О. В. Бородин, А. О. Иванова, Высоты младших граней в 3-многогранниках, *Сиб. матем. журн.*, 2021, том 62, номер 2, 250–268

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 519.17

ВЫСОТЫ МЛАДШИХ ГРАНЕЙ В 3–МНОГОГРАННИКАХ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Известно, что каждый 3-многогранник содержит грань f степени $d(f)$ не больше 5, называемую *младшей.* Высота $h(f)$ грани f в 3-многограннике есть максимальная степень инцидентных грани f вершин. Тип грани f задается набором ограничений сверху на степени вершин, инцидентных f.

Из двойной n-пирамиды и полуправильного $(3, 3, 3, n)$-многогранника следует, что $h(f)$ может быть произвольно большой для каждой f, если в 3-многограннике разрешаются грани типов $(4, 4, \infty)$ или $(3, 3, 3, \infty)$, называемые *пирамидальными.*

Через h обозначим минимальную высоту младших граней в заданном 3-многограннике. В 1996 г. Хорняк и Йендроль доказали, что каждый 3-многогранник без пирамидальных граней имеет $h \leq 39$, и построили 3-многогранник с $h = 30$. В 2018 г. мы получили точную оценку $h \leq 30$.

В 1998 г. О. В. Бородин и Д. В. Лопарев доказали, что в любом 3-многограннике без пирамидальных граней и $(3, 5, \infty)$-граней найдется грань f с $h(f) \leq 20$ при $d(f) = 3$ либо $h(f) \leq 11$ при $d(f) = 4$, либо $h(f) \leq 5$ при $d(f) = 5$, где границы 20 и 5 неулучшаемы.

В настоящей работе доказывается, что в каждом 3-многограннике без пирамидальных граней и $(3, 5, \infty)$-граней найдется грань f с $h(f) \leq 20$ при $d(f) = 3$ либо $h(f) \leq 10$ при $d(f) = 4$, либо $h(f) \leq 5$ при $d(f) = 5$, где все границы 20, 10 и 5 неулучшаемы.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.202

Ключевые слова: граф, плоский граф, 3-многогранник, структурные свойства, младшая грань, степень, высота, вес.

1. Введение

Под 3-многогранником мы понимаем конечный выпуклый трехмерный многогранник. Как доказал Штейниц [1], 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Степень $d(x)$ вершины или грани x в 3-многограннике P есть число инцидентных ей ребер. k*-Вершина* и k*-грань* суть вершина и грань степени k, k^+*-вершина* имеет степень не менее k, k^-*-грань* — степень не больше k, и т. д.

Говорят, что f является *гранью типа* $(k_1, k_2, \dots)$ или просто $(k_1, k_2, \dots)$-*гранью*, если множество степеней инцидентных ей вершин мажорируется вектором $(k_1, k_2, \dots)$.

Высота $h(f)$ грани f в P есть максимальная степень вершин, инцидентных f. Через $h_i(P)$ и $h(P)$ обозначим минимальную высоту i-граней и младших граней в P соответственно.

Работа профинансирована Российским научным фондом (грант 16–11–10054).

Будем опускать аргумент функций от P, когда P понятен из контекста; например, можно писать h_i и h.

Вес $h(f)$ грани f в P есть сумма степеней ее граничных вершин, а $w(P)$, или просто w, — минимум весов 5^--граней в P. Через Δ и δ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в P соответственно.

Давно известно, что всякий 3-многогранник содержит 5^--грань, называемую *младшей гранью.* Еще в 1940 г. Лебег [2] дал приближенное описание младших граней в 3-многогранниках.

Теорема 1 (Лебег [2]). *Каждый* 3-*многогранник содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty),\ (3,7,41),\ (3,8,23),\ (3,9,17),\ (3,10,14),\ (3,11,13),$$
$$(4,4,\infty),\ (4,5,19),\ (4,6,11),\ (4,7,9),\ (5,5,9),\ (5,6,7),$$
$$(3,3,3,\infty),\ (3,3,4,11),\ (3,3,5,7),\ (3,4,4,5),\ (3,3,3,3,5).$$

Классическая теорема 1 наряду с другими идеями Лебега [2] имеет многочисленные приложения к проблемам раскраски плоских графов (первые примеры таких приложений и недавний обзор можно найти в [3–5]).

Первое усиление теоремы Лебега получено лишь в 2002 г. О. В. Бородиным [6] (параметры, помеченные звездочкой, являются наилучшими из возможных).

Теорема 2 (О. В. Бородин [6]). *Каждый* 3-*многогранник содержит* 5^--*грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty^*),\ (3,8^*,22),\ (3,9^*,15),\ (3,10^*,13),\ (3,11^*,12),$$
$$(4,4,\infty^*),\ (4,5^*,17),\ (4,6^*,11),\ (4,7^*,8),\ (5,5^*,8),\ (5,6,6^*),$$
$$(3,3,3,\infty^*),\ (3,3,4^*,11),\ (3,3,5^*,7),\ (3,4,4,5^*),\ (3,3,3,3,5^*).$$

Однако за последние десятилетия получено немало точных результатов о строении младших граней для различных классов 3-многогранников. В частности, следующие точные описания получены в 2013–2019 гг. для 3-многогранников с $\delta \geq 4$, для плоских четыреангуляций, а также для 3-многогранников без вершин степени от 5 до 7.

Теорема 3 (О. В. Бородин, А. О. Иванова [7]). *Каждый* 3-*многогранник без* 3-*вершин содержит* 3-*грань одного из следующих типов:*

$$(4,4,\infty),\ (4,5,14),\ (4,6,10),\ (4,7,7),\ (5,5,7),\ (5,6,6),$$

где все параметры неулучшаемы.

Теорема 4 (О. В. Бородин, А. О. Иванова, А. В. Косточка [8]). *Каждый триангулированный* 3-*многогранник содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3,4,31),\ (3,5,21),\ (3,6,20),\ (3,7,13),\ (3,8,14),\ (3,9,12),\ (3,10,12),$$
$$(4,4,\infty),\ (4,5,11),\ (4,6,10),\ (4,7,7),\ (5,6,6),\ (5,5,7),$$

где в каждом типе первые два параметра фиксированы, а третий параметр неулучшаем.

Теорема 5 (О. В. Бородин, А. О. Иванова [9]). *Каждый 3-многогранник без вершин степени от 5 до 7 содержит грань одного из следующих типов:*

$$(4,4,\infty),\ (3,8,14),\ (3,9,13),\ (3,10,12),$$

$$(3,3,3,\infty),\ (3,3,4,11),\ (3,4,4,4),\ (3,3,3,3,4),$$

где все параметры неулучшаемы.

Еще 1963 г. Коциг [10] доказал, что каждая плоская триангуляция с $\delta = 5$ удовлетворяет неравенству $w \le 18$, и предположил, что $w \le 17$. В 1989 г. эта гипотеза Коцига была подтверждена О. В. Бородиным [11] в более общем виде.

Теорема 6 (О. В. Бородин [11]). *Каждый 3-многогранник с $\delta = 5$ содержит $(5,5,7)$-грань или $(5,6,6)$-грань, где все параметры точны.*

Теорема 6 также подтвердила гипотезу Грюнбаума [12] 1975 г. о том, что циклическая связность (определяемая как минимальное число ребер, удаление которых из графа позволяет получить две компоненты, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не превышает 11, причем оценка точна (ранее Пламмером [13] получена оценка 13).

Грани типов $(4,4,\infty)$ и $(3,3,3,\infty)$ называются *пирамидальными*. Отметим, что в $(3,3,3,n)$-архимедовом теле, получающемся из двойной $2n$-пирамиды удалением каждого четного верхнего вертикального ребра и каждого нечетного нижнего вертикального ребра, каждая грань f пирамидальна и имеет $h(f) = n$, то же верно для двойной n-пирамиды.

Для плоских триангуляций без 4-вершин Коциг [14] в 1978 г. доказал, что $w \le 39$, а О. В. Бородин [15] в 1992 г., подтвердив гипотезу Коцига [14] — что $w \le 29$; эта оценка неулучшаема, как следует из конструкции, получаемой из икосаэдра двукратной вставкой 3-вершин во все грани.

О. В. Бородин [16] в 1998 г. показал, что $w \le 29$ даже для любого триангулированного 3-многогранника без $(4,4,\infty)$-граней, откуда легко следует $h \le 20$, и что для триангуляций без смежных 4-вершин имеет место точная оценка $w \le 37$.

Недавно оценка $h \le 10$ для четыреангулированных 3-многогранников без $(3,3,3,\infty)$-граней, полученная в 1995 г. С. В. Августиновичем и О. В. Бородиным [17], была доведена нами в [18] до точной оценки $h \le 8$.

Для произвольных 3-многогранников теорема 1 влечет $w \le \max\{51, \Delta + 9\}$. Хорняк и Йендроль [19] усилили в 1996 г. эту оценку следующим образом: если нет ни $(4,4,\infty)$-граней, ни $(3,3,3,\infty)$-граней, то $w \le 47$. О. В. Бородин и Вудал [20] доказали, что запрет $(3,3,3,\infty)$-граней влечет точную оценку $w \le \max\{29, \Delta + 8\}$.

В 2017 г. мы [21], доведя результат Хорняка и Йендроля до точной оценки, доказали, что каждый 3-многогранник без пирамидальных граней содержит грань (не обязательно младшую) высоты не более 20, а в [22] О. В. Бородин, М. А. Быков и А. О. Иванова еще уточнили этот результат, доказав, что в каждом 3-многограннике без пирамидальных граней найдется 10^--грань высоты не более 20, причем оба параметра 20 и 10 неулучшаемы.

Хорняк и Йендроль [19] также доказали, что каждый 3-многогранник без пирамидальных граней имеет $h \le 39$, и построили 3-многогранник с $h = 30$. В 2018 г. мы доказали [23] точную оценку $h \le 30$.

В 1998 г. О. В. Бородин и Д. В. Лопарев [24] доказали, что для любого 3-многогранника без $(3,5,\infty)$-граней и пирамидальных граней выполняется хотя бы одно из неравенств $h_3 \le 20$, $h_4 \le 11$ или $h_5 \le 5$, причем оценки 20 и 5 неулучшаемы.

Долгое время не было известно, является ли точной лебеговская оценка $h \le 11$ для 3-многогранников без 3-граней. В 2015 г. мы [25] доказали, что $h \le 10$ для таких 3-многогранников, и нашли конструкцию, подтверждающую точность этой оценки.

Цель данной работы — доказать следующую точную версию упомянутого выше результата О. В. Бородина и Д. В. Лопарева [24].

Теорема 7. *Всякий* 3*-многогранник без* $(3, 5, \infty)$*-граней и пирамидальных граней содержит либо* 3*-грань высоты не более* 20*, либо* 4*-грань высоты не более* 10*, либо* 5*-грань высоты не более* 5*, где все границы* 20*,* 10 *и* 5 *неулучшаемы.*

Еще ряд результатов о строении младших граней в 3-многогранниках можно найти в упомянутых выше работах, обзоре Йендроля и Фосса [26] и нашем обзоре [27], а также статьях [28–36].

2. Доказательство теоремы 7

Неулучшаемость оценки $h_3 \le 20$ подтверждается так. Вставив сначала в каждую грань икосаэдра по вершине и соединив каждую новую вершину со всеми граничными вершинами своей грани, получаем триангуляцию T со всеми гранями вида $(3, 10, 10)$. После вставки новых 3-вершин во все грани из T получаем триангуляцию, в которой имеются только грани вида $(3, 6, 20)$ и $(3, 20, 20)$.

Для доказательства неулучшаемости оценки $h_4 \le 10$ достаточно вставить конфигурацию из [25], показанную на рис. 1, в каждую грань икосаэдра, в результате чего получим 3-многогранник без треугольников и пирамидальных 4-граней, в котором каждая 4-грань имеет высоту 10. Неулучшаемость оценки 5 следует из полуправильного $(3, 3, 3, 3, 5)$-многогранника.

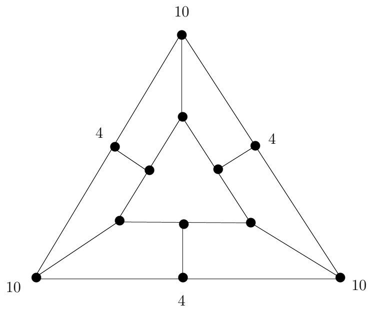

Рис. 1. Фрагмент конструкции с $h_4 = 10$ [25].

Теперь предположим, что 3-многогранник P' является контрпримером к верхним оценкам в теореме 7, имея $h_3 \ge 21$, $h_4 \ge 11$ и $h_5 \ge 6$. За конечное число шагов преобразуем P' в еще один контрпример P, следуя операциям в приведенных ниже замечаниях 1–3. При выполнении этих операций используется 3-связность 3-многогранника P', вследствие которой добавление диагонали в 4^+-грань не создает петель и кратных ребер (так как в P' нет разделяющих одно- и двухвершинных множеств) и не нарушает 3-связность (как и добавление любого ребра, не создающего петель и кратных ребер). Другими словами, все вершины в любой грани из P' попарно различны и никакие две из них не смежны. Также 3-связность не нарушается при добавлении 3-вершины к трем вершинам из 3-грани в P'.

Замечание 1. Пусть $f = v_1v_2\dots$ — 4^+-грань с $d(v_1) \geq 11$; тогда
(a) $d(f) \leq 5$, так как иначе можно добавить диагональное ребро v_1v_4 внутрь f;
(b) если $d(v_1) \geq 21$, то $d(v_3) \leq 4$ по аналогичной причине.

Замечание 2. Не существует 4-вершины v, инцидентной двум 4^+-граням, каждая из которых содержит 21^+-вершину, не смежную с v, так как иначе можно соединить v диагоналями с этими 21^+-вершинами.

Замечание 3. Не существует 3-грани $f = v_1v_2v_3$ с $d(v_1) \geq 21$, $d(v_2) \geq 21$, $d(v_3) \geq 5$, поскольку иначе вставляем вершину внутрь f и соединяем ее с граничными вершинами грани f.

Нетрудно проверить, что применяемые в замечаниях 1–3 операции не создают запрещенных граней, т. е. пирамидальных, а также имеющих $h_3 \leq 20$, $h_4 \leq 10$ или $h_5 \leq 5$. Конечность числа шагов при построении P следует из того, что каждая из операций в замечаниях 1–3 применяется только к вершинам из исходного контрпримера P', причем не более чем к трем и бесповторно.

2.1. Перераспределение зарядов. Из формулы Эйлера $|V|-|E|+|F|=2$ для P получаем

$$\sum_{v\in V}(d(v)-6) + \sum_{f\in F}(2d(f)-6) = -12, \tag{1}$$

где V, E и F суть множества вершин, ребер и граней в P.

Зададим *начальный заряд* $\mu(v) = d(v)-6$ для каждой $v \in V$ и $\mu(f)=2d(f)-6$ для каждой $f \in F$, так что только 5^--вершины в V имеют отрицательный заряд. Используя свойства P как контрпримера, локально перераспределим заряды, сохранив их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x \in V \cup F$. Это будет противоречить тому факту, что сумма новых зарядов в соответствии с (1) равна -12.

Сначала введем несколько определений и обозначений. Вершины, смежные с вершиной v в циклическом порядке, суть $v_1, v_2, \dots, v_{d(v)}$. *Граница* $\partial(f)$ грани f есть цикл $v_1v_2\dots v_{d(f)}$ из вершин, инцидентных f. Грани, инцидентные вершине v по циклу, обозначим через $f_1 = \dots v_1vv_2, f_2 = \dots v_2vv_3, \dots, f_{d(v)} = \dots v_{d(v)}vv_1$. Вершина *симплициальна,* если не инцидентна ни одной 4^+-грани.

4-Грань $f = v_1v_2v_3v_4$ с $d(v_1) \geq 11$ назовем *особой,* если $4 \leq d(v_2) \leq 5$ и $d(v_3) = d(v_4) = 3$, а *острой,* если $4 \leq d(v_3) \leq 5$ и $d(v_2) = d(v_4) = 3$.

11-Вершина v есть 11_{bad}-вершина, если каждая грань при v либо особая, либо острая, либо это 3-грань, инцидентная 5^--вершине.

Теперь опишем правила R1–R6 перераспределения зарядов (см. рис. 2–5) на P, после применения которых новый заряд $\mu'(x)$ каждой вершины или грани x становится неотрицательным вопреки (1).

R1. Каждая 5^+-грань f отдает 1 каждой инцидентной 5^--вершине, за следующими двумя исключениями:

(R1ex1) если $d(v_1) \geq 6$, $d(v_2) \leq 5$, а $d(v_3) \geq 6$, то f отдает заряд 2 вершине v_2;

(R1ex2) если $d(v_1) \geq 6$, $d(v_2) \leq 5$, $d(v_3) \leq 5$, $d(v_4) \leq 5$, а $d(v_5) \geq 6$, то f отдает 2 вершине v_3.

R2. Каждая 4-грань f отдает каждой инцидентной 5^--вершине v_1:

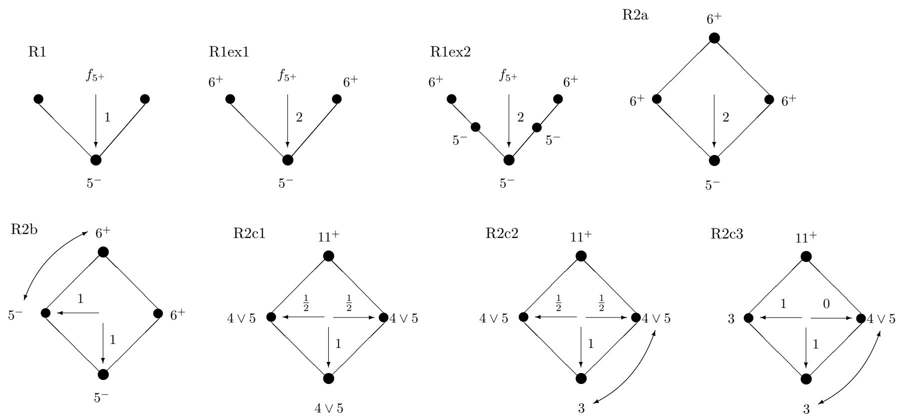

Рис. 2. Правила R1 и R2 перераспределения зарядов.

(a) 2, если эта единственная 5^--вершина в $\partial(f)$;

(b) 1, если $\partial(f)$ содержит ровно две 5^--вершины;

(c) пусть $\partial(f)$ содержит 5^--вершины v_1, v_2, v_3 (а значит, $d(v_4) \geq 11$), среди которых точно n_3 вершин имеют степень 3 (здесь $n_3 \leq 2$, так как в P нет пирамидальных граней); тогда

(c1) 1 отдается вершине v_2 и $\frac{1}{2}$ каждой из v_1 и v_3 при $n_3 = 0$;

(c2) 1 отдается 3-вершине и $\frac{1}{2}$ каждой из 4^+-вершин при $n_3 = 1$;

(c3) 1 каждой 3-вершине и 0 третьей вершине при $n_3 = 2$.

R3. Пусть v — 3-вершина.

(a) Если v симплициальна с $d(v_1) \geq 21$ и $d(v_2) \geq 21$, то v получает через каждую инцидентную грань от каждой смежной 11^+-вершины:

(a1) $\frac{3}{4}$, когда $d(v_3) \leq 10$,

или

(a2) $\frac{1}{2}$ в противном случае.

(b) Если v инцидентна в точности одной 4^+-грани $f_1 = v_1 v v_2 \dots$, где $d(v_1) \leq d(v_2)$ (как помним, $6 \leq d(v_1) \leq d(v_2) \leq 20$ по замечанию 1, а значит, $d(v_3) \geq 21$), то v получает через грани f_2 и f_3:

(b1) $2 \times \frac{1}{2}$ от v_3, когда $d(v_2) \leq 10$,

(b2) $2 \times \frac{3}{4}$ от v_3 и $\frac{1}{2}$ от v_2, когда $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_2) \geq 11$,

либо

(b3) $2 \times \frac{1}{2}$ от v_3 и $2 \times \frac{1}{2}$ от v_1 и v_2, когда $d(v_1) \geq 11$.

(c) Если v инцидентна в точности одной 3-грани $f_1 = v_1 v v_2$, где $d(v_2) \geq 21$, то v получает:

(c1) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ от v_2 через грани f_1 и f_2 соответственно, когда $d(v_1) \leq 10$,

либо

(c2) $2 \times \frac{1}{2}$ от v_1 и v_2 через f_1, когда $d(v_1) \geq 11$, а v_1 не является 11_{bad}-вершиной;

(c3) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ от v_1 и v_2 через f_1, когда v_1 есть 11_{bad}.

R4. Каждая 4-вершина v получает от 11^+-вершины:

(a) $\frac{1}{2}$ от v_1 через 3-грань $f_4 = v_4 v v_1$, за следующими исключениями:

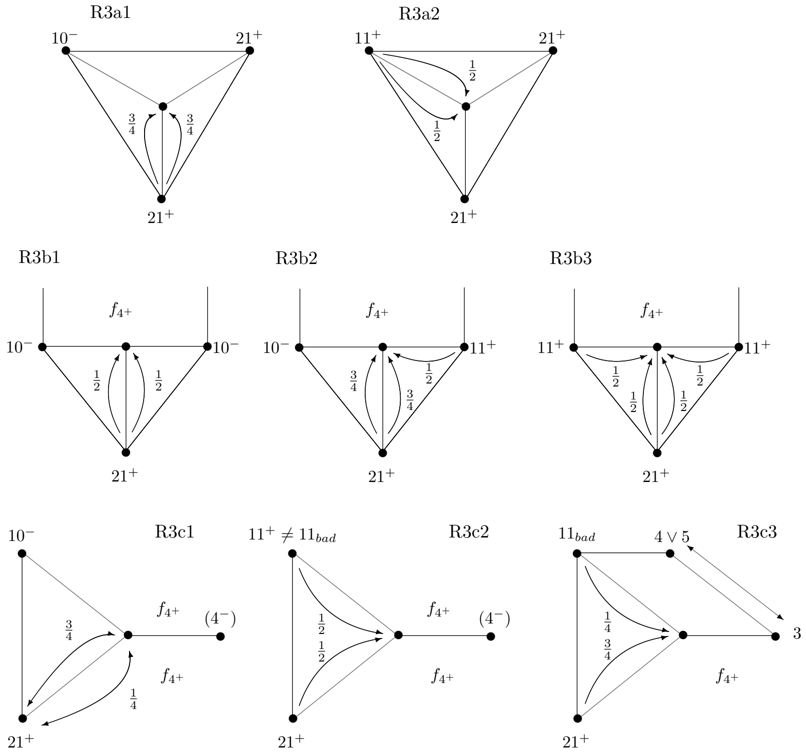

Рис. 3. Правило R3 перераспределения зарядов.

(R4ex1a) если $f_1 = vv_1zv_2$ есть особая 4-грань, f_4 смежна с 4^+-гранью по ребру vv_4, а v_1 является 11_{bad}, то v получает $\frac{1}{4}$ от v_1 и $\frac{3}{4}$ от 21^+-вершины v_4 через грань f_4;

(b) $\frac{1}{2}$ через особую грань $f_1 = vv_1yv_2$ с $d(v_1) \geq 11$, за следующим исключением, при котором v_1 отдает 0:

(R4ex1b) $d(v_1) \geq 21$, $d(v_4) \geq 11$ и существуют 3-грани v_1xy с $d(x) \leq 10$ и vv_1v_4;

(c) $\frac{1}{2}$ через острую грань $f_4 = vv_1zv_4$, за следующими исключениями, при которых заряд вершиной z не отдается:

(R4ex1c) $d(z) \geq 11$, а f_4 смежна особой или острой грани по ребрам v_1z и v_4z;

(R4ex2c) $d(z) \geq 21$, а f_4 смежна с 3-гранью v_1zz_1, у которой $d(z_1) \leq 10$, а также с особой или острой гранью по ребру v_4z;

(R4ex3c) $d(z) \geq 21$, а f_4 смежна с 3-гранью v_1zz_1, у которой $d(z_1) \leq 10$, и v_4zz_4.

R5. Каждая 5-вершина v получает $\frac{1}{2}$ от 11^+-вершины:

(a) от вершины v_1 через 3-грань $f_5 = vv_1v_5$ с $d(v_5) \geq 6$, за следующими исключениями:

(R5ex1a) если $f_1 = vv_1zv_2$ является особой 4-гранью, f_5 смежна с 4^+-гранью по ребру vv_5, а v_1 — 11_{bad}-вершина, то v получает $\frac{1}{4}$ от v_1 и $\frac{3}{4}$ от 21^+-вершины v_5;

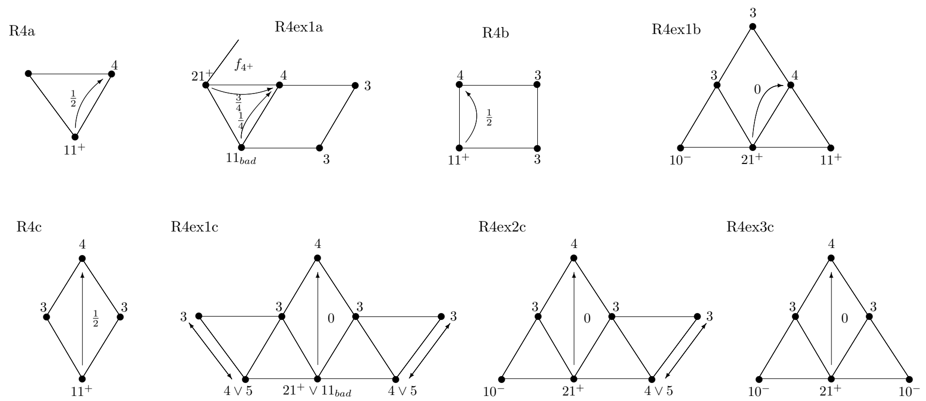

Рис. 4. Правило R4 перераспределения зарядов.

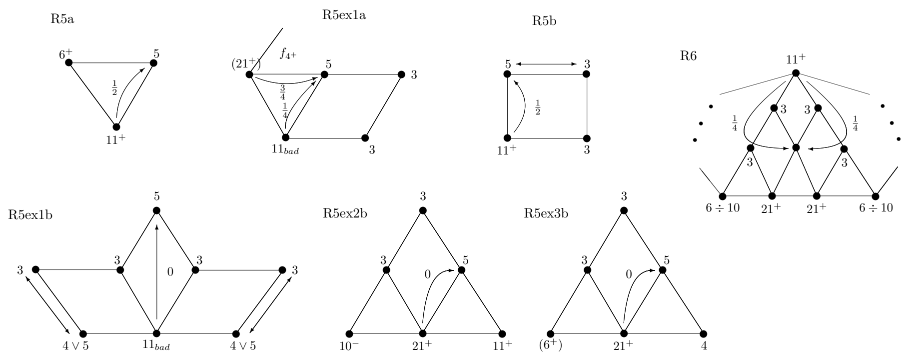

Рис. 5. Правила R5 и R6 перераспределения зарядов.

(b) через острую или особую грань f_1, за следующими исключениями, при которых v получает 0 через f_1:

(R5ex1b) $f_1 = vv_1zv_2$, где $d(v_1) = d(v_2) = 3$, а z — 11_{bad}-вершина;

(R5ex2b) $f_1 = vv_1yv_2$, где $d(v_1) \geq 21$, $d(y) = d(v_2) = 3$, $d(v_5) \geq 11$ и существуют 3-грани v_1xy с $d(x) \leq 10$ и vv_1v_5;

(R5ex3b) $f_1 = vv_1yv_2$, где $d(v_1) \geq 21$, $d(y) = d(v_2) = 3$, $d(v_5) = 4$ и существуют 3-грани v_1xy (с $d(x) \geq 6$) и vv_1v_5.

R6. Если 11^+-вершина v лежит в острой грани $f_2 = vv_2zv_3$ с $4 \leq d(z) \leq 5$, причем f_2 смежна с гранями $f_1 = \dots vv_2x_2y_2$ и $f_3 = \dots vv_3x_3y_3$ такими, что $d(x_i) = 3$ и $d(y_i) \geq 6$ при $2 \leq i \leq 3$, то v посылает $\frac{1}{4}$ вершине z через каждую из граней f_1 и f_3.

Замечание 4. На самом деле на рис. 5 изображена более конкретная ситуация, чем описанная в R6; а именно, это заключительная ситуация в доказательстве случая R4ex1b леммы 8. Кроме того, правило R6 применяется в конце доказательства леммы 9 (см. ниже).

2.2. Проверка того, что $\mu'(f) \geq 0$ для любой грани f в P. Сначала рассмотрим 6^+-грань f. Можно расчленить ее передачи величиной 2 на 5^--вершины в границе $\partial(f)$ согласно правилам R1ex1, R1ex2, перебросив по $\frac{1}{2}$ на соседние 6^+-вершины в $\partial(f)$. В результате такого усреднения каждая вершина в $\partial(f)$ будет получать не более 1 или $2 \times \frac{1}{2}$. С учетом передач в 1 согласно правилу R1, это рассуждение влечет $\mu'(f) \geq 2d(f) - 6 - d(f) \times 1 \geq 0$.

Пусть $d(f) = 5$. Вспомним, что $\partial(f)$ содержит по меньшей мере одну 6^+-вершину по условию теоремы. Если f инцидентна четырем 5^--вершинам, то $\mu'(f) \geq 4-4\times 1 = 0$ по правилу R1; если не более чем двум, то $\mu'(f) \geq 4-2\times 2 = 0$ согласно R1–R1ex2. Если в $\partial(f)$ имеются в точности три 5^--вершины, то f отдает 2 не более одного раза, а 1 — не более двух раз, поэтому снова $\mu'(f) \geq 0$.

Далее предположим, что $d(f) = 4$. Вспомним, что $\partial(f)$ содержит 11^+-вершину и не более двух 3-вершин. Если f не инцидентна 5^--вершинам, то $\mu'(f) = \mu(f) = 2$ ввиду того, что f не участвует в правиле R2. Если в границе f имеется в точности одна 5^--вершина, то $\mu'(f) = 2 - 2 = 0$ согласно R2a. Если f инцидентна ровно двум 5^--вершинам, то $\mu'(f) = 2 - 2 \times 1 = 0$ по R2b.

Остается предположить, что $\partial(f)$ содержит три 5^--вершины. Тогда если в $\partial(f)$ нет 3-вершин или имеются в точности одна или две 3-вершины, то получаем $\mu'(f) = 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ по R2c1, $\mu'(f) = 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ по R2c2, либо $\mu'(f) = 2 - 2 = 0$ по R2c3 соответственно.

Наконец, при $d(f) = 3$ имеем $\mu'(f) = \mu(f) = 0$.

2.3. Проверка того, что $\mu'(v) \geq 0$ для любой вершины v в P. Пусть v смежна с вершинами $v_1, v_2 \dots v_{d(v)}$ по циклу, и пусть f_i — грань $v_i v v_{i+1} \dots$, где $1 \leq i \leq d(v)$ (сложение по модулю $d(v)$).

Вспомним, что наш контрпример P не содержит $(3, 3, 3, \infty)$-граней, $(4, 4, \infty)$-граней и $(3, 5, \infty)$-граней, а каждая его 3-грань инцидентна 21^+-вершине.

Случай 1. $d(v) = 3$.

Подслучай 1.1. Вершина v инцидентна трем 3-граням. Заметим, что v имеет по меньшей мере двух 21^+-соседей, скажем v_1 и v_2. Если $d(v_3) \geq 11$, то $\mu'(v) = d(v) - 6 + 6 \times \frac{1}{2}$ по правилу R3a2. В противном случае $\mu'(v) = -3 + 4 \times \frac{3}{4}$ по R3a1.

Подслучай 1.2. Предположим, что $f_1 = v_1 v v_2 \dots$ — единственная 4^+-грань при v, и пусть $d(v_1) \leq d(v_2)$. Согласно замечанию 1(b) имеем $d(v_3) \geq 21$ и $d(v_2) \leq 20$.

Заметим, что f_1 дает 2 на v при $d(f_1) \geq 5$ (согласно R1ex1), а также если $d(f_1) = 4$ и $d(v_2) \leq 10$ (по R2b1). В обоих вариантах v получает не менее $\frac{1}{2}$ от v_3 через каждую из граней f_2, f_3 по R3b1–R3b3, откуда получаем $\mu'(v) \geq -3 + 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Остается допустить, что $d(f_1) = 4$ и $d(v_2) \geq 11$. Теперь v получает не меньше 1 от f_1 по R2a или R2b, а также $4 \times \frac{1}{2}$ либо $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4}$ от своих соседей по правилам R3b2, R3b3. Поэтому снова имеем $\mu'(v) \geq 0$.

Подслучай 1.3. Грань $f_1 = v_1 v v_2$ есть единственная 3-грань при v, где $d(v_1) \leq d(v_2)$. По замечанию 1(b) имеем $d(v_2) \geq 21$ и $d(v_3) \leq 4$.

Заметим, что каждая из граней $f_2 = v_2 v v_3 \dots$ и $f_3 = v_1 v v_3 \dots$ дает не меньше 1 вершине v по R1, R2. Если $d(v_1) \leq 10$, то v получает $\frac{3}{4}$ через f_1 и $\frac{1}{4}$ через f_2 от v_2 по R3c1, откуда $\mu'(v) \geq 0$. В противном случае имеем $d(v_1) \geq 11$ и $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3c2, R3c3.

Подслучай 1.4. Вершина v не инцидентна 3-граням. Здесь $\mu'(v) \geq -3 + 3 \times 1 = 0$ согласно R1, R2.

Случай 2. $d(v) = 4$.

Лемма 8. *Если 4-вершина v не получает $\frac{1}{2}$ через особую грань согласно* R4ex1b *или через острую грань по* R4ex1c–R4ex4c, *то все равно $\mu'(v) \geq 0$.*

Доказательство. Пусть v подчиняется одному из исключений R4ex1b–R4ex3c из правила R4.

Случай R4ex1b. В добавление к обозначениям, введенным при описании R4ex4b, рассмотрим грани $f_1^* = \dots xyv_2z$, $f_2 = \dots zv_2vv_3$ и $f_3 = \dots v_3vv_4$.

Заметим, что v_3 получает $2 \times \frac{1}{2}$ через 3-грань f_4 по R4a, за исключением случая, когда v_4 является 11_{bad}-вершиной, а грань f_3 — особая, и тогда v_3 получает $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ через f_4 согласно R4ex1a. Тогда требуемое уже следует из R1, кроме варианта $d(f_2) = 4$ и $d(f_3) \leq 4$.

Сначала пусть $d(f_3) = 3$. Если $d(y) \geq 11$, то f_3 также приносит $\frac{1}{2}$ вершине v по тем же причинам. Если $d(y) \leq 10$, то $d(y) \geq 5$ ввиду отсутствия $(4, 4, \infty)$-граней, а это значит, что v_3 получает $\frac{1}{2}$ от v_4 через f_3 по R4a и $\frac{1}{2}$ от f_2 по R2c2 (как помним, $d(v_2) = 3$).

Остается допустить, что $d(f_3) = 4$. Если $d(v_3) \geq 4$, то v_3 получает не менее $2 \times \frac{1}{2}$ от f_2 и f_3 по R1, R2c1, и R2c2, что и требовалось.

Наконец, предположим $d(v_3) = 3$. Отсюда следует, что грань $f_2zv_2vv_3$ является острой и приносит $\frac{1}{2}$ вершине v согласно R4c, поскольку исключения из правила R4c здесь не применимы ввиду наличия 4^+-грани $f_1' = yxv_2z \dots v_1v_2x$, имеющей $6 \leq d(y) \leq 10$, $d(x) = d(v_2) = 3$, и $d(z) \geq 11$.

Таким образом, уже доказано $\mu'(v_3) \geq 0$ ввиду вкладов $1 + \frac{1}{2}$ от f_4 и f_2, кроме варианта, когда f_3 подчиняется правилу R4ex1b (как и грань f_1).

Но тогда $d(v_4) \geq 21$ и, более того, приходим к симметричной конфигурации, в которой имеется грань $f_3^* = \dots y'x'v_3z$ с $d(x') = 3$, $6 \leq d(y') \leq 10$, а также 3-грань $v_4x'y'$.

Здесь острая грань $f_2 = xv_3yz$ подчиняется правилу R6, проводя $2 \times \frac{1}{4}$ через 4^+-грани f_1^* и f_3^*, которые не являются ни острыми, ни особыми, поэтому исключения R4ex1c–R4ex3c не применимы к f_2 (см. также R6 на рис. 5). В сочетании с 1, полученной через грань f_4, и $\frac{1}{2}$ от 11^+-вершины z через f_2 согласно R4c это дает $\mu'(v) = 0$, что и требовалось.

Случай R4ex1c. Пусть имеется 11^+-вершина z, инцидентная особым граням $f_1 = zz_1z_1'v_1$, $f_2 = zv_1vv_4$, причем $d(v_1) = d(v_4) = 3$ и $f_3 = zz_4z_4'v_4$. Пусть $f_1' = z_1'v_1vv_2 \dots$ и $f_4' = z_4'v_4vv_3 \dots$ — грани, смежные с f_2 по ребрам vv_1 и vv_4 соответственно, а $f_2' = v_2vv_3 \dots$ — четвертая грань при вершине v.

Понятно, что f_1' и f_3' являются 4^+-гранями. Если $d(f_1') \geq 5$ и $d(f_3') \geq 5$, то v получает не менее 1 от каждой из f_1' и f_3' согласно R1, а значит, $\mu'(v) \geq -2 + 2 \times 1 = 0$.

Поэтому можно в дальнейшем считать, что $d(f_1') = 4$. Нетрудно видеть, что $d(v_2) \geq 11$ и v получает $\frac{1}{2}$ от или через f_1'. Действительно, это следует из R2b, когда f_1' не является особой, так что пусть она особая, и заметим, что $d(z_1') = 3$.

Если $d(v_2) \leq 20$, то v_2 посылает $\frac{1}{2}$ вершине v через f_1' по R4b (очевидно, что R4ex1b не применимо к f_1'). То же верно, когда $d(v_2) \geq 21$, но здесь R4ex1b не применимо, поскольку f_1' смежна с 4^+-гранью $\dots v_2z_1'z_1$, где $d(z_1) \leq 5$, а f_1 является особой по предположению.

Если к тому же $d(f_3') = 4$, то ввиду симметрии $d(v_3) \geq 11$ и v получает $\frac{1}{2}$ от или через грань f_3'. Нетрудно видеть, что тогда z получает не менее 1 от или через f_2'. Действительно, это следует из R1 при $d(f_2') \geq 5$, из R2a,b при $d(f_2') = 4$ и из R4a или R4ex1a при $d(f_2') = 3$.

Таким образом, остается допустить, что $d(f_3') \geq 5$, а это означает, что v собирает не менее $\frac{1}{2}+1$ от f_1' и f_3', т. е. v требуется еще $\frac{1}{2}$ от или через f_2'. Если f_2' — неособая 4^+-грань, то f_2' дает не менее $\frac{1}{2}$ вершине v по R1, R2.

Заметим, что v_2 посылает $\frac{1}{2}$ на v также и через грань f_2', если та особая. Опять-таки это ясно при $d(v_2) \leq 20$, а в противном случае R4ex1b не может применяться к f_2' из-за присутствия 4^+-грани f_1'.

Наконец, если $d(f_2') = 3$, то 21^+-вершина из грани f_2' уже посылает не менее $\frac{1}{2}$ через f_2' на v согласно R4a, так что снова $\mu'(v) \geq -2+1+2\times\frac{1}{2} = 0$.

Случай R4ex2c. В основном сохраним обозначения из предыдущего случая, но теперь имеем также 3-грань $f_1 = zz_1v_1$ с $6 \leq d(z_1) \leq 10$. Заметим, что v получает не менее 1 от неособой 4^+-грани $f_1' = vv_1z_1\dots$ по правилам R1, R2. Это означает, что остается допустить, что f_3' является 4-гранью, откуда следует, что $d(v_3) \geq 11$.

Рассуждая аналогично случаю R4ex1c, видим, что v получает не менее $\frac{1}{2}$ или от v_3 через f_3', когда f_3' является особой, или от самой f_3' в противном случае. С учетом не менее $\frac{1}{2}$, полученной вершиной v от f_2', когда f_2' является неособой 4^+-гранью, либо от v_3 через f_2' в противном случае, это влечет $\mu'(v) \geq 0$.

Случай R4ex3c. Имеем 3-грани $f_1 = zz_1v_1$ с $6 \leq d(z_1) \leq 10$ и $f_3 = zz_4v_4$ с $d(z_4) \geq 6$.

Если $d(z_4) \leq 10$, то v получает не менее 1 от каждой из 4^+-граней f_1' и f_3', откуда $\mu'(v) \geq 0$, так что можно далее считать, что $d(z_4) \geq 11$.

Если $d(f_3') \geq 5$, то v по-прежнему получает не менее 1 от каждой из f_1' и f_3', так что пусть $d(f_3') = 4$. Если $d(v_3) \geq 4$, то v получает не менее $\frac{1}{2}$ от f_3', а кроме того, не менее $\frac{1}{2}$ от f_2', когда $d(f_2') \geq 4$, либо от 21^+-вершины в грани f_2' через f_2' в противном случае, что и требовалось.

Поэтому дополнительно предположим, что $d(v_3) = 3$, а это означает, что грань f_3' острая. Мы знаем из замечания 1(b), что $d(z_4) \leq 20$, поэтому f_3' не подчиняется правилу R4ex1c ввиду наличия смежной 3-грани f_3.

Отсюда следует, что v получает $\frac{1}{2}$ через f_3'. Остается рассмотреть случай, когда v не получает ничего от или через f_2', но тогда f_2' должна быть особой или острой гранью.

Однако особая f_2' не подчиняется ни одному из исключений R4ex1b, R4ex1c и R4ex2c ввиду своей смежности с не подходящей для этих целей 4^+-гранью f_1'. Следовательно f_2' также приносит $\frac{1}{2}$ вершине v, что и требовалось.

Наконец, пусть $f_2' = vv_2xv_3$ — острая грань, откуда $d(v_2) = 3$ и $d(x) \geq 11$. Снова имеем $d(x) \leq 20$ согласно замечанию 1(b), а поэтому опять R4ex1c и R4ex2c не применимы к f_2' из-за присутствия «неуклюжей» 4^+-грани f_1'. Это дает $\mu'(v) \geq 0$. $\square$

Ввиду леммы 8 можно уже считать, что 4-вершина v не участвует в исключениях к правилу R4, касающихся острых и особых граней. Теперь v получает не менее $\frac{1}{2}$ согласно R1, R2 от каждой инцидентной 4^+-грани, не являющейся ни острой, ни особой, а также $\frac{1}{2}$ через любую инцидентную 3-грань и особую или острую 4-грань от 11^+-вершины в этой грани по правилам R4a, R4b или R4c, откуда $\mu'(v) \geq -2+4\times\frac{1}{2} = 0$.

Случай 3. $d(v) = 5$.

Лемма 9. *Если 5-вершина v получает 0 через острую или особую грань по* R5ex1b–R5ex3b, *то все равно $\mu'(v) \geq 0$.*

Доказательство. Сначала предположим, что v получает 0 через острую грань $f_2 = vv_2zv_3$ от 11^+-вершины z согласно исключению R5ex1b. Ввиду симметрии между f_1 и f_3 достаточно заметить, что грань $f_1 = v_1vv_2z^* \dots$ приносит не менее $\frac{1}{2}$ вершине v. Отметим, что $d(z^*) \le 5$ в R5ex1b, поэтому $d(f_1) \ge 4$.

Ввиду R1 и R2, нам уже нечего доказывать, кроме случая особой грани f_1, в котором $d(z^*) = 3$ и $d(v_1) \ge 11$. Кроме того, f_1 должна подчиняться R5ex2b, т. е. давать 0 вершине v через f_1. Если так, то $d(v_1) \ge 21$, но f_1 смежна с 4^+-гранью $f_1' = v_1z^*z^{**} \dots$ при вершине v_1, поскольку $d(z^{**}) \le 5$ ввиду участия грани f_2 в R5ex1b; противоречие.

Пусть теперь v получает 0 через грань $f_1 = vv_1yv_2$ согласно R5ex2b; тогда $d(v_1) = d(z) = 3$, $d(v_2) \ge 21$, $d(v_3) \ge 11$ и существует 3-грань $f_2 = vv_2v_3$. Теперь для доказательства $\mu'(v) \ge 0$ достаточно заметить, что v получает $2 \times \frac{1}{2}$ от v_2 и v_3 через f_2 согласно R5a, когда v_3 не является 11_{bad}-вершиной, либо $\frac{1}{2}$ от v_2 через f_2 по R5ex1a и $\frac{1}{2}$ от v_3 по R5b.

Наконец, пусть v получает 0 от или через $f_1 = vv_1yv_2$ согласно R5ex3b; тогда $d(v_1) = d(y) = 3$, $d(v_2) \ge 21$, $d(v_3) = 4$ и существуют 3-грани $f_1' = xyv_2$ и $f_2 = vv_2v_3$. Заметим, что ни R5ex1b, ни R5ex2b не применимо к грани f_5. Если применимо R5ex3b, то $d(v_5) \ge 21$ и $d(v_4) = 4$, и тогда v получает 1 от f_3 по R2c1.

Так что уже можно считать, что v получает не менее $\frac{1}{2}$ от или через f_1. Остается только исключить вариант, когда v получает 0 от или через каждую из граней f_3 и f_4. Такое может случиться, лишь если R5ex3b применимо к f_4, но это означает, что $d(v_4) \ge 21$, $d(v_5) = 3$, $d(f_3) = 3$, f_4 является особой и имеется 3-грань $v_5x'y'$ с $d(x') \ge 6$. В этом случае v получает либо 1 согласно R1 от f_5 при $d(f_5) \ge 5$, либо $\frac{1}{2}$ через острую грань f_5 по R5b и $2 \times \frac{1}{4}$ по R6 через грани f_1 и f_4, поэтому $\mu'(v) = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Теперь из леммы 9 в сочетании с правилами R1, R2 и R5 следует, что $\mu'(v) \ge 5 - 6 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$, если наша v инцидентна не менее чем двум 4^+-граням.

С другой стороны, v должна быть инцидентна хотя бы одной 4^+-грани, так как иначе у симплициальной вершины v найдутся два последовательных 21^+-соседа ввиду нечетности, что противоречит замечанию 3.

Остается предположить, что $f_1 = v_1vv_2 \dots$ — единственная 4^+-грань при v. Заметим, что $d(v_1) \ge 4$ и $d(v_2) \ge 4$. Ввиду замечания 1(b) и симметрии можно считать, что $d(v_1) \le 20$. Отсюда получаем $d(v_5) \ge 21$, $d(v_4) \le 20$, $d(v_3) \ge 21$ и $d(v_2) \le 20$.

Если $d(f_1) \ge 5$, то v получает не менее 1 от f_1 по R1, и тогда $\mu'(v) \ge -1 + 1 = 0$. Так что пусть далее $d(f_1) = 4$. Если $d(v_1) \ge 11$, то v_1 не является 11_{bad}-вершиной, поскольку грань f_1 не является ни острой, ни особой, а значит, v получает $2 \times \frac{1}{2}$ от v_1 и v_5 через грань f_5 по R5a, что и требовалось.

Ввиду симметрии пусть $d(v_1) \le 10$ и $d(v_2) \le 10$. Это означает, что $\partial(f_1)$ содержит 11^+-вершину, лежащую напротив вершины v, поэтому v получает не менее 1 от f_1 по правилам R2a, R2b и R2c1, что снова дает $\mu'(v) \ge 0$.

Случай 4. $6 \le d(v) \le 10$. Поскольку начальный заряд $\mu(v) = d(v) - 6$ вершины v неотрицателен и никакие положительные заряды вершина v по правилам R1–R6 не теряет, имеем $\mu'(v) \ge 0$.

Случай 5. $11 \le d(v) \le 20$. Поскольку v посылает не более $\frac{1}{2}$ через через каждую инцидентную грань согласно R1–R6, получаем $\mu'(v) \ge d(v) - 6 - d(v) \times$

$\frac{1}{2} = \frac{d(v)-12}{2}$. Таким образом, остается рассмотреть вариант $d(v) = 11$ и покрыть дефицит в $\frac{1}{2}$.

Можно считать, что v инцидентна хотя бы одной 4^+-грани, скажем f_2, так как иначе v будет инцидентна 3-грани с двумя 21^+-вершинами в границе, а это дает $\mu'(v) \geq 5 - (11-1) \times \frac{1}{2} = 0$.

Если грань f_2 участвует в правиле R6, то $4 \leq d(f_1) \leq 5$ согласно замечанию 1(a), причем f_1 не острая и не особая. Это означает, что f_1 забирает от v в точности $\frac{1}{4}$. То же самое верно для грани f_3, что влечет $\mu'(v) \geq 5-(11-2)\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{4} = 0$, так как такая вершина v не посылает больше $\frac{1}{2}$ через инцидентную грань согласно R3–R5.

Далее пусть v не участвует в R6. Заметим, что наличие хотя бы одной неособой и неострой 4^+-грани при v, не проводящей заряда от v по R1–R6, уже дает $\mu'(v) \geq 5 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$.

Таким образом, можно считать, что v полностью окружена острыми и особыми 4-гранями, а также 3-гранями, инцидентными 5^--вершинам; другими словами, v является 11_{bad}-вершиной.

Теперь предположим, что v инцидентна хотя бы одной 3-грани; тогда заметим, что v имеет четное число инцидентных 3-граней, поскольку каждая 3-грань при v содержит 21^+-соседа и 5^--соседа вершины v. Более того, всякий 21^+-сосед вершины v входит в две 3-грани при v.

Рассмотрим любую максимальную цепь P_{2n} из 3-граней при v; понятно, что P_{2n} ограничена с обоих концов 5^--соседями вершины v, так как v уже 11_{bad}-вершина.

Поскольку каждая концевая 3-грань в P_{2n} смежна с острой или особой 4-гранью при v, а значит, забирает не более $\frac{1}{4}$ от v по правилам R3c3, R4ex1a или R5ex1a, получаем $\mu'(v) \geq 5 - (11-2)) \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 0$.

Наконец, пусть v полностью окружена острыми и особыми 4-гранями. Тогда v смежна лишь с 5^--вершинами, причем не имеет двух последовательных 4^+-соседей. Из нечетности $d(v)$ следует, что у v найдутся два 3-соседа рядом, пусть v_1 и v_2. Но v не посылает заряда через острую грань $f_1 = \ldots v_1vv_2$ ввиду исключений R4ex1c и R5ex1b, поэтому $\mu'(v) \geq 5 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$, что и требовалось доказать.

Случай 6. $d(v) \geq 21$. Сначала отметим, что v посылает не более $\frac{3}{4}$ через любую грань $f_2 = v_2vv_3\ldots$ по правилам R3–R6. Действительно, при $d(f_2) = 3$ это сразу следует из R3–R5. Пусть $d(f_2) \geq 4$. Тогда v посылает $\frac{1}{4}$ вершине v_2 по R3c1, когда $d(v_2) = 3$ и имеется 3-грань v_1vv_2 с $d(v_1) \leq 10$. То же верно для v_3. Кроме того, f_2 может посылать $\frac{1}{2}$ вершине степени 4 или 5, если f_2 есть острая или особая 4-грань. Поэтому если f_2 не является ни острой гранью, ни особой, то v посылает не более $2 \times \frac{1}{4}$, а если f_2 острая, то v не может посылать сразу $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$ ввиду исключения R4ex3c.

Поскольку $\mu' \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{3}{4} = \frac{d(v)-24}{4}$, уже доказано требуемое для $d(v) \geq 24$. Чтобы доказать $\mu' \geq 0$ при $21 \leq d(v) \leq 23$, надо найти одну или несколько граней при v, уводящих менее $\frac{3}{4}$ от v.

Доход $\sigma(v_i, v_{i+1})$ *от грани* $f_i = v_ivv_{i+1}$ (сложение здесь и далее по модулю $d(v)$) есть (неотрицательная) разность между $\frac{3}{4}$ и зарядом, посылаемым вершиной v через f_i по правилам R3–R6. А *доход* $\sigma(v)$ *вершины* v есть суммарный доход от всех граней, инцидентных v. Таким образом надо проверить, что $\sigma(v)$ не менее $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ при $d(v) = 23$, $d(v) = 22$ и $d(v) = 21$ соответственно.

p-Получателем S_p будем называть такую последовательность из $p+1$ подряд идущих вершин $v_{i+1}\dots v_{i+p+1}$ при v, что $d(v_{i+1}) \geq 6$, $d(v_{i+k}) \leq 5$ при любых $2 \leq k \leq p-1$, а $d(v_{i+p}) \geq 6$. Таким образом, f_k, где $1 \leq k \leq p$, есть k-я грань $v_{i+k}vv_{i+k+1}\dots$ при получателе S_p. Ввиду симметрии можно в дальнейшем считать, что $d(v_{i+1}) \leq d(v_{p+i+1})$.

Очевидно, что множество граней при v разбито 6^+-соседями вершины v на получатели. Пусть $\sigma(S_p)$ — суммарный доход от всех граней получателя S_p. Стало быть, $\sigma(S_p) \geq 0$ для любого S_p, а $\sigma(v)$ есть сумма всех $\sigma(S_p)$.

Замечание 5. Если вершина v участвует в правиле R6, то $\sigma(v) \geq \frac{5}{4}$. В самом деле, тогда v посылает $\frac{1}{2}$ через острую грань f_2 по R4c, R5b, а также по $\frac{1}{4}$ через каждую из неострых и неособых смежных 4^+-граней f_1 и f_3 (которые фактически являются 5^--гранями ввиду замечания 1(a). Таким образом, f_1, f_2 и f_3 уже приносят суммарный доход $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ вершине v, что и требовалось.

Поэтому в дальнейшем можно считать, что v не участвует в R6. Отсюда следует, что v может посылать $\frac{1}{4}$ через 4^+-грань только по правилу R3c1; а именно, на 3-вершину v_1, лежащую в 3-грани v_1vv_2, где $d(v_2) \leq 10$.

Следующая лемма описывает некоторые получатели $S_p = v_1\dots v_{p+1}$, дающие ненулевой доход $\sigma(S_p)$, с учетом величины p и степеней их граничных вершин (см. также рис. 6, на котором 6^+- и 5^--вершины изображены соответственно черными и белыми кружками).

Лемма 10. *Доход $\sigma(S_p)$ от получателя $S_p = v_1\dots v_{p+1}$ с $d(v_1) \leq d(v_p)$ составляет:*

(a) $\sigma(S_1) = \frac{3}{4}$*;*

(b1) $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$ *при* $d(v_3) \leq 10$ *или* $d(v_1) \geq 11$*;*

(b2) $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{4}$, *если* $d(v_1) \leq 10$, *а* v_3 *не является* 11_{bad}*-вершиной;*

(b3) $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$ *при* $d(v_1) \geq 11$*;*

(c1) *если* $d(v_4) \leq 10$, *то* $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$*;*

(c2) $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ *при* $d(v_1) \leq 10$ *и* $d(v_4) \geq 11$, *если* v_4 *не является* 11_{bad}*-вершиной, либо* $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$ *в противном случае;*

(c3) *если* $d(v_1) \geq 11$, *то* $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$, *когда обе* v_1 *и* v_4 *являются* 11_{bad}*-вершинами,* $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$, *когда в точности одна из* v_1 *и* v_4 *является* 11_{bad}, *и* $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$, *когда ни* v_1, *ни* v_4 *не является* 11_{bad}*-вершиной;*

(d) *пусть* $d(v_5) \geq 11$*; тогда* $\sigma(S_4) \geq \frac{1}{2}$, *если* v_5 *не является* 11_{bad}*-вершиной, и* $\sigma(S_4) \geq \frac{1}{4}$ *в противном случае;*

(e1) $\sigma(S_5) \geq \frac{3}{4}$ *при* $d(v_6) \leq 10$*;*

(e2) $\sigma(S_5) \geq \frac{3}{4}$, *когда* $d(v_6) \geq 11$, *а* v_6 *не является* 11_{bad}*-вершиной;*

(e3) $\sigma(S_5) \geq \frac{1}{2}$, *когда* v_6 *является* 11_{bad}*-вершиной;*

(f) $\sigma(S_6) \geq \frac{1}{2}$*;*

(g) $\sigma(S_p) \geq \frac{3}{4}$ *при всех* $p \geq 7$.

Доказательство. (A) При $p = 1$ утверждение $\sigma(S_1) = \frac{3}{4}$ прямо следует из просмотра правил R1–R5.

Замечание 6. Пусть $p \geq 2$.

(a) Если $d(f_1) \geq 4$, то f_1 не является ни острой, ни особой и может забирать не более $\frac{1}{4}$ от v по R3–R5 (фактически $\frac{1}{4}$ может отдаваться через f_1 лишь по R3c1). Поэтому такого вида S_p имеет $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma(S_p) \geq \frac{3}{4}$ при всех $p \geq 3$, что верно и для грани f_p.

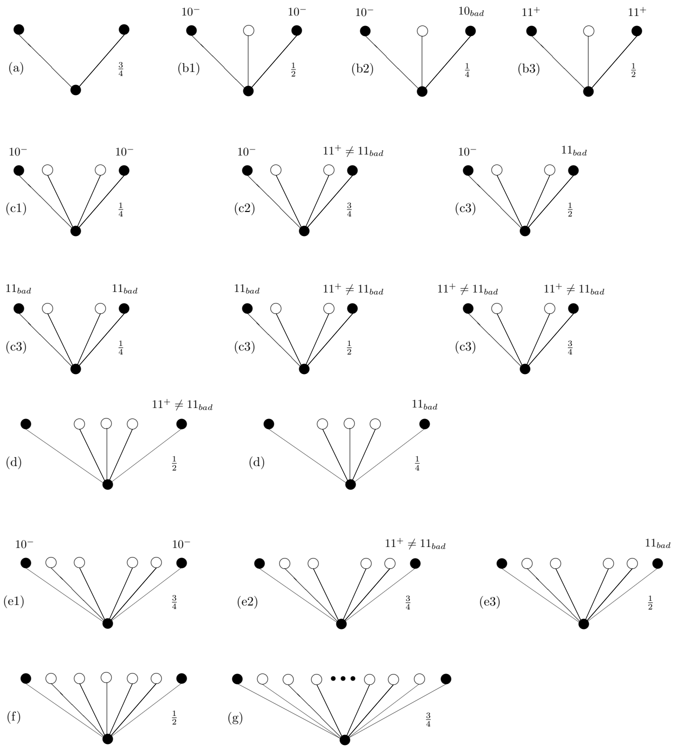

Рис. 6. Получатели и минимальные доходы от них согласно лемме 10.

(b) Если $d(f_1) = 3$, то f_1 уводит $\frac{3}{4}$ от v только по R3a1, R3b2, R3c1 и R3c3 при $d(v_2) = 3$, либо по R4ex1a или R5ex1a при условии, что $4 \leq d(v_2) \leq 5$, v_1 является 11_{bad}-вершиной, а $d(f_2) \geq 4$; в остальных случаях f_1 уводит $\frac{1}{2}$ от v.

(B) При доказательстве леммы 10(b) можно считать ввиду замечания 6(a), что $d(f_1) = d(f_2) = 3$, так как иначе доказывать уже нечего.

Теперь если $d(v_3) \leq 10$ (а значит, $d(v_1) \leq 10$ в соответствии с принятым ранее допущением), как в п. (b1), то v посылает не более $\frac{1}{2}$ вершине v_2 через каждую из граней f_1, f_2 согласно R3b1, R4a и R5a, откуда следует требуемое $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$.

Далее пусть $d(v_1) \leq 10$, а v_3 является 11_{bad}-вершиной, как в (b2). Отметим, что $d(v_3) \neq 3$, поскольку иначе v_2 инцидентна 4^+-грани, не являющейся ни острой, ни особой, вопреки определению вершины v_3. Поэтому v посылает не более $\frac{1}{2}$ через каждую из 3-граней f_1 и f_2, а этого достаточно.

Наконец, пусть $d(v_1) \geq 11$ (так что и $d(v_3) \geq 11$). Теперь v по-прежнему отдает $\frac{1}{2}$ через каждую из 3-граней f_1, f_2 по одному из правил R3a2, R3b3, R4a или R5a, поскольку R4ex1a и R5ex1a неприменимы здесь, а значит, такой S_2 тоже имеет $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$.

Замечание 7. При $p \geq 3$ ввиду замечания 6(a) можно считать, что $d(f_1) = d(f_p) = 3$, поскольку иначе уже имеем $\sigma(v) \geq \frac{3}{4}$. Посмотрим, сколько заряда может быть послано через f_2.

(a) Если $d(f_2) \geq 4$, то грань f_2 проводит согласно R3c1 не более $\frac{1}{4}$ при $p \geq 4$ и не более $2 \times \frac{1}{4}$ при $p = 3$; кроме того, острая или особая грань f_2 проводит $\frac{1}{2}$ по R4b, R4c и R5b, если к ней не применяются исключения из этих правил.

(b) Если $d(f_2) = 3$, то $4 \le d(v_2) \le 5$, а значит, ввиду R4a и R5a, грань f_1 проводит заряд $\frac{1}{2}$, тогда как f_2 проводит не более $\frac{1}{2}$.

(C) Обратимся к доказательству леммы 10(c). Если $d(f_2) = 3$, то $d(v_2) \ne 3 \ne d(v_3)$ и по меньшей мере одна из v_2, v_3 является 5-вершиной, поэтому v посылает не более $\frac{1}{2}$ через каждую из граней f_1, f_2, f_3 согласно R4a и R5a, что дает $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{4}$. Итак, далее можно считать, что $d(f_2) \ge 4$.

Сначала пусть $d(v_4) \le 10$. Если $d(v_2) \ne 3$, то v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_1 и не более $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ через f_2, что объяснялось в замечаниях 6 и 7, откуда $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{4}$, как и требуется в лемме 10(c1). Из-за симметрии можно считать, что $d(v_2) = d(v_3) = 3$. Ввиду R4ex3c вершина v посылает не более $2 \times \frac{1}{4}$ через f_2, откуда снова следует $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{4}$.

Далее предположим, что $d(v_1) \le 10$ и $d(v_4) \ge 11$. Если $d(v_2) \ne 3$, то v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_1 и не более $\frac{1}{2}$ через f_2, поскольку исключение R3c1 не применимо к v_3. Если вершина v_4 не является 11_{bad}, то v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_3 по R3c2 или R4a, откуда $\sigma(S_3) \ge \frac{3}{4}$, как в лемме 10(c2). В случае 11_{bad}-вершины v_4 получаем требуемое условие $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $d(v_2) = 3$. Правила R4b и R5b здесь не применимы к f_2 ввиду исключений R4ex1b, R4ex3c и R5ex2b, поэтому v посылает через f_2 лишь $\frac{1}{4}$ вершине v_2 по R3c1. Через грань f_3 наша вершина v посылает $\frac{1}{2}$ по R3c2, R4a, и R5a, когда v_4 не является 11_{bad}-вершиной, а иначе не более $\frac{3}{4}$, что дает оценки $\sigma(S_3) \ge \frac{3}{4}$ либо $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{2}$ соответственно, требуемые в лемме 10(c2).

Наконец, пусть $d(v_1) \ge 11$ (как помним, $d(v_4) \ge d(v_1)$). Теперь v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_2, так как R3c1 неприменимо. Через f_1 вершина v посылает $\frac{1}{2}$, когда v_1 не является 11_{bad}. По симметрии это же верно для граней f_3 и v_4. Отсюда $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{4}$, когда и v_1, и v_4 являются 11_{bad}-вершинами, $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{2}$, когда в точности одна из v_1 и v_4 является таковой, либо $\sigma(S_3) \ge \frac{3}{4}$, когда ни одна из вершин v_1 и v_4 не является 11_{bad} соответственно, что и утверждается в лемме 10(c3).

(D) Предположим, что $d(v_5) \ge 11$; тогда v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_3. Через f_4 вершина v посылает не более $\frac{1}{2}$, когда v_1 не является 11_{bad}-вершиной. Это приводит к тому, что $\sigma(S_4) \ge \frac{1}{2}$, когда v_5 не является 11_{bad}-вершиной, либо $\sigma(S_4) \ge \frac{1}{4}$ в противном случае, что и утверждается в лемме 10(d).

(E) Заметим, что грань f_3 проводит не более $\frac{1}{2}$. Ввиду замечания 7 можно считать, что $d(f_1) = 3$ и $d(f_5) = 3$. Если $d(f_2) = 3$, то каждая из граней f_1, f_2 приносит доход не менее $\frac{1}{4}$, поэтому все грани f_1, f_2, f_3 вместе уже дают требуемый доход $\frac{3}{4}$. Так что можно принять по симметрии, что $d(f_2) \ge 4$ и $d(f_4) \ge 4$.

Если $d(f_3) = 3$, то $d(v_3) \ge 4$ и $d(v_4) \ge 4$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Ввиду симметрии будем считать, что $d(v_3) = 5$. Если и $d(v_3) = 5$, то f_3 не проводит зарядов и уже нечего доказывать. Так что пусть далее $d(v_3) = 4$. Ввиду ранее сделанных предположений грань f_2 является особой, а значит, подчиняется правилу R5ex3b. Тогда f_2 может проводить лишь $\frac{1}{4}$ по R3c1, откуда $\sigma(f_2) \ge \frac{1}{2}$. Стало быть, f_2, f_3 вместе дают требуемый доход $\frac{3}{4}$.

Далее можно считать, что каждая из граней f_2, f_3, f_4 острая либо особая. Здесь наше доказательство разветвляется на подслучаи.

Сначала пусть $d(v_6) \le 10$ (а значит, $d(v_1) \le 10$), т. е. рассмотрим утверждение леммы 10(e1).

Ввиду исключений R4ex1b и R5ex1b уже нечего доказывать при $d(v_3) = d(v_4) = 3$, поскольку тогда $\sigma(f_3) = \frac{3}{4}$, поэтому можно с учетом симметрии считать, что $4 \le d(v_3) \le 5$ и $d(v_4) = 3$. Если $d(v_5) \ge 4$, то каждая из граней f_4, f_5 также приносит доход не менее $\frac{1}{4}$, откуда $\sigma(S_5) \ge \frac{3}{4}$. Остается допустить, что $d(v_5) = 3$, т. е. $f_4 = v_4vv_5z$, где $d(z) = 4$ согласно замечанию 1(b). Благодаря правилу R4ex1b грань f_4 дает доход $\frac{1}{2}$, поэтому снова $\sigma(S_5) \ge \frac{3}{4}$.

Наконец, пусть $d(v_6) \ge 11$; тогда v получает доход $\frac{1}{4}$ от каждой из граней f_3, f_4. Если вершина v_6 не является 11_{bad}, то v экономит $\frac{1}{4}$ также и на грани f_5. Отсюда получаются доходы $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ вершины v, заявленные в лемме 10(e2) и лемме 10(e3) соответственно.

(F) Поскольку v получает доход $\frac{1}{4}$ от каждой из граней f_3, f_4, имеем $\sigma(S_6) \ge \frac{1}{2}$, что и требовалось.

(G) При $p \ge 7$ вершина v экономит $\frac{1}{4}$ на каждой из граней f_3, f_4, f_5, откуда $\sigma(S_p) \ge \frac{3}{4}$, чем и завершается доказательство леммы 10. □

Следствие 11. *$\sigma(S_{2k-1}) \ge \frac{1}{4}$ при любых $k \ge 1$.* □

Следствие 12. *Если v имеет одного или не менее двух 11_{bad}-соседей, то $\sigma(v) \ge \frac{1}{2}$ или $\sigma(v) \ge \frac{3}{4}$ соответственно.*

Доказательство. Ввиду следствия 11 достаточно проверить по формулировке леммы 10, что если v_{2k+1} является 11_{bad}-вершиной, то $\sigma(S_{2k}) \ge \frac{1}{4}$ при любых $k \ge 1$. □

Подслучай 6.1. $d(v) = 23$. Поскольку вершина v имеет не менее одного нечетного получателя, а тот приносит ей доход не менее $\frac{1}{4}$ согласно следствию 11, то $\mu'(v) \ge 23 - 6 - \frac{1}{2} - (23-1) \times \frac{3}{4} = 0$, что и требовалось.

Подслучай 6.2. $d(v) = 22$. Число получателей S_{2k-1} с $k \ge 1$ четно. Если число S_{2k-1} не менее двух, то $\mu'(v) \ge 16 - 2 \times \frac{1}{2} - 20 \times \frac{3}{4} = 0$ согласно следствию 11, поэтому пусть далее v не имеет получателей S_{2k-1}.

Наличие получателя S_p с $\sigma(S_p) \ge \frac{1}{2}$ уже влечет $\mu'(v) \ge 16 + \frac{1}{2} - 22 \times \frac{3}{4} = 0$, поэтому можно далее считать согласно лемме 10 в сочетании со следствием 12, что окружение вершины v не содержит 11_{bad}-вершин и состоит лишь из 2-получателей S_2 с $d(v_1) \le 10$ и $d(v_3) \ge 11$, а также 4-получателей S_4 с $d(v_1) \le 10$ и $d(v_5) \le 10$.

Тогда 2-получателей S_2 при v можно разбить на пары, составляющие блоки из четырех граней, ограниченные 10^--вершинами, а каждый S_4 сам является таким блоком. Однако последнее невозможно ввиду неделимости 22 на 4, т. е. снова получаем $\mu'(v) \ge 0$.

Подслучай 6.3. $d(v) = 21$. Число получателей вида S_{2k-1} нечетно. Если v имеет не менее трех нечетных получателей S_{2k-1}, то $\mu'(v) \ge 15 + 3 \times \frac{1}{4} - 21 \times \frac{3}{4} = 0$ согласно следствию 11, поэтому остается предположить, что у вершины v есть в точности один получатель S_{2k-1}.

Если $k = 1$ или $k \ge 4$, то этот S_{2k-1} уже дает требуемый доход $\frac{3}{4}$ по лемме 10, поэтому наше дальнейшее доказательство разбивается на варианты $k = 2$ и $k = 3$.

Подслучай 6.3.1. Единственный нечетный получатель при v есть S_3.

Сначала пусть $d(v_1) \le 10$ и $d(v_4) \le 10$. Здесь $\sigma(S_3) \ge \frac{1}{4}$ по лемме 10(c1), поэтому остается собрать суммарный доход не менее $\frac{1}{2}$ с 18 граней при v, не входящих в S_3. Это можно сделать в точности так же, как в подслучае 6.2, поскольку 18 не делится на 4.

Теперь пусть $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_4) \geq 11$. Если вершина v_4 не является 11_{bad}, то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(c2), и уже нечего доказывать. В противном случае имеем $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$ по лемме 10(c2), а четный получатель $v_4v_5\ldots$ приносит вершине v доход не менее $\frac{1}{4}$ согласно следствию 12, но этого достаточно.

Наконец, пусть $d(v_1) \geq 11$ и $d(v_4) \geq 11$. Если ни v_1 ни v_4 не является 11_{bad}-вершиной, то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(c3), что и требовалось. Если лишь v_4 является 11_{bad}, то $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$, а получатель $v_4v_5\ldots$ приносит $\frac{1}{4}$ по следствию 12, так что снова $\mu'(v) \geq 0$.

Остается предположить, что v_1 и v_4 являются 11_{bad}-вершинами. Тогда S_3 и два смежных с ним получателя приносят доход не менее чем по $\frac{1}{4}$ по следствию 12, откуда $\mu'(v) \geq 0$.

Подслучай 6.3.2. Единственный нечетный получатель при v есть S_5. Если $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_6) \leq 10$, то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(e1), что и требовалось доказать.

Поэтому пусть далее $d(v_6) \geq 11$. Если v_6 не является 11_{bad}-вершиной, то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(e2). Остается предположить, что v_6 есть 11_{bad}-вершина, откуда $\sigma(S_5) \geq \frac{1}{2}$ по лемме 10(e3). Поскольку v также имеет доход не менее $\frac{1}{4}$ согласно следствию 12 от соседнего с S_5 получателя $v_6v_7\ldots$, то и теперь $\mu'(v) \geq 0$.

Итак, доказано, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, а значит, вытекающее из (1) противоречие $-12 \geq 0$ завершает доказательство теоремы 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinitz E.* Polyeder und Raumeinteilungen // Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), 3AB. 1922. V. 12. P. 1–139.
2. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
3. *Borodin O.V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
4. *Plummer M. D., Toft B.* Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11. P. 507–515.
5. *Ore O., Plummer M. D.* Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics. New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
6. *Бородин О. В.* Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.
7. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.
8. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Describing faces in plane triangulations // Discrete Math. 2014. V. 319. P. 47–61.
9. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing faces in 3-polytopes with no vertices of degree from 5 to 7 // Discrete Math. 2019. V. 342, N 11. P. 3208–3215.
10. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–31.
11. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 5. С. 9–12.
12. *Grünbaum B.* Polytopal graphs // Studies in graph theory. MAA Studies in Mathematics. 1975. V. 12. P. 201–224.
13. *Plummer M. D.* On the cyclic connectivity of planar graphs // Graph theory and applications. Proceedings of the Conference at Western Michigan University. 1972. V. 303. P. 235–242.
14. *Kotzig A.* Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.
15. *Бородин О. В.* Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.

16. *Borodin O. V.* Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.

17. *Августинович С. В., Бородин О. В.* Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.

18. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Low edges in 3-polytopes // Discrete Math. 2015. V. 338, N 12. P. 2234–2241.

19. *Horňák M., Jendrol' S.* Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.

20. *Бородин О. В., Вудал Д. Р.* Вес граней в плоских картах // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 5. С. 648–657.

21. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Высота граней 3-многогранников // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 48–55.

22. *Borodin O. V., Bykov M. A., Ivanova A. O.* More about the height of faces in 3-polytopes // Discuss. Mat. Graph Theory. 2018. V. 38, N 2. P. 443–453.

23. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Low minor faces in 3-polytopes // Discrete Math. 2018. V. 341, N 12. P. 3415–3424.

24. *Бородин О. В., Лопарев Д. В.* Высота младших граней в плоских нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 6–17.

25. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Высота малых граней в 3-многогранниках без треугольников // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 982–988.

26. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane — a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.

27. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* New results about the structure of plane graphs: a survey // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1907, N 1. P. 030051.

28. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge- degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44, N 4. P. 261–295.

29. *Jendrol' S.* Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.

30. *Бородин О. В.* Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.

31. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* The height of edge in 3-polytope // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2014. V. 11. P. 457–463.

32. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs Combin. 1999. V. 15. P. 267–277.

33. *Ferencová B., Madaras T.* On the structure of polyhedral graphs with prescribed edge and dual edge weight // Acta Univ. M. Belii Math. 2005. V. 12. P. 13–18.

34. *Ferencová B., Madaras T.* Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.

35. *Kotzig A.* Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1995. V. 5. P. 101–113.

36. *Madaras T., Škrekovski R.* Heavy paths, light stars, and big melons // Discrete Math. 2004. V. 286. P. 115–131.

Поступила в редакцию 31 августа 2020 г.
После доработки 14 ноября 2020 г.
Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Бородин Олег Вениаминович, Иванова Анна Олеговна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`brdnoleg@math.nsc.ru`, `shmgnanna@mail.ru`