И. Р. Шафаревич, Воспоминания об Алексее Ивановиче Кострикине, *Матем. обр.*, 2001, выпуск 1, 2–7

Воспоминания об Алексее Ивановиче Кострикине

И. Р. Шафаревич

Редакция представляет вниманию читателей воспоминания академика РАН Игоря Ростиславовича Шафаревича о выдающемся русском математике-алгебраисте Алексее Ивановиче Кострикине (1929 – 2000). А. И. Кострикин — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН с 1976 г., лауреат Государственной премии СССР (1968 г.). С 1972 г. до конца своих дней был заведующим кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, в 1977 – 1980 гг. — декан мех-мата. Автор популярного учебника по высшей алгебре для студентов математических специальностей, выдержавшего несколько переизданий на русском и английском языках. Был членом редколлегий российских математических журналов "Математический сборник" и "Вестник МГУ" (серия: "Математика и механика"), а также международных журналов "Communications in Algebra" и "Algebra Colloquium".

Я очень ярко помню, как впервые встретился с Алексеем Ивановичем. Это было в 1952 году. В то время на мехмате МГУ существовала так называемая "секретная группа", куда набирали студентов из всех университетов СССР. Чему их там учили, считалось секретом, но на самом деле было и тогда хорошо известно, а сейчас — тем более. Их готовили к занятиям тому, что сейчас называется "криптографией", то есть, шифровкой и разгадыванием шифров. И вот, ко мне обратился Александр Геннадиевич Курош, тогда заведовавший кафедрой алгебры, и сообщил, что в этой группе преподавали довольно серьезный курс алгебры, а теперь им надо писать дипломные работы — не могу ли я предложить несколько не слишком сложных тем? Я согласился, и мы с А. Г. Курошем рассказали на собрании группы о темах, которые предлагали. Я предложил одну тему, в которой надо было разобрать главу из книги XIX века, и переизменить в современных обозначениях и на современном математическом языке. Другая предлагала прочтение нескольких более современных работ. И тут что-то меня дернуло за язык и я, неожиданно для себя, рассказал о вопросе, который меня тогда занимал. Я сказал, что если кто-то хочет попробовать себя на исследовании нерешенного математического вопроса — то вот такой вопрос есть — хотя предприятие и сопряжено с риском. И рассказал о вопросе, который не сложно формулируется, не решен, но в его направлении появилось несколько любопытных работ. Вслед за этим, ко мне подошли два студента и сказали, что хотят писать работы по первым двум темам. А через несколько дней ко мне подошел молодой человек с широкой, обаятельной улыбкой и сказал, что берет третью тему, связанную с самостоятельным исследованием. Тут я не на шутку испугался: "Что за авантюру я затеял? Ведь он даже не имеет систематического мехматовского образования, не ходил на научные семинары!" И я сказал ему: "Давайте не будем торопиться! Сначала попробуйте решить все задачи, какие получатся, касающиеся теории групп в книге Ван-дер-Вардена." Через неделю он подошел ко мне и рассказал безупречные решения всех этих задач. Мне не оставалось ничего другого, как сообщить ему всю известную литературу по предложенному вопросу и ждать, что дальше произойдет. Этот студент и был Алексеем Ивановичем Кострикиным. Так состоялось наше знакомство.

Задачу, о которой идет речь, легко объяснить любому, знакомому с основными понятиями теории групп. Она восходит к вопросу, поставленному английским математиком В. Бернсайдом в 1902 году: будет ли конечной группа, имеющая конечное число образующих, в которой для каждого элемента x выполнено соотношение

$$x^n = 1. \tag{1}$$

Еще сам Бернсайд заметил, что проблему можно ставить двумя способами:

I – считая, что в соотношении (1) показатель n свой для каждого элемента x и

II – считая, что есть такой показатель n, единый для всех элементов x.

Наконец, среди специалистов по теории конечных групп, начиная с конца 1930-х годов все более популярной стал такой аналог вопроса Бернсайда: конечно ли число различных конечных групп, имеющих заданное число образующих и удовлетворяющих соотношению (1) для любого элемента x? Из положительного ответа на вопрос Бернсайда следовал бы положительный ответ на этот вопрос. Для него имеются разные названия, сам Алексей Иванович называл его "ослабленной проблемой Бернсайда" (ОПБ). Вот этим-то вопросом он и занялся. К тому моменту проблема Бернсайда (в постановке II) была решена в положительном смысле для $n = 2$ (что очевидно), $n = 3$ (что довольно элементарно; доказано самим Бернсайдом) и $n = 4$ (доказано И. Н. Сановым в 1940 году). Случай $n = 5$ считался в то время недоступным, как в проблеме Бернсайда, так и в ОПБ.

В своей дипломной работе А. И. Кострикин добился серьезных продвижений при $n = 5$. Его кандидатская диссертация содержала полное решение ОПБ для $n = 5$ (1955 г.). Его докторская диссертация содержала положительное решение ОПБ для произвольного простого показателя n (1958 г., доказательство опубликовано в 1959 г.).

Ситуация стала особенно драматичной, когда в 1959 году П. С. Новиков опубликовал краткое сообщение, в котором утверждал, что сама проблема Бернсайда (в постановке II) имеет отрицательное решение для $n \geq 72$. Доказательство оказалось очень сложным. Оно появилось только в 1968 году в работе П. С. Новикова и С. И. Адяна (для нечетных $n \geq 4381$), занимало в общей сложности более 120 страниц и публиковалось в трех последовательных выпусках журнала. (Отметим судьбу проблемы Бернсайда в постановке I. Эта проблема, конечно, тоже имеет отрицательное решение, но доказать это удалось гораздо проще, Е. С. Голоду в 1964 г. — работа занимает всего 3 страницы).

Результат А.И.Кострикина показал, таким образом, что занятия ОПБ были обоснованы — в этом случае мы получаем утверждение конечности, которое в связи с первоначальной постановкой Бернсайда не верно! Доказательство А. И. Кострикина основывается на новом методе, названном впоследствии "методом "сэндвичей Кострикина". Доказательство Кострикина далеко не просто. Автору удалось "ужать" его в первой публикации примерно до 30 страниц текста — но за счет крайней лаконичности. За это он сам в последствии и поплатился: как мне рассказывал А. И. Кострикин, несколько лет спустя, когда он уже стал заниматься другими вопросами, он получил письмо от одного японского математика, читавшего курс лекций по его работе. Этот математик не мог восстановить доказательство одного места в работе Кострикина. Когда Кострикин стал заново перечитывать свою работу, ему сначала показалось, что в его доказательстве есть серьезный пробел и он очень испугался. Но потом, когда он опять "вошел" в свою работу, он понял, что рассуждение проводится полностью аналогично предшествующим страницам и было им опущено лишь ради достижения краткости.

Впоследствии Алексей Иванович опубликовал книгу "Вокруг Бернсайда", в которой изложил доказательство вплоть до деталей и привел изложение ряда примыкающих вопросов.

Еще несколько слов о дальнейшей судьбе ОПБ (т.е. когда n — не простое). Еще в 1956 г. английские математики Хигман и Холл показали, что ее решение может быть сведено к случаю, когда n есть степень простого числа. Этот последний вопрос был решен Е. И. Зельмановым в 1990 г.. Зельманов использовал при этом метод "сэндвичей Кострикина" (наряду с другими методами). Таким образом, ОПБ теперь решена полностью. И, как мне кажется, несомненно, центральная заслуга в этом принадлежит Алексею Ивановичу.

Теперь, я думаю, пора обратиться от математической — к человеческой биографии Алексея Ивановича. Он родился в 1929 г. в деревне Большой Морец Еланского района Волгоградской области. Родители его были крестьяне. Как мне рассказывал Алексей Иванович, он несколько раз пытался научить грамоте свою мать Евдокию Степановну, но так и не преуспел в этом. Он хлебнул тяжесть крестьянской жизни в предвоенное и военное время, помнил, что два раза опухал от голода. Историю того, как он стал математиком, я знаю из его рассказа. После окончания средней школы он был направлен военкоматом в Ветеринарную Академию в Москве. Успешно сдал все экзамены и оставалось только представиться начальнику Академии. Надо было отрапортовать, "Товарищ генерал, рядовой Кострикин явился". От смущения Алексей Иванович доложил: "Товарищ рядовой, генерал Кострикин явился". На что генерал скомандовал: "Правое плечо вперед, шагом марш!" И Кострикин был отчислен. Обескураженный вернулся он на родину. Но преподаватель математики в школе уговорил его попробовать поступить в Саратовский Университет, где тогда объявили набор на 2-й поток математического факультета. Кострикин отправился в Саратов и ускоренным темпом сдал экзамены, сдавая по два экзамена в день. В Университете на него, очевидно, обратили внимание и когда был объявлен набор в "секретную группу" в Москве, его туда откомандировали. По окончании Университета он был направлен по специальности "секретной группы" в ведение КГБ. Вскоре произошло свержение Берии и, воспользовавшись наступившей в КГБ неразберихой, Кострикину удалось оттуда уволиться и поступить в аспирантуру Математического Института им. Стеклова Академии Наук СССР. Когда он окончил аспирантуру, то остался работать в отделе алгебры Института.

В Москву из Саратова Алексей Иванович переехал со своей женой Александрой Яковлевной, по образованию химиком. Она долгое время была основной материальной опорой их семьи, дополнившейся в 1953 году сыном Игорем. Она же получила для их семьи от завода, на котором работала, комнату в доме типа барака. Там Алексей Иванович нянчил сына и решал ОПБ. Маленькую отдельную квартиру они впервые получили в 1961 году. (Это было типично для тогдашней жизни — до того почти все жили в коммунальных квартирах.)

Мои воспоминания не претендуют на полноту — я расскажу только о тех работах Алексея Ивановича, которые меня с ним лично сталкивали. Одно такое направление я хорошо запомнил. Оно примыкает к центральной теме математики XIX-XX вв. — классификации простых групп Ли. Она была начата Софусом Ли и завершена его учениками Энгелем и Киллингом, а потом нашла множество применений. Мне представляется, что это — высшее понимание идеи симметрии, до которого дошла математика Нового Времени — точно так же, как конструкция всех правильных многогранников ("платоновых тел") была вершиной понимания идеи симметрии в Античной математике. Еще С. Ли обнаружил, что речь, собственно, идет о более простом объекте, впоследствии названном алгебрами Ли. Список простых алгебр Ли сейчас известен каждому алгебраисту, но при этом речь идет об алгебрах над полем комплексных чисел или, во всяком случае, как говорят алгебраисты, над полем характеристики 0. Над полями положительной характеристики все алгебры, открытые Ли, Энгелем и Киллингом, тоже существуют. Но были известны и примеры других, каких-то странных алгебр, так что все вместе они не укладывались в какую-либо общую картину. Этими "странными" алгебрами в 1960-е годы интересовался Алексей Иванович.

И вот, как-то в выходной день мы с ним отправились на целый день на прогулку за город. А возвращаясь домой, в поезде заговорили как раз об этом предмете. Дело в том, что меня тогда интересовала очень красивая и забытая теория Картана так называемых "псевдогрупп", построенная в начале XX века. Это было нечто вроде теории бесконечномерных простых алгебр Ли, но реализующихся как преобразования конечно мерного пространства. Я и сказал Алексею Ивановичу: "Знаете, одна из "странных" простых алгебр Ли в положительной характеристике очень похожа на одну из псевдогрупп в классификационном списке Картане. Тогда Алексей Иванович знал "назубок" известные примеры "странных" простых алгебр Ли в положительной характеристике, а я — список простых псевдогрупп, найденных Картаном. И это действительно незабываемое воспоминание — как под стук колес электрички возникал полнейший параллелизм двух теорий, на первый взгляд не имевших друг к другу никакого отношения.

Позже мы стали заниматься с Алексеем Ивановичем этим вопросом более систематично и опубликовали несколько работ, где, в частности, высказывали гипотезу, что простые алгебры Ли в положительной характеристике — это в точности те же алгебры Ли, которые существуют в характеристике 0 (и были найдены Ли-Энгелем-Киллингом) и те, которые соответствуют простым псевдогруппам, найденным Картаном (принцип соответствия был точно указан). Нам удалось доказать эту гипотезу лишь при некоторых, довольно существенных, ограничениях. К сожалению, в полном виде гипотезу доказали ни мои ученики, ни ученики Алексея Ивановича (он создал обширную школу в области алгебр Ли положительной характеристики). Гипотеза была доказана двумя американскими математиками — Бруком и Вильсоном. Поразительно, что (как выяснилось еще в наших совместных с Алексеем Ивановичем работах) в доказательстве существенную роль играет техника "сэндвичей Кострикина", разработанная в совершенно другой связи.

Поразительной чертой Алексея Ивановича было то, как он быстро откликался на новые идеи в математике. Помню, что когда возникла техника пучков в алгебраической геометрии (работы Кодаиры, Картана, Серра), он был одним из наиболее активных участников семинара на эту тему. Когда стал возникать интерес к арифметике эллиптических кривых, он был активнейшим сотрудником семинара и по этому вопросу, хотя оба не имели.прямого отношения к его непосредственным интересам и никак не отразились в его публикациях. Я помню, как один из самых влиятельных музыкантов XX века в России, пианист Генрих Густавович Нейгауз сказал об одном своем ученике: "Он любит не только свои десять пальцев, но и музыку." В переносном смысле это относится и к Алексею Ивановичу. Он готов был погрузиться в новый красивый раздел математики (особенно алгебры), совсем не заботясь о том, будет ли это полезно для его творческих планов.

Например, я помню, как в 1957 году мы решили с ним вместе разобраться в идеях только что появившейся книги Картана и Эйленберга "Гомологическая алгебра". Речь шла, собственно, о концепции "производных функторов". Мы увлеклись этим занятием и стали вычислять группы гомологий различных групп и алгебр. Эти группы гомологий являлись (в ситуации, которую мы для простоты рассматривали) конечномерными векторными пространствами, то есть определялись своей размерностью. Таким образом, любой конечной группе или конечномерной алгебре сопоставляется бесконечная последовательность натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, которые мы называли числами Бетти (группы или алгебры). В некоторых простейших случаях нам удалось эту последовательность вычислить (в еще более простых случаях такое вычисление было проделано в книге Картана-Эйленберга). Чтобы записать в финитной форме бесконечную последовательность чисел, мы использовали прием, знакомый еще Эйлеру: принимаем эти числа за коэффициенты степенного ряда. Таким образом, каждой конечномерной алгебре A сопоставляется ряд $P_A(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots$. Мы называли его (по аналогии с топологией) рядом Пуанкаре алгебры A.

В рассмотренных нами примерах это всегда оказывалось разложением в ряд некоторой рациональной функции — так бесконечный ряд (или последовательность чисел) удавалось записать в финитной форме. Нас особенно поразила формула для ряда Пуанкаре прямой суммы алгебр: оказывается, складываются не ряды $P_A(x)$, а $\frac{1}{P_A(x)} - 1$. Мы решили опубликовать об этом короткую статейку, в которой высказывали гипотезу, что ряд Пуанкаре конечномерной алгебры всегда будет рациональной функцией. Как я узнал позже, эту же гипотезу независимо сформулировал Серр. (Я узнал это от него, когда он приезжал в Москву в 1962 году. Опубликована его гипотеза была в 1965 году.) К сожалению, в 1980 году было доказано, что гипотеза не верна. Но я уверен, что этим вопрос не закрыт. Если такой финитный объект как конечномерная алгебра определяет бесконечную последовательность, то она должна как-то выражаться в финитной форме. Может быть, нужно в чем-то изменить саму постановку вопроса?

Начиная с 1972 года Алексей Иванович становится заведующим кафедрой алгебры на мехмате МГУ. Тогда, после смерти А. Г. Куроша, начальство долго искало ему замену. Вопрос, собственно, решался двумя лицами: ректором И. Г. Петровским и заведующим отделением математики П. С. Александровым. Я помню, както П. С. Александров сказал мне — тут еще появилась кандидатура Кострикина. Не посоветуете ли Вы мне, как с ней бороться? На что я ответил, что вряд ли с этой кандидатурой надо бороться — речь идет об очень хорошем математике, человеке не склочном и организованном. Он может оказаться как раз очень удачным кандидатом. Кончилось тем, что именно Алексея Ивановича на эту должность пригласили. Он занимал ее до самой своей смерти. Сравнительно недавно, в связи с 70-летием Алексея Ивановича, кафедра организовала научную конференцию. Но Алексей Иванович был уже так болен, что не смог на ней присутствовать...

На основании лекций, которые он читал в Университете, Алексей Иванович написал учебник. Вообще говоря, написать аккуратный учебник по курсу алгебры, который на кафедре за многие десятилетия отработан — не хитрое дело. Но Алексею Ивановичу удалось написать очень оригинальный, не стандартный учебник. Этот учебник, как и книга "Вокруг Бернсайда", был переведен на английский язык. Дважды международные комиссии, отбирающие докладчиков для международных конгрессов математиков, предлагали Алексею Ивановичу сделать доклад. Он выступал с этими докладами на международных конгрессах в Стокгольме и Ницце.

Все эти (и многие другие) внешние знаки признания указывают на более глубокий факт. Каждый раздел математики: анализ, геометрия, алгебра, теория чисел — имеет свою специфику и свою эстетику. Алексей Иванович был истинным алгебраистом, он глубоко чувствовал красоту и содержательность алгебры. Именно это, в частности, привлекало к нему учеников и помогло ему создать большую научную школу. След, оставленный работами Алексея Ивановича и его учеников в алгебре, сохранится до тех пор, пока алгебра будет существовать.