принять соглашение о главных кривизнах векторного поля ξ, то уравнение (3.8) можно придать следующий вид:

$$\int\limits_M \Big[\mathrm{Ric}(\xi,\xi) + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i)^2\Big]\eta = \int\limits_{\partial M} Q(\xi,\xi)\eta'. \tag{3.9}$$

Если теперь $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \geqslant 0$ на M, $Q(\xi,\xi) \leqslant 0$ вдоль ∂M, а все λ_i — вещественнозначные функции, то из (3.9) следует, что $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) = 0$, $Q(\xi,\xi) = 0$ на M и ∂M соответственно, а также и все $\lambda_i = 0$ и, следовательно, поле эндоморфизмов $A_\xi = -\nabla\xi$ нильпотентное. При этом дополнительное условие, что $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) > 0$ в какой-либо точке $x \in M$ вступит в противоречие с ранее сформулированным условием к уравнению (3.9), что $Q(\xi,\xi) \leqslant 0$, если только поле ξ не нулевое.

Аналогичные рассуждения можно провести и для соленоидального векторного поля ξ с мнимыми главными кривизнами на M.

Замечание. Условия „$Q(X',X') \leqslant 0$“ или „$Q(X',X') \geqslant 0$“ в обоих утверждениях можно заменить более жестким требованием к краю ∂M — быть вполне геодезическим подмногообразием или, более того, $\partial M = \varnothing$. В свою очередь те условия, что „$\mathrm{Ric}(X,X) \geqslant 0$“ или „$\mathrm{Ric}(X,X) \leqslant 0$“ в первом утверждении, можно заменить одним более жестким требованием к структуре (η,∇) — быть Риччи-плоской.

§4. Приложение к лоренцевой геометрии

4.1. Рассмотрим m-мерное псевдориманово многообразие M с метрикой g индекса k. На многообразии M существует эквиаффинная структура (η,∇) с формой объема $\eta = \sqrt{|\det(g)|}dx^1 \wedge\cdots\wedge dx^m$ относительно локальной системы координат $x^1,\ldots,x^m$ на M и связностью Леви–Чивита ∇ в качестве эквиаффинной связности.

Автодиффеоморфизм псевдориманова многообразия M является автоморфизмом $\mathrm{O}(m,k)$-структуры тогда и только тогда, когда он сохраняет метрику g. Пусть, как и прежде, $\mathcal{L}_\xi$ обозначает дифференцирование Ли в направлении векторного поля ξ на M. Тогда

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) = -[g(A_\xi,X,Y) + g(X,A_\xi Y)]$$

для любых векторых полей X и Y на M. Очевидно, что ξ будет инфинитезимальным автоморфизмом $O(m,k)$-структуры тогда и только тогда, когда (см., например, [13, с. 281])

$$g(A_\xi X, Y) + g(X, A_\xi Y) = 0. \tag{4.1}$$

В этом случае ξ называют *киллинговым* векторным полем на M.

Для времениподобного киллингова векторного поля ξ на лоренцевом многообразии M с метрикой g диагонального вида $(-+\cdots+)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Лоренцево m-мерное многообразие M не допускает времениподобного векторного поля Киллинга ξ, если в M существует ориентируемое m-мерное подмногообразие M' с пространственноподобным ортогональным ξ краем $\partial M'$ такое, что во всех его точках* $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \leqslant 0$, *за исключением хотя бы одной точки, где* $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) < 0$.

Доказательство. Полагаем ξ времениподобным векторным полем на M и $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{\xi\}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ ортогональное дополнительное $\mathcal{V}$ гиперраспределение, тогда $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$. Очевидно, что гиперраспределение $\mathcal{H}$ — пространственноподобное, т. е. сужение g^h метрики g на $\mathcal{H}_x$ для всех $x \in M$ является положительно определенной формой.

Пусть ζ — единичное векторное поле из $\mathcal{V}$. Тогда ковариантным дифференцированием тождества $g(\zeta,\zeta) = -1$ получаем равенство

$$g(A_\zeta X, \zeta) = 0 \tag{4.2}$$

для любого векторного поля X на M и

$$A_\xi = |\xi| A_\xi - \mathrm{grad}\,|\xi| \otimes \zeta. \tag{4.3}$$

На основании (4.1)–(4.3) заключаем, что $g(A_\xi X, hY) = |\xi| g(A_\xi X, hY)$, где h — поле операторов ортогонального проектирования $h_x : T_x M \to \mathcal{H}_x$ для всех $x \in M$, и, следовательно,

$$g(A_\zeta hX, hY) + g(hX, A_\zeta hY) = 0; \quad \mathrm{Tr}\, A_\zeta = 0. \tag{4.4}$$

Предположим, что в M существует m-мерное ориентированное подмногообразие M' с пространственноподобным краем $\partial M'$, который ортогонален в каждой своей точке x вектору ξ_x. Тогда для орта ζ киллингова векторного поля ξ из интегральной формулы

$$\int_{M'} [\mathrm{Ric}(\zeta,\zeta) + \mathrm{trace}(A_\zeta)^2 - (\mathrm{trace}\, A_\zeta)^2]\eta = \int_{\partial M'} \eta((\mathrm{trace}\, A_\zeta)\zeta - A_\zeta\zeta, e_2, \ldots, e_m)) \tag{4.5}$$

на основании сказанного, а также с учетом равенств (4.2) и (4.4) выводим следующее неравенство:

$$\int_{M'} \mathrm{Ric}(\zeta,\zeta)\eta \geqslant 0.$$

Из этого интегрального неравенства с очевидностью вытекает справедливость сформулированной выше теоремы. •

Векторное поле ξ на псевдоримановом многообразии M называется *гармоническим* (см., например, [22]), если поле эндоморфизмов $A_\xi = -\nabla\xi$ удовлетворяет следующим условиям:

$$g(A\xi X, Y) - g(X, A_\xi Y) = 0; \quad \mathrm{trace}\, A_\xi = 0. \tag{4.6}$$

Теорема 11. *Лоренцово m-мерное многообразие M не допускает времениподобного гармонического векторного поля ξ, если в M существует ориентируемое m-мерное подмногообразие M' с пространственноподобным ортогональным ξ краем $\partial M'$ такое, что во всех его точках* $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \geqslant 0$, *за исключением хотя бы одной точки, где* $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) > 0$.

Доказательство. Для орта ζ поля ξ справедливы равенства

$$g(A_\zeta hX, hY) - g(hX, A_\xi hY) = 0; \quad \mathrm{trace}\, A_\xi = 0. \tag{4.7}$$

Предположим, что в M существует m-мерное ориентированное подмногообразие M' с пространственноподобным краем $\partial M'$, который ортогонален в каждой своей точке x вектору ξ_x. Тогда для орта ζ из интегральной формулы (4.5) на основании равенств (4.7) выводим неравенство

$$\int\limits_{M'} \mathrm{Ric}(\zeta, \zeta)\eta \leqslant 0,$$

откуда с очевидностью вытекает утверждение теоремы. •

4.2. Рассмотрим два замкнутых римановых многообразия: одномерное M_1 и $(m-1)$-мерное M_2 с метрическими формами вида: $ds_1^2 = (dx^1)^2$ и $ds_2^2 = g_{ab}(x^2, \ldots, x^m)dx^a \otimes dx^b$ в локальных системах координат x^1 и $x^2, \ldots, x^m$ на M_1 и M_2 соответственно. На топологическом произведении $M = M_1 \times M_2$, которое тоже является замкнутым многообразием, зададим метрическую форму вида $ds^2 = ds_1^2 \oplus f ds_2^2$ для некоторой положительной функции $f : M_1 \to (0, \infty)$. Новое многообразие назовем *искривленным лоренцевым произведением* (ср. [23, с. 22; 57–58]).

Замечание. Метрические формы вида $ds^2 = ds_1^2 \oplus f ds_2^2$ изучаются в общей теории относительности. Частным видом их, когда отсутствует условие замкнутости для M_1, являются метрические формы Робертсона–Уокера модели „большого взрыва“ и статической модели Вселенной Эйнштейна (см. [23, с. 117–122]).

Для некоторой необращающейся в нуль скалярной функции $\lambda : M_1 \to \mathbb{R}$ векторное поле $\xi = \mathrm{grad}\,\lambda$ будет (см. [24, с. 96]) специальным конциркулярным векторным полем, заданным на M глобальным образом. Тогда из леммы предыдущего параграфа выводится

Следствие 2. *На топологическом произведении $M = M_1 \times M_2$ одномерного и $(m-1)$-одномерного замкнутых многообразий не существует метрики искривленного лоренцева произведения такой, что во всех времениподобных направлениях кривизна Риччи многообразия M будет неположительной и хотя бы в одной его точке — строго отрицательной.*

Список литературы

[1] Яно К., Бохнер С., *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.

[2] Wu H., *The Bochner technique*, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations (Beijing, 1980). Vol. 2, Science Press, Beijing, 1982, pp. 929-1071.

[3] Berard Pierre H., *From vanishing theorems to estimating theorems: the Bochner technique revisited*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **19** (1988), 371–406.

[4] Stepanov S. E., Tsyganok I. I., *Vector fields in manifold with equiaffine connection*, Webs and Quasigroups, Tver State Univ. (Russia), Tver, 1993, pp. 70–77.

[5] Степанов С. Е., *$O(n) \times O(m-n)$-структуры на m-мерных многообразиях и субмерсии римановых многообразий*, Алгебра и анализ **7** (1995), № 6, 188–204.

[6] Stepanov S. E., *On the global theory of some classes of mappings*, Ann. Global Anal. Geom. **13** (1995), no. 3, 239–249.

[7] Степанов С. Е., *Техника Бохнера и космологические модели*, Изв. вузов. Физика **36** (1993), № 6, 82–86.

[8] Степанов С. Е., Цыганок И. И., *Оператор Ходжа в аффинной дифференциальной геометрии*, Международная геометрическая школа-семинар памяти Н. В. Ефимова: Тез. докл., Ростов на Дону, 1996, сс. 66-68.

[9] Кобаяси Ш., *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986.

[10] Chern S. S., *The geometry of G-structures*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 167–219.

[11] Норден А. П., *Пространства аффинной связности*, Изд. 2-ое, испр., Наука, М., 1976.

[12] Nomizu K., *What is affine differential geometry?*, Proc. of Conference on Differential Geometry (Münster, 1982), 1982, pp. 42–43.

[13] Эйзенхарт Л. П., *Риманова геометрия*, ИЛ., М., 1948.

[14] Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1, Наука, М., 1981.

[15] Schouten J. A., *Ricci-calculus*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 10, Springer-Verlag, Berlin etc., 1954.

[16] Fulton C. M., *Parallel vector fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 136–137.

[17] Степанов С. Е., Цыганок И. И., *Оператор Ходжа на многообразии с эквиаффинной структурой*, Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 27, Калининград, 1996, сс. 114–117.

[18] Цыганок И. И., *Аффинная геометрия векторных полей*, Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, МГПИ, М., 1990.

[19] Зулапке Р., Винтген П., *Дифференциальная геометрия и расслоения*, Мир, М., 1975.

[20] Нарасимхан Р., *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971.

[21] Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2, Наука, М., 1981.

[22] Захаров В. Д., *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*, Наука, М., 1972.

[23] Бим Дж., Эрлих П., *Глобальная лоренцева геометрия*, Мир, М., 1985.

[24] Синюков Н. С., *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, М., 1979.

Владимирский государственный
педагогический университет
600024, Владимир, пр. Строителей, 11

Поступило 20 ноября 1996 г.