Ю. П. Гинзбург, А. А. Тарасенко, О сингулярных частях аналитических сжимающих оператор-функций,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1987, том 157, 30–44

Ю.П.Гинзбург, А.А.Тарасенко

О СИНГУЛЯРНЫХ ЧАСТЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

В статье рассматриваются голоморфные в области $G\subset\mathbb{C}$ функции, значениями которых являются сжатия, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве. Совокупность таких функций обозначим через $\mathcal{L}_G$. Выясняется, что если $T(\cdot)\in\mathcal{L}_G$, оператор $T(z_0)$ для некоторого $z_0\in G$ является слабым сжатием, а его сингулярная часть $T^{(s)}(z_0)$ (C_0- часть во вполне неунитарном случае) полна и приращения $T(z) - T(z_0)$ "не слишком велики" (например, конечномерны), то оператор $T^{(s)}(z_0)$ полон почти при всех $z\in G$ (§ 2, теорема 4). Если же сжатие $T(z_0)$ сверх того вполне неунитарно и удовлетворяет определенным условиям гладкости, то в нетривиальном случае спектр сжатия $T^{(s)}(z)$ является тонким множеством (§ 3, теорема 6).

Доказательство указанных теорем основано на изучении полученной в § I формулы, связывающей характеристические функции сжатий $T(z)$ при различных $z\in G$.

Результаты § 2 обобщают основные результаты статей [I] и [2].

§ I. Аналитические семейства сжатий и их характеристические функции

I. Символами $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ далее обозначаются сепарабельные гильбертовы пространства; $[\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2]$ - совокупность линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$; $[\mathcal{H}]:=[\mathcal{H},\mathcal{H}]$. Если $T\in[\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2]$ - сжатие, то $D_T:=(I-T^*T)^{1/2}$, $\mathfrak{D}_T:=\operatorname{clos} D_T\mathcal{H}_1$ (здесь I - тождественный оператор в $\mathcal{H}_1$; в дальнейшем такие пояснения, как правило, опускаются).

Если $A,B\in[\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2]$ - такие сжатия, что оператор $I-B^*A$ ограниченно обратим, то, как известно, [3], оператор

$$\Phi(A,B):=-B+D_{B^*}A(I-B^*A)^{-1}D_B\equiv$$
$$\equiv -B+D_{B^*}(I-AB^*)^{-1}AD_B \tag{I}$$

является сжатием; при $\|A\|\leqslant 1$, $\|B\|<1$

$$\Phi(A,B)\equiv D_{B^*}^{-1}(A-B)(I-B^*A)^{-1}D_B\equiv$$

$$\equiv \mathfrak{D}_{B^*}(I - AB^*)^{-1}(A-B)\mathfrak{D}_B^{-1}. \tag{2}$$

2. Пусть $T(\cdot) \in \mathcal{L}_G$. Как показал Ю.Л.Шмульян [4], а) линеалы $\mathfrak{D}_{T(z)}\mathcal{H}$ и $\mathfrak{D}_{T(z)^*}\mathcal{H}$ не зависят от z: $\mathfrak{D}_{T(z)} \equiv \mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}_{T(z)^*} \equiv \mathfrak{D}_*$; б) какова бы ни была точка $z_0 \in G$, существует единственная голоморфная на G функция $\Delta(z_0, z)$ со значениями в $[\mathcal{H}]$, удовлетворяющая условиям:

1^0 $\Delta(z_0, z)$ и $\Delta(z_0, z)^*$ $(z \in G)$ аннулирует соответственно $\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}$ и $\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_*$;

2^0 $T(z) = T(z_0) + \mathfrak{D}_{T(z_0)^*}\Delta(z_0, z)\mathfrak{D}_{T(z_0)}$ $(z \in G)$.

Очевидно,

$$\Delta(z_0, z) = \mathfrak{D}_{T(z_0)^*}^{[-1]}(T(z) - T(z_0))\mathfrak{D}_{T(z_0)}^{[-1]}, \tag{3}$$

где символом $H^{[-1]}$ обозначен квазиобратный для самосопряженного оператора H, то есть оператор, аннулирующий $\operatorname{Ker} H$ и равный $(H \mid H\mathcal{H})^{-1}$ на $H\mathcal{H}$.

В [3] доказано, что оператор $I - T^*(z_0)\Delta(z_0, z)$ ограниченно обратим и

$$K(z) := \Delta(z_0, z)(I - T^*(z_0)\Delta(z_0, z))^{-1} \equiv$$

$$\equiv (I - \Delta(z_0, z)T^*(z_0))^{-1}\Delta(z_0, z) \tag{4}$$

– строгое сжатие при всех $z \in G$; на основании 1^0

$$K(z)(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}) = \{0\}, \quad K^*(z)(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_*) = \{0\}. \tag{5}$$

Из 2^0, (1) и (4) вытекает представление

$$T(z) = \Phi(K(z), -T(z_0)), \tag{6}$$

полезное при изучении связи между различными значениями оператор-функций $T(\cdot) \in \mathcal{L}_G$.

3. В дальнейшем основную роль будет играть формула, связывающая характеристические функции $\theta_{T(z)}(\zeta)$ и $\theta_{T(z_0)}(\zeta)$ [5] сжатий $T(z)$ и $T(z_0)$ $(T(\cdot) \in \mathcal{L}_G;\ z, z_0 \in G)$. Так как

$$\theta_{T(z)}(\zeta) = \Phi(\zeta I, T(z)) \mid \mathfrak{D}, \tag{7}$$

то на основании формулы (6), как будет ясно из дальнейшего, вопрос сводится к изучению композиции преобразований

$$X \to X_1 = \Phi(X, B_1)\,; \qquad X_1 \to X_2 = \Phi(X_1, B_2)\,.$$

Если $\|X\| \leq 1,\ \|B_1\| < 1,\ \|B_2\| < 1$, то соответствующий результат хорошо известен (см., например, [6], гл.X, задача I66; заметим, что в ее формулировке имеется неточность). Воспользуемся формулами, для этого элементарного случая получающимися из (2) с помощью непосредственного подсчета:

$$\mathcal{N}^*\Phi(\Phi(X,B_1),B_2)\mathcal{M} = \mathcal{D}_{R^*}\Phi(X,R)\mathcal{D}_R\,, \tag{8}$$

где $R = \Phi(B_2,-B_1)$, $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{B_2}(I-B_1^*B_2)^{-1}\mathcal{D}_{B_1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$,

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}_{B_2^*}(I-B_1B_2^*)^{-1}\mathcal{D}_{B_1^*} \in [\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1]\,,$$

$$\mathcal{M}^*\mathcal{M} = \mathcal{D}_R^2\,, \quad \mathcal{N}^*\mathcal{N} = \mathcal{D}_{R^*}^2\,. \tag{9}$$

Для получения этих формул в нужном нам случае ($\|X\|<1,\ \|B_1\|\leq 1,\ \|B_2\|<1$) достаточно записать их для $X, \rho B_1, B_2$ $(0<\rho<1)$, а затем перейти к пределу при $\rho \to 1$.

Из (9) вытекает существование таких изометрий

$$\mathcal{U}: \mathcal{D}_R \to \operatorname{clos}\mathcal{M}\mathcal{H}_1\,, \quad V: \mathcal{D}_{R^*} \to \operatorname{clos}\mathcal{N}\mathcal{H}_2\,,$$

что $\mathcal{U}\mathcal{D}_R = \mathcal{M}$, $V\mathcal{D}_{R^*} = \mathcal{N}$. Отсюда $\mathcal{N}^* = \mathcal{D}_{R^*}V^*$, где V^* изометрически отображает $\operatorname{clos}\mathcal{N}\mathcal{H}_2$ на $\mathcal{D}_{R^*}$ и аннулирует $\mathcal{H}_2 \ominus \operatorname{clos}\mathcal{N}\mathcal{H}_2$. Переписав (8) в виде

$$\mathcal{D}_{R^*}V^*\Phi(\Phi(X,B_1),B_2)\mathcal{U}\mathcal{D}_R = \mathcal{D}_{R^*}\Phi(X,R)\mathcal{D}_R\,,$$

получим

$$\Phi(X,\Phi(B_2,-B_1))\,|\,\mathcal{D}_{\Phi(B_2,-B_1)} = V^*\Phi(\Phi(X,B_1),B_2)\mathcal{U}\,. \tag{I0}$$

В случае, когда B_1 и B_2 – строгие сжатия, $\Phi(B_2,-B_1)$ – также строгое сжатие, $\mathcal{D}_{\Phi(B_2,-B_1)} = \mathcal{H}_1$ и (I0) переходит в известную формулу

$$\Phi(X,\Phi(B_2,-B_1)) = \mathcal{U}_2\Phi(\Phi(X,B_1),B_2)\mathcal{U}_1\,,$$

в которой $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ – унитарные операторы в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно.

Пусть $T(\cdot) \in \mathcal{L}_G$, $z_0 \in G$. Положим $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, $B_1 = T(z_0)$,

$B_z = K(z)$ (см. п.2), $X = \zeta I$. Тогда (см.(6),(7))

$$R = T(z), \quad \Phi(X,R) \,|\, \mathcal{D}_R = \theta_{T(z)}(\zeta).$$

Учитывая (5) и то, что $T\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_{T^*}$, $T(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) = \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*}$, получим $\operatorname{clos} \mathcal{M}\mathcal{H} = \mathcal{D}$, $\operatorname{clos} \mathcal{N}\mathcal{H} = \mathcal{D}_*$ и, значит, $\mathcal{U}$ и V - унитарные операторы (зависящие, вообще говоря, от z) в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_*$ соответственно. Отсюда

$$V^*\Phi(\Phi(X,B_1),B_z)\mathcal{U} = V^*\Phi(\theta_{T(z_0)}(\zeta), K(z)\,|\,\mathcal{D})\,\mathcal{U}.$$

На основании (I0) доказана

ТЕОРЕМА I. Пусть $T(\cdot) \in \mathcal{L}_G$, $z_0 \in G$. Тогда для любого $z \in G$ справедлива формула

$$\theta_{T(z)}(\zeta) = \mathcal{U}_*(z)\,\Phi(\theta_{T(z_0)}(\zeta), K_0(z))\,\mathcal{U}(z), \qquad (*)$$

в которой $K_0(\cdot)$ - голоморфная в G функция, $K_0(z) \in [\mathcal{D}, \mathcal{D}_*]$ - строгие сжатия ($\|K_0(z)\| < 1$), $K_0(z_0) = 0$; $\mathcal{U}(z) \in [\mathcal{D}]$, $\mathcal{U}_* \in [\mathcal{D}_*]$ - унитарные операторы.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Так как обычно в приложениях характеристическая функция сжатия T определяется с точностью до левого и правого изометрических множителей, то формулу (*) можно переписать в виде

$$\theta_{T(z)}(\zeta) = \Phi(\theta_{T(z_0)}(\zeta), K_0(z)). \qquad (II)$$

4. Сузим $\mathcal{L}_G$ до класса, для которого установлены основные результаты настоящей работы. Будем говорить, что принадлежащая $\mathcal{L}_G$ функция $T(\cdot)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_G^{(1)}(z_0)$ (z_0 - фиксированная точка из G), если I) сжатие $T(z_0)$ ограниченно обратимо, $\mathfrak{D}^2_{T(z_0)} \in \gamma_1$ (где γ_1 - идеал ядерных операторов в $\mathcal{H}$) и 2) $\Delta(z_0, z) \in \gamma_1$ (см.(3)) для каждого $z \in G$. В частности, $T(\cdot) \in \mathcal{L}_G^{(1)}(z_0)$, если $T(z_0)$ ограниченно обратим и $\dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{D}_{T(z_0)} < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие I) означает, что $T(z_0)$ - слабое сжатие. Из 2) следует, что $T(z)$ - слабое сжатие по крайней мере для тех z , при которых ограниченно обратим оператор $T(z)$, то есть [7] при всех $z \in G$, за исключением, быть может, некоторого не имеющего предельных точек в G множества.

Пусть $T(\cdot)\in \mathcal{L}_G^{(1)}(z_0)$. Так как (см.(4))

$$K_0(z) = \Delta(z_0, z)(I - T^*(z_0)\Delta(z_0, z))^{-1} | \mathfrak{D},$$

то $K_0(\cdot)$ голоморфна и $K_0(z)\in \gamma_1$ $(z\in G)$. Из $T^{-1}(z_0)\in[\mathcal{H}]$ следует, что $\dim \mathfrak{D} = \dim \mathfrak{D}_*$. Так как для произвольной изометрии $\mathcal{U}: \mathfrak{D}_* \to \mathfrak{D}$ справедливо тождество

$$\mathcal{U}\Phi(\theta_{T(z_0)}(\zeta),\ K_0(z)) = \Phi(\mathcal{U}\theta_{T(z_0)}(\zeta), \mathcal{U}K_0(z)),$$

то можно считать (см. замечание I и п.5 статьи [8]), что

$$\theta_{T(z_0)}(\zeta)\in[\mathfrak{D}],\ I-\theta_{T(z_0)}(\zeta)\in\gamma_1,\ K_0(z)\in[\mathfrak{D}].$$

После этого из теоремы I вытекает справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T(\cdot)\in\mathcal{L}_G^{(1)}(z_0)$. Тогда справедлива формула (II), в которой $K_0(z)$ - голоморфная в G функция со значениями - ядерными строгими сжатиями в G. При этом все операторы $\theta_{T(z)}(\zeta)$ $(z\in G, |\zeta|<1)$ здесь предполагаются принадлежащими $[\mathfrak{D}]$ и такими, что $I - \theta_{T(z)}(\zeta)\in\gamma_1$.

Заметим, что для произвольного z справедливость последнего включения вытекает из его справедливости при $z = z_0$ и формулы (II).

§ 2. <u>Аналитические возмущения обобщенно полных сжатий</u>

I. Пусть T - действующее в $\mathcal{H}$ слабое сжатие. Тогда, как известно [5] , [9] , существует единственная функция $\Omega_T(\beta)$, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств комплексной плоскости $\mathbb{C}$, со значениями - подпространствами пространства $\mathcal{H}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\Omega_T(\emptyset) = \{0\}$; $\Omega_T(\mathbb{C}) = \mathcal{H}$;

2) $\Omega_T(\bigcup_j \beta_j) = \bigvee_j \Omega_T(\beta_j)$; $\Omega_T(\bigcap_j \beta_j) = \bigcap_j \Omega_T(\beta_j)$

для каждой последовательности $\{\beta_j\}\subset\mathcal{B}$;

3) $\Omega_T(\beta)$ для любого замкнутого $\beta\subset\mathbb{C}$ является наибольшим инвариантным для T подпространством со спектром индуцированно-

го оператора, содержащимся в β .

Мы говорим [10], что T обладает абсолютно непрерывным спектром, если $\Omega_T(\beta) = \{0\}$ для любого множества $\beta\, (\in \mathcal{B})$ нулевой линейной хаусдорфовой меры ($mes\,\beta = 0$), и сингулярным спектром, если $\Omega_T(\beta_0) = \mathcal{H}$ для некоторого $\beta_0 \in \mathcal{B}$, $mes\,\beta_0 = 0$. Это определение совпадает с общепринятым в случае унитарного оператора. Используя связь между инвариантными подпространствами сжатия и делителями его характеристической функции [5], нетрудно установить следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Вполне неунитарное слабое сжатие (в.н.с.с.) T имеет абсолютно непрерывный (сингулярный) спектр в том и только том случае, если $T \in C_{11}$ ($T \in C_0$) [5], то есть, если функция $\theta_T(\cdot)$ является внешней (внутренней), что равносильно соответствующему свойству определителя $\det\, \theta_T(\cdot)$ (здесь и ниже $\theta_T(\zeta) \in [\mathfrak{D}_T]$, $I - \theta_T(\zeta) \in \gamma_1$ при $|\zeta| < 1$; ср.§ I, п.4).

Таким образом, и в вполне неунитарном случае наши определения равносильны общепринятым (см., например, [11]).

Приведем также следующие два очевидные предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для того, чтобы слабое сжатие T имело абсолютно непрерывный (сингулярный) спектр, необходимо и достаточно, чтобы его унитарная часть $T_0 = T \mid \mathcal{H}_0$ и вполне неунитарная часть $T_1 = T \mid \mathcal{H}_1$ обладали этим свойством. Для произвольного слабого сжатия T существует единственная такая пара подпространств $\mathcal{H}^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(s)}$, что $\mathcal{H}^{(a)} \cap \mathcal{H}^{(s)} = \{0\}$, $\mathcal{H}^{(a)} \vee \mathcal{H}^{(s)} = \mathcal{H}$, оператор $T^{(a)} := T \mid \mathcal{H}^{(a)}$ имеет абсолютно непрерывный, а оператор $T^{(s)} := T \mid \mathcal{H}^{(s)}$ - сингулярный спектр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для того, чтобы слабое сжатие T было полно (то есть, полна в $\mathcal{H}$ система конечномерных T-инвариантных подпространств), необходимо и достаточно, чтобы сжатия T_0 и T_1 обладали этим свойством; полнота T_1 эквивалентна тому, что $\det\, \theta_{T_1}(\zeta)$ $(\equiv \det\, \theta_T(\zeta))$ - произведение Бляшке (то есть $\theta_T(\zeta)$ - произведение Бляшке - Потапова).

2. Введем в рассмотрение некоторый класс оператор-функций, необходимый для получения первого из основных результатов настоя-

щей работы.

Голоморфную при $|\zeta|<1$ функцию $\theta(\zeta)$ отнесем к классу $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, если ее значения – принадлежащие $[\mathcal{H}]$ сжатия, $I-\theta(\zeta)\in\gamma_1$ $(|\zeta|<1)$ и внутренняя часть $d^{(i)}(\zeta)$ функции $d(\zeta):=\det\theta(\zeta)$ $(\not\equiv 0)$ либо тривиальна $(d^{(i)}(\zeta)=const)$, либо является произведением Бляшке.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\theta(\cdot)\in\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, $K(z)$ – голоморфная в области $G\subset\mathbb{C}$ функция, значения которой – принадлежащие $[\mathcal{H}]$ ядерные строгие сжатия, $K(z_0)=0$ для некоторой точки $z_0\in G$. Если M – множество тех $z\in G$, для которых $\Phi(\theta(\cdot),K(z))\notin\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, то пересечение M с любой спрямляемой кривой $\mathcal{L}$ имеет нулевую линейную хаусдорфову меру *); при этом M является множеством типа F_σ.

Это предложение доказано в [13] при дополнительном предположении простоты кривой $\mathcal{L}$. Справедливость теоремы в сформулированном здесь виде вытекает из того, что любая спрямляемая кривая является объединением не более чем счетной совокупности простых спрямляемых кривых и множества нулевой линейной хаусдорфовой меры [14]. Последнее утверждение теоремы 3 в статье [13] не сформулировано, но непосредственно следует из приведенного там доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в теореме 3 $\theta(\zeta)$ – произведение Бляшке – Потапова ($d(\zeta)$ – произведение Бляшке), то и $\Phi(\theta(\zeta),K(z))$ ($z\in M$) – произведение Бляшке – Потапова. Это следует из того, что преобразование $\theta\longrightarrow\Phi(\theta,K)$ переводит внутренние функции во внутренние функции, а внутренняя функция класса $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ является произведением Бляшке – Потапова.

3. Слабое сжатие T назовем обобщенно полным, если его сингулярная часть $T^{(s)}$ либо тривиальна ($\mathcal{H}^{(s)}=\{0\}$), либо полна в $\mathcal{H}^{(s)}$.

Из предложений I, 3 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для обобщенной полноты в.н.с.с. T необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция $\theta_T(\zeta)$ принадлежала классу $\mathcal{C}_{\mathfrak{D}}$.

---

*) Такие M (под названием Z-множеств) подробно изучались Безиковичем [12]).

При доказательстве теорем 4, 6 нам понадобится следующее утверждение, непосредственно вытекающее из предложения а) (п.2) и теоремы I.3.2 монографии [5] .

ЛЕММА I. Если $T(\cdot)\in\mathcal{L}_G$, то все операторы $T(z)$ $(z\in G)$ имеют одну и ту же унитарную часть $T_0(z)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $T(\cdot)\in\mathcal{L}_G^{(1)}(z_0)$ и сжатие $T(z_0)$ обобщенно полно. Тогда $T(z)$ обобщенно полно при всех $z\in G$, за исключением, быть может, некоторого такого множества M класса F_σ , что пересечение M с любой спрямляемой кривой имеет нулевую линейную хаусдорфову меру. Если же $T(z_0)$ – полное сжатие, то $T(z)$ полно при всех $z\in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы I следует, что можно ограничиться случаем полной неунитарности сжатия $T(z_0)$; тогда все сжатия $T(z)$ окажутся вполне неунитарными. После этого остается воспользоваться предложениями 3,4 , теоремами 2,3 и замечанием 3.

§ 3. Аналитические возмущения сжатий с липшицевым спектром

I. Пусть T – в.н.с.с. в $\mathcal{H}$ с лежащим на единичной окружности $\mathbb{T}$ спектром ($\sigma(T)\subset\mathbb{T}$), $P_{\varphi_0}(\varphi)$ $(0<\varphi-\varphi_0<2\pi)$ – ортопроектор на подпространство $\Omega_T(exp\{i[\varphi_0,\varphi]\})$. Будем говорить, что T имеет на дуге $exp\{i]\varphi_0,\varphi_1[\}$ $(0<\varphi_0<\varphi_1<2\pi)$ липшицев спектр, если при всех $\varphi\in[\varphi_0,\varphi_1]$ существует слабая производная $d/d\varphi\ \mathfrak{D}_T P_{\varphi_0}(\varphi)\mathfrak{D}_T =: Q(\varphi)$, удовлетворяющая ядерному условию Липшица: $\|Q(\varphi'')-Q(\varphi')\|_1\leq\mu|\varphi''-\varphi'|^\alpha$ ($\|\cdot\|_1$ – ядерная норма) для некоторых $\mu>0$ и $\alpha\in\,]0,1]$ ($Q\in\gamma_1-Lip\,\alpha$).

Назовем T сжатием с липшицевым спектром, если $\mathbb{T}$ может быть покрыта системой открытых дуг, на каждой из которых T имеет липшицев спектр.

Мы будем изучать оператор-функции, одно из значений каждой из которых имеет липшицев спектр. При этом воспользуемся следующим предложением – частным случаем теоремы, доказанной в [15] .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть T – в.н.с.с., $\sigma(T)\subset\mathbb{T}$, $0\leq\varphi_0<2\pi$. Тогда существует унитарный оператор $\mathcal{U}\in[\mathfrak{D}_T]$, сильно непрерывные эрмитово-возрастающие при $0\leq t\leq\ell$ оператор-функции $E(t)$, $\widetilde{P}(t)$ со значениями в $[\mathfrak{D}_T]$ и $[\mathcal{H}]$ соответственно ($sp\,E(t)\equiv t$, $\widetilde{P}^*(t)\equiv\widetilde{P}(t)\equiv\widetilde{P}^2(t)$, $\widetilde{P}(0)=0$, $\widetilde{P}(\ell)=1$), неубывающая на $[0,\ell]$

скалярная функция $\varphi(t)$ $(\varphi(+0)=\varphi(0),\ \varphi(t-0)=\varphi(t),$
$\varphi_0 \leq \varphi(t) < 2\pi+\varphi_0$ при $0\leq t<\ell)$, такие что

I) $\theta_T(\zeta) = \mathcal{U}\int_0^{\ell} exp\left\{\frac{\zeta+e^{i\varphi(t)}}{\zeta-e^{i\varphi(t)}}\, dE(t)\right\}$ $(|\zeta|<1)$

(мы, как и везде, предполагаем, что $\theta_T(\zeta)\in[\mathcal{D}_T],\ I-\theta_T(\zeta)\in\gamma_1)$;

2) $$\mathfrak{D}_T \widetilde{P}(t)\mathfrak{D}_T = 2\int_0^t \widetilde{W}^*(\tau)\, dE(\tau)\, \widetilde{W}(\tau), \tag{I2}$$

где
$$\widetilde{W}(t) = \int_0^t exp\{-dE(t)\} \quad (0\leq t\leq \ell);$$

3) $\widetilde{P}(t_0) = P_{\varphi_0}(\varphi(t_0))$, если $\varphi(t_0)<\varphi(t)$ при $t>t_0$.

Из 2), обратимости $\widetilde{W}(t)$ и строгого возрастания функции $E(t)$ $(E(t')\neq E(t'')$ при $t'<t'')$ следует строгое возрастание функции $\mathfrak{D}_T\widetilde{P}(t)\mathfrak{D}_T$. После этого из 3) вытекает, что если $\varphi(\cdot)$ на некотором интервале принимает постоянное значение $\widetilde{\varphi}$, то $\widetilde{\varphi}$ является точкой разрыва функции $\mathfrak{D}_T P_{\varphi_0}(\varphi)\mathfrak{D}_T$.

Таким образом, если T - в.н.с.с. с липшицевым на $exp\{i\,]\varphi_0,\varphi_1[\,\}$ спектром, то функция $\varphi(t)$ каждое значение из $[\varphi_0,\varphi_1]$ принимает не более одного раза. Воспользовавшись этим, произведем в мультипликативном интеграле

$$\theta(\zeta,t_1) := \int_0^{t_1} exp\left\{\frac{\zeta+e^{i\varphi(t)}}{\zeta-e^{i\varphi(t)}}\, dE(t)\right\} \quad (t_1=\sup_{\varphi(t)\leq\varphi_1} t)$$

замену $\varphi=\varphi(t)$. Получим

$$\theta(\zeta,t_1) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} exp\left\{\frac{\zeta+e^{i\varphi}}{\zeta-e^{i\varphi}}\, d\Sigma(\varphi)\right\},$$

где $\Sigma(\varphi)$ - эрмитово-неубывающая непрерывная на $[\varphi_0,\varphi_1]$ функция.

Произведя ту же замену в полученной из (I2) формуле

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{W}^{*-1}(\tau)\, d(\mathfrak{D}_T\widetilde{P}(\tau)\mathfrak{D}_T)\, \widetilde{W}^{-1}(\tau),$$

найдем

$$H(\varphi) := \frac{d}{d\varphi}\Sigma(\varphi) = \frac{1}{2}W^{*-1}(\varphi)\, Q(\varphi)\, W^{-1}(\varphi),$$

где

$$W^{-1}(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} exp\{ d\,\Sigma(\psi)\} \qquad (\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1).$$

Из ограниченности вариации $\Sigma(\cdot)$ и $Q(\cdot) \in \gamma_1 - Lip\,\alpha$ следует $H(\cdot) \in \gamma_1 - Lip\,\alpha$.

Так как

$$\theta_T(\zeta) = \theta_1(\zeta) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} exp\left\{ \frac{\zeta + e^{i\psi}}{\zeta - e^{i\psi}} H(\psi)d\psi \right\}, \tag{13}$$

где $\theta_1(\zeta)$ голоморфна на $exp\{i]\varphi_0,\varphi_1[\}$, то на основании теоремы из [16] (ср. [11], где, в частности, изучались ограниченные диссипативные операторы с липшицевым спектром) $\theta_T(\zeta)$ имеет на любой замкнутой дуге γ, содержащейся в $exp\{i]\varphi_0,\varphi_1[\}$, предельные значения $\theta_T(\zeta)$ (в равномерной операторной топологии), удовлетворяющие (равномерному) условию Липшица с показателем $\alpha_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ $(\theta_T(\cdot) \in Lip\,\alpha_1)$: $\| \theta_T(\xi'') - \theta_T(\xi')\| \leq \nu |\xi'' - \xi'|^{\alpha_1} (\xi', \xi'' \in \gamma)$. При этом стремление $\theta_T(\zeta)$ к $\theta_T(\xi)$ при $\zeta \to \xi \; (|\zeta| < 1)$ происходит равномерно по $\xi \in \gamma$.

Ясно, что аналогичные результаты верны для функций

$$\theta_T^{-1}(\zeta) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} exp\left\{ -\frac{\zeta + e^{i\psi}}{\zeta - e^{i\psi}} H(\psi)d\psi \right\} \cdot \theta_1^{-1}(\zeta),$$

$$(det\; \theta_T(\zeta))^{\pm 1} = det\,\theta_1(\zeta)^{\pm 1} \cdot exp\left\{ \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\zeta + e^{i\psi}}{\zeta - e^{i\psi}} h(\psi)d\psi \right\},$$

где $h(\cdot) := sp\,H(\cdot) \in Lip\,\alpha$ (последнее следует из неравенства $|h(\psi'') - h(\psi')| \leq \| H(\psi'') - H(\psi')\|_1$).

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Если в.н.с.с. T имеет липшицев спектр, то функции $\theta_T(\zeta)$, $\theta_T^{-1}(\zeta)$, $d_T(\zeta) := det\,\theta_T(\zeta)$, $d_T^{-1}(\zeta)$ продолжаются по непрерывности на $\mathbb{T}$. Полученные функции удовлетворяют условию Липшица (липшицевы) в замкнутом единичном круге $\mathbb{D}$.

Из непрерывности $d_T(\zeta)$ и $d_T^{-1}(\zeta)$ при $|\zeta| \leq 1$ вытекает, что $d_T(\cdot)$ – внешняя функция и, значит, на основании предложения 4 справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Вполне неунитарное слабое сжатие с липшицевым спектром имеет абсолютно непрерывный спектр.

Отсюда следует, что заключение теоремы 4 верно для таких $T(\cdot)\in\mathcal{L}^{(1)}_{G}(z_0)$, что $T(z_0)$ имеет липшицев спектр. Однако, в этом случае может быть получена более полная информация о сингулярных частях (C_0-частях) сжатий $T(z)$ $(z\in G)$. Соответствующий результат формулируется в теореме 6.

2. Нам понадобится лемма, доказательство которой получается небольшим уточнением рассуждений, приводящих к теореме IУ.I.I. монографии [I7].

ЛЕММА 2. Для любого оператора $A_0\in\mathfrak{S}_1$ существуют такие $\delta>0$, $\mu>0$, что каковы бы ни были $B, C\in\mathfrak{S}_1$, удовлетворяющие условиям $\|A_0-B\|_1<\delta$, $\|A_0-C\|_1<\delta$, справедливо неравенство

$$|\det(I-B)-\det(I-C)|<\mu\|B-C\|_1 .$$

Отсюда стандартным применением леммы Гейне-Бореля убедимся в справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 3. Если $F(\cdot)\in\mathfrak{S}_1-\mathrm{Lip}\,\alpha$ на некотором компакте $Q\subset\mathbb{C}$, то $\det(I-F(\cdot))\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ на Q.

Дадим определение понятия, играющего важную роль в ряде вопросов анализа [I8],[I9] и фигурирующего в формулировке теоремы 6.

Замкнутое множество $E\subset\mathbb{D}$ называется тонким, если

I) $E\cap\mathbb{D}=\{\zeta_j\}$, $\quad\sum_j(1-|\zeta_j|)<\infty$;

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\{\inf_{\zeta\in E}|e^{i\vartheta}-\zeta|\}\,d\vartheta>-\infty$.

Напомним, что тонкое множество на $\mathbb{T}$ - это множество Карлесона, то есть такое замкнутое множество линейной меры нуль, что длины δ_j его смежных интервалов удовлетворяют условию: $\sum_j\delta_j\ln\delta_j>-\infty$. Как показано в [20], замкнутое множество $E\subset\overline{\mathbb{D}}$ тонко, если помимо I) выполняется

2') проекция с центром в 0 множества E на $\mathbb{T}$ является множеством Карлесона.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $T(\cdot)\in\mathcal{L}^{(1)}_{G}(z_0)$, $T(z_0)$ - в.н.с.с. с липшицевым спектром, z - произвольная точка из G. Тогда возможны лишь три случая: I) $\sigma(T(z))=\overline{\mathbb{D}}$ *); 2) $T(z)\in C_{11}$; 3) $T(z)$ - в.н.с.с. и спектр его C_0-части является тонким множеством.

*) В тезисах [2I], содержащих ослабленную формулировку теоремы 6, этот случай опущен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теоремы 2

$$d_{T(z)}(\zeta) := \det\theta_{T(z)}(\zeta) =$$

$$= d_{T(z_0)}(\zeta)\cdot\det(I-\theta^{-1}_{T(z_0)}(\zeta)K_0(z))(\det(I-K_0^*(z)\theta_{T(z_0)}(\zeta)))^{-1}. \qquad (14)$$

Воспользовавшись теоремой 5, ядерностью $K_0(z)$ и леммой 3, установим липшицевость в $\overline{\mathbb{D}}$ функций (от ζ) $d_{T(z_0)}(\zeta)$,

$$\det(I-\theta^{-1}_{T(z_0)}(\zeta)K_0(z)), \quad \det(I-K_0^*(z)\theta_{T(z_0)}(\zeta))$$

(здесь мы для функций в $\mathbb{D}$ и их продолжений по непрерывности на $\overline{\mathbb{D}}$ не делаем различия в обозначениях). Липшицевость последнего сомножителя в (14) вытекает из того, что $\|K_0^*(z)\theta_{T(z_0)}(\zeta)\|\leq$ $\leq\|K_0(z)\|<1$ и $|\det(I-A)|^{-1}=|\det(I+(I-A)^{-1}A|\leq \exp\{(1-\|A\|)^{-1}\|A\|_1\}$ $(\|A\|<1,\ A\in\gamma_1)$. Таким образом, $d_{T(z)}(\cdot)$ – липшицева в $\overline{\mathbb{D}}$.

Пусть теперь $\sigma(T(z))\neq\overline{\mathbb{D}}$. Тогда (см. замечание 2) $T(z)$ – слабое сжатие, вполне неунитарное в силу полной неунитарности $T(z_0)$ (лемма 1), $d_{T(z)}(\zeta)\not\equiv 0$.

Если $T\notin C_{11}$, то рассмотрим внутреннюю часть $d^{(i)}_{T(z)}(\zeta)$ функции $d_{T(z)}(\zeta)$. Пусть $\mathcal{X}=\mathcal{X}_0\cup(\mathbb{T}\setminus\mathcal{X}_1)$, где $\mathcal{X}_0$ – множество лежащих в $\mathbb{D}$ нулей функции $d^{(i)}_{T(z)}(\cdot)$, $\mathcal{X}_1$ – объединение тех принадлежащих $\mathbb{T}$ открытых дуг, через которые эта функция аналитически продолжаема. Из доказанной липшицевости $d_{T(z)}(\cdot)$ в $\overline{\mathbb{D}}$ и одной теоремы Б.И.Коренблюма [18] следует, что $\mathcal{X}$ – тонкое множество. Так как $d^{(i)}_{T(z)}(\zeta)\equiv\det\theta_{T^{(s)}(z)}(\zeta)$, где $T^{(s)}(z)$ – C_0-часть сжатия $T(z)$, то (см. [8]) $\sigma(T^{(s)}(z))=\mathcal{X}$, что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На основании предложения, доказанного в [19], в формулировке теоремы 6 случай 3) может быть охарактеризован так: $T(z)$ – в.н.с.с. и его C_0-часть имеет резольвенту $R(\zeta)$ ограниченного вида в $\mathbb{D}$, то есть $R(\zeta)=\frac{1}{f(\zeta)}F(\zeta)$, где $F(\zeta)$ и $f(\zeta)$ – операторнозначная и скалярнозначная голоморфные и ограниченные в $\mathbb{D}$ функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 6 точна в следующем смысле: каково бы ни было тонкое множество $E\subset\overline{\mathbb{D}}$, существует такая функция $T(\cdot)\in\mathcal{L}^{(1)}_{\mathbb{D}}(0)$ $(\dim\mathfrak{D}_{T(z)}=1)$, что $T(0)$ имеет липшицев спектр, а $\sigma(T^{(s)}(z_0)) = E$ при некотором $z_0 \in \mathbb{D}$.

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно обратить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 6 и, в частности, воспользоваться результатом Б.И.Коренблюма [18], обратным к цитированному выше (при этом существенное упрощение достигается за счет скалярности характеристических функций конструируемых сжатий).

3. Пусть теперь $T(z_0)$ – преобразование Кэли вполне несамосопряженного диссипативного оператора

$$A = A_{\mathcal{R}} + iA_{\mathcal{J}} \qquad (A_{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}}^{*},\ 0 \leq A_{\mathcal{J}} \in \gamma_1); \qquad (15)$$

$$T(z_0) = (iI + A)^{-1}(iI - A).$$

В этой ситуации заключение теоремы остается верным (без случая I), который становится невозможным),если условие липшицевости спектра заменить на следующее более эффективно проверяемое условие: существует

$$\frac{d}{d\varphi} P_0(\varphi) \in \gamma_1 - Lip\, \alpha \quad \text{на } [0, 2\pi]. \qquad (16)$$

Справедливость этого утверждения вытекает из следующих соображений. Из (16), повторяя рассуждения, приводящие к (13), получим

$$\theta_T(\zeta) = \mathcal{U} \int_0^{2\pi} \exp\left\{ \frac{\zeta + e^{i\varphi}}{\zeta - e^{i\varphi}} H(\varphi)\, d\varphi \right\}$$

($H(\varphi) \geq 0$, $H(\cdot) \in \gamma_1 - Lip\, \alpha$ на $[0, 2\pi]$, $\mathcal{U}$ – унитарный оператор).
Из результатов [22] и [15] следует, что $H(0) = H(2\pi) = 0$, а это влечет [16] липшицевость функции $\theta_T(\cdot)$ на $\bar{\mathbb{D}}$. Дальнейшие рассуждения не отличаются от проведенных при доказательстве теоремы 6. Заметим, что невозможность случая I) вытекает из равенства [22] $\theta_T(1) = \mathcal{U}$, влекущего обратимость $\theta_{T(z)}(\zeta)$ для ζ достаточно близких к 1.

Литература

1. Г и н з б у р г Ю.П. О почти инвариантных спектральных свойствах сжатий и мультипликативных свойствах аналитических оператор-функций. - Функц.анализ и его прилож., 1971, т.5, № 3, с.32-41.
2. Г и н з б у р г Ю.П. О почти инвариантных свойствах аналитических операторных семейств. - Функц. анализ и его прилож., 1982, т.16, № 1, с.68-69.

3. Ш м у л ь я н Ю.Л. Обобщенные дробно-линейные преобразования операторных шаров. – Сиб.матем.журнал, 1980, т.21, № 5, с.114-131.

4. Ш м у л ь я н Ю.Л. О некоторых свойствах стабильности для аналитических оператор-функций. – Матем.заметки, 1976, т.20, № 4, с.511-520.

5. С.-Н а д ь Б., Ф о я ш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970.

6. Г л а з м а н И.М., Л ю б и ч Ю.И. Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969.

7. Г и н з б у р г Ю.П. Принцип максимума для $\mathfrak{J}$-нерастягивающих оператор-функций и некоторые его следствия. – Изв.вузов, Математика, 1963, № 1, с.42-53.

8. Г и н з б у р г Ю.П. О спектральных подпространствах сжатий с медленно растущей резольвентой. – Матем.исслед., Кишинев, 1970, № 5:4, с.45-62.

9. Г и н з б у р г Ю.П. О спектральных мерах и двойственности спектральных подпространств сжатий с медленно растущей резольвентой. – Зап.научн.семинаров ЛОМИ. Исследования по линейным операторам и теории функций. VIII, 1977, т.73, с.203-206.

10. Г и н з б у р г Ю.П. Мультипликативные представления и семейства ортопроекторов на инвариантные подпространства сжатий. – Функц.анализ, межвуз.сб. Ульяновск, 1977, вып.8, с.49-59.

11. С а х н о в и ч Л.А. Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром. – Труды Моск. матем. о-ва, 1968, вып.19, с.211-270.

12. B e s i c o v i c h A. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points II. – Math. Ann., 1938, v.115, p.296-329.

13. Г и н з б у р г Ю.П., Т а р а с е н к о А.А. Об аналитических семействах дробно-линейных преобразований аналитических оператор-функций, Функц. анализ, межвуз. сб. Ульяновск, 1983, с.51-59.

14. W a z e w s k i T. Kontinua prostowalue w zwiazku z funkcjami i odwzorowaniami absolutnie ciaglemi, Ann.Soc. Polon.Math. 1927, 3, Suppl. 9-49.

15. Г и н з б у р г Ю.П., М о г и л е в с к а я Р.Л. О спектральных функциях сжатий с медленно растущей резольвентой. – Докл.АН СССР, 1972, т.207, № 3, с.517-520.

16. Т а р а с е н к о А.А. О предельных значениях мультипликативных интегралов. – Изв.вуз'ов, Математика, 1983, № 6, с.70-74.

17. Г о х б е р г И.Ц., К р е й н М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965.
18. К о р е н б л ю м Б.И. О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы. – Докл.АНСССР, 1971, т.200, № 1, с.24-27.
19. A t z m o n A. Operators with resolvent of bounded characteristic, Integr. Equat. and Oper. Theory, 1983, v.6, p.779–803.
20. N e l s o n J a m e s D. A characterization of zero sets for A^∞. – Mich.Math. J., 1971, v.18, 2, p.141-147.
21. Г и н з б у р г Ю.П., Т а р а с е н к о А.А. Об аналитических возмущениях сжатий с гладким спектром. – Тезисы докл. XI Всесоюзн.школы по теории операторов в функц.пространствах. Челябинск, 1986, с.32.
22. Ш е в ч у к Л.В. Аналитические $\mathfrak{J}$-сжатия, удовлетворяющие условию Жолиа. – Тезисы докл.XI Всесоюзн.школы по теории операторов в функц.пространствах. Челябинск, 1986, с.146.

Ju.P.Ginzburg, A.A.Tarasenko. On singular parts of contractive analytic operator-functions.

Summary

We consider the class B_G of holomorphic functions in $G\subset\mathbb{C}$ whose values are contractions on a separable Hilbert space. For $T(\cdot)\in B_G$ we prove that if $T(z_0)$ (for some $z_0\in G$) is a weak contraction, its singular part $T^{(s)}(z_0)$ is complete, and the difference $T(z)-T(z_0)$ is not too big (say, finite dimensional) then $T^{(s)}(z)$ is complete almost everywhere in G. If, in addition, $T(z_0)$ is a completely nonunitary contraction satisfying some smoothness conditions then the spectrum σ_z of $T^{(s)}(z)$ is a thin set (in nontrivial case):

$$\int_{\mathbb{T}} \log\{\inf_{\zeta\in\sigma_z} |t-\zeta|\}|dt| > -\infty .$$

The proofs of the results stated are based on a formula obtained in the paper which relates the characteristic functions of the contractions $T(z)$ for different z in G.