



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Тартаковский, Равномерная оценка количества представлений единицы бинарной формой степени $n \geq 3$, *Докл. АН СССР*, 1970, том 193, номер 4, 764

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

22 марта 2025 г., 03:17:38



В. А. ТАРТАКОВСКИЙ

**РАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ
ЕДИНИЦЫ БИНАРНОЙ ФОРМОЙ СТЕПЕНИ $n \geq 3$**

(Представлено академиком Ю. В. Линником 22 I 1970)

Пусть Z — множество всех целых чисел; $F_n(x, y)$ — бинарная форма n -й степени от x и y над Z ; $\Phi(F_n)$ — количество решений в целых числах x и y неопределенного уравнения:

$$F_n(x, y) \equiv a_0 x^n + \dots + a_k x^{n-k} y^k + \dots + a_n y^n = 1, \quad \text{где } a_0, \dots, a_n \in Z. \quad (1)$$

Для случая неприводимости в Z формы F_n о величине $\Phi(F_n)$ известно следующее. А. Туэ (¹) доказал, что при $n \geq 3$ $\Phi(F_n)$ конечно; используя его метод, можно найти эффективную оценку сверху величины $\Phi(F_n)$ для каждой конкретной формы F_n (см., например, (²), § 60, написанный автором этой статьи). Однако оценка эта является функцией от коэффициентов формы F_n и не порождает единой общей численной верхней границы для всех $\Phi(F_n)$ в совокупности при данном n . Установленная А. Бейкером эффективная оценка координат x и y самих решений не изменила положения в вопросе о числе решений.

Между тем, Б. Н. Делоне (^{2, 4, 5}) доказал, что для всех неприводимых в Z кубических форм F_3 с дискриминантом $\Delta(F_3) < 0$ число решений уравнения (1) имеет общую для всех этих форм конечную верхнюю границу, равную 5. Для кубических форм при $\Delta(F_3) > 0$ К. Л. Зигель (⁶) установил аналогичную оценку, равную 18, для всех таких форм, дискриминант которых превосходит некоторую константу C . Д. К. Фаддеев (см. в (²) написанный им § 70) понизил эту оценку с 18 до 15, а для константы C сообщил приближенное значение, равное 10^{33} . Так как форм F_3 с положительным дискриминантом, меньшим чем C , конечное число, то для них описанным выше способом можно установить общую верхнюю границу для числа решений уравнения (1) при $n = 3$. Поэтому существует конечная общая граница для $\Phi(F_3)$ при всех F_3 , неприводимых в Z , хотя граница эта до сих пор никем не была вычислена. Настоящая работа имеет своей целью установить, что за вычетом тривиальных и очевидных исключений такая общая верхняя граница для $\Phi(F_n)$ существует для всех F_n при фиксированном n , большем чем 3.

Теорема 1. *Количество $\Phi(F_n)$ целочисленных представлений единицы каждой неприводимой в Z бинарной формой $F_n(x, y)$ над Z при фиксированной степени n , большей чем 3, удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(F_n) \leq \varphi(n) = 235 n^6. \quad (2)$$

Из этой основной теоремы легко выводится:

Теорема 2. *Если бинарная форма $F_n(x, y)$ над Z фиксированной степени n при $n \geq 3$ не является степенью линейной или неопределенной квадратичной формы $f(x, y)$ над Z , целочисленно представляющей единицу, то количество $\Phi(F_n)$ целочисленных представлений единицы этой формы F_n ограничено сверху как в теореме 1 (см. (2)).*

Оценка $235 n^6$ для $\varphi(n)$ может быть различными способами существенно уменьшена. Однако заменить $\varphi(n)$ абсолютной константой, не зависящей от n , очевидно, нельзя.

Ленинградский институт точной
механики и оптики

Поступило
16 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Thue, Videnskabs- selskabets skrifter, Math.-naturv., 1, 7, 1 (1908).
² В. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, Тр. Матем. инст. АН СССР, 11 (1940). ³ A. Baker, Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A, 263, 1139, 173 (1968). ⁴ B. Delaunay, C. R., 171, 336 (1920). ⁵ Б. Н. Делоне, Изв. Российск. Ака. наук, 6 сер., 16, 253 (1922). ⁶ C. L. Siegel, Abh. der preuss. Akad. der Wiss., 1 (1929).