А. П. Киселев, Распространение гауссовых пучков вдоль ребра клина, *Письма в ЖТФ*, 1984, том 10, выпуск 22, 1377–1381

Письма в ЖТФ, том 10, вып. 22 26 ноября 1984 г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ ВДОЛЬ РЕБРА КЛИНА

А.П. Киселев

В заметке строятся асимптотические решения уравнения

$$(\Delta + k^2)\, u = 0, \tag{1}$$

соответствующие колебаниям, бегущим вдоль ребра клина произвольного раствора и быстро убывающим при удалении от ребра. На больших расстояниях вдоль ребра, где рассмотрения, основанные на методе параболического уравнения, непригодны, поле описывается сферическими волнами.

1. Пусть ρ, φ, z – полярные координаты. Будем рассматривать (1) внутри клина: $0<\rho<+\infty$, $-\infty<z<+\infty$, $0<\varphi<\Phi$, где $0<\Phi\leqslant 2\pi$ – его раствор. На гранях клина пусть выполнены условия

$$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\Phi} = 0 \tag{2а}$$

или

$$u_\varphi|_{\varphi=0} = u_\varphi|_{\varphi=\Phi} = 0. \tag{2б}$$

Дополним (1) и (2) условие Мейкснера – требованием локальной интегрируемости $|\nabla u|^2$.

Асимптотическое решение ищем в виде

$$u = \exp(ikz)\, w, \tag{3}$$

предполагая, в соответствии с методом параболического уравнения [1], что

$$|w_{zz}| \ll |2ikw_z|. \tag{4}$$

Получившееся приближенное уравнение

$$\Delta_\perp W + 2ikW_z = 0, \quad \Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \tag{5}$$

дополним условиями $W=0$ (или $W_\varphi=0$) при $\varphi=0$, $\varphi=\Phi$, и условием Мейкснера.

Хорошо известно [1] экспоненциально убывающее при $\rho\to\infty$ решение уравнения (5) во всем пространстве, называемое нулевой модой гауссова пучка

$$G(\rho,\zeta)=\zeta^{-1}a\cdot exp(ik\rho^2/2\zeta),\quad \zeta=z-ia. \tag{6}$$

Константа $a>0$ характеризует ширину пучка.

Будем искать решения задачи для (5) в виде

$$W=G(\rho,\zeta)\Psi(\rho/\zeta;\gamma)\,H(\varphi;\gamma),\quad \gamma=const, \tag{7}$$

где $H=\sin\gamma\varphi$ или $H=\cos\gamma\varphi$.

Из (5)-(7) следует уравнение

$$t^2\Psi_{tt}+t\Psi_t-\gamma^2\Psi=0,\quad t=\frac{\rho}{\zeta}.$$

Отсюда $\Psi=t^{\pm\gamma}$ для $\gamma\neq0$, и $\Psi=const+\ln t$, если $\gamma=0$. Используя граничные условия и условие Мейкснера, приходим к решениям (5) вида

$$W=G(\rho,\zeta)\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^{\frac{m\pi}{\Phi}}\sin\frac{m\pi\varphi}{\Phi},\quad m=1,2,\ldots, \tag{8a}$$

$$W=G(\rho,\zeta)\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^{\frac{m\pi}{\Phi}}\cos\frac{m\pi\varphi}{\Phi},\quad m=0,1,2,\ldots \tag{8б}$$

для (2а) и (2б) соответственно. Функции (8а) и (8б), очевидно, экспоненциально убывают при $\rho\to\infty$ в любом сечении клина $z=const$.

Дифференцируя (8) по параметру a, можно получить для каждого m бесконечный набор новых решений с аналогичными свойствами.

Область, где решения (8) представляют интерес, должна содержать лишь такие z, чтобы выражение

$$Re\left(\frac{ik\rho^2}{2\zeta}\right)=-\frac{1}{2}ka\frac{\rho^2}{z^2+a^2}, \tag{9}$$

определяющее экспоненциальный спад поля в сечении, принимало как конечные, так и большие значения.

2. Подстановка (8) в (4) дает для ограниченных z/a следующие условия применимости построенных выражений:

$$ka\gg1,\quad \rho\ll a. \tag{10}$$

Следовательно, наши рассмотрения, имеющие асимптотический характер при $ka\to\infty$, справедливы лишь в малой окрестности ребра.

Уточним область пригодности метода параболического уравнения путем рассмотрения высших приближений для w в (3). Пусть

$$w = W^{(0)} + \frac{1}{ka} W^{(1)} + \frac{1}{(ka)^2} W^{(2)} + \ldots, \quad W^{(0)} \equiv W, \tag{11}$$

причем $W^{(j)} = W^{(j)}(\xi, \eta, s)$, $\xi = \sqrt{ka}\,\frac{x}{a}$, $\eta = \sqrt{ka}\,\frac{y}{a}$, $s = \frac{\zeta}{a}$.
Тогда

$$(\Delta'_\perp + 2i\,\partial/\partial s) W^{(j)} = -W_{ss}^{(j-1)}, \quad j \geqslant 1, \tag{12}$$

$\Delta'_\perp = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2$; граничные условия те же, что и для u.

Разыскивая решения (12) в виде

$$W^{(j)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^j \left\{ \psi^{(j)}(T, s) W^{(0)} \right\}, \quad T = \sqrt{ka}\,\frac{\rho}{\zeta}, \tag{13}$$

получаем, что $\left\{ s^{-2}\left(T^{-1}\partial/\partial T\, T\,\partial/\partial T - \gamma^2 T^{-2}\right) + 2i\,\partial/\partial s \right\} \psi^{(j)} = -\psi^{(j-1)}$.
Для $j = 1$ правая часть равна -1, и функцию $\psi^{(1)}$ можно выбрать не зависящей от T: $\psi^{(1)} = const - \frac{s}{2i}$. Легко показать, что $\psi^{(j)}$ можно найти в виде полинома степени j относительно s.
Отсюда следует оценка

$$W^{(j)} = O\left(s^j T^{4j} W^{(0)}\right).$$

Благодаря ей, условие асимптотичности ряда (11)

$$\left| W^{(j)} \right| \ll \frac{1}{ka} \left| W^{(j+1)} \right|, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

сводится к критерию пригодности френелевского приближения

$$\frac{\rho}{a} \ll (ka)^{-1/4} |\zeta|^{3/4}. \tag{14}$$

При этом величина (9) достигает больших значений лишь если

$$|z|/a \ll ka. \tag{15}$$

Отметим, что условия (14) и (15) не следуют из неравенства (4) для $w = W^{(0)}$. Поэтому (4) не является, вопреки распространенному (см., например, [1]) мнению, критерием применимости метода параболического уравнения.

3. При $z \to \pm\infty$ будем искать поле в виде сферических волн, соответственно, приходящих и уходящих

$$u=\frac{exp(\pm ikR)}{kR}\left\{f_0^{\pm}+\frac{f_1^{\pm}}{kR}+\cdots\right\},\quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{16}$$

где $f_n^{\pm}=f_n^{\pm}(\vartheta,\varphi;ka)$, а ϑ – угол между радиусом-вектором и осью z.

Нетрудно видеть, что для $\frac{z}{a}\to\pm\infty$, но $\frac{|z|}{a}\ll ka$

$$R\approx\pm\left(z+\frac{\rho^2}{2z}\right),\quad \frac{\rho}{z}\approx\frac{\pi}{2}\pm\left(\vartheta-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$G\approx\pm a\,\frac{exp(\pm ikR)}{R}\,exp\left(-\frac{1}{2}ka\tau_{\pm}^2\right), \tag{17}$$

$$\tau_+=\vartheta,\quad \tau_-=\pi-\vartheta.$$

Сравнивая (17) с (6)-(9), получаем:

$$f_0^{\pm}\approx\pm ka(\tau_{\pm})^{\frac{m\pi}{\Phi}}\,exp\left(-\frac{1}{2}ka\tau_{\pm}^2\right)H\left(\varphi;\frac{m\pi}{\Phi}\right). \tag{18}$$

Выражения (18), имеющие погрешность $\left(1+O((ka)^{-1})\right)$, можно уточнить, если привлечь высшие приближения $W^{(1)}, W^{(2)},\ldots$.

Рассмотрения 2 и 3 пригодны и для пучков в свободном пространстве.

4. В случае однородной среды, ограниченной поверхностью с ребром, проведенные построения возможны лишь если ребро прямолинейно.[1] Колебания, сосредоточенные вблизи криволинейного ребра, имеют существенно иной характер [2].

5. Построения п. 1 нетрудно повторить для клина с идеальными условиями в электродинамике и для упругого клина со свободными (или жестко защемленными) гранями. Возникающие в последнем случае решения соответствуют распространению колебаний с продольной, либо с поперечной скоростью, поляризованных (в нулевом приближении) соответственно, продольно или поперечно. Вопрос о возможности построения высших приближений (именно, об удовлетворении граничным условиям с точностью до произвольной степени $(ka)^{-1}$) для теории упругости и электродинамики остается пока открытым.

Литература

[1] Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1970, 475 с.

[1] В неоднородной среде для прибреберного распространения гауссова пучка необходимо, чтобы ребро было геометрооптическим лучом.

[2] К и с е л е в А.П. Прибереберные волны. – Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, № 5, с. 276-279.

Поступило в Редакцию
29 мая 1984 г.

Письма в ЖТФ, том 10, вып. 22 26 ноября 1984 г.

СОЛИТОНЫ В РАСТВОРЕ He^3-He^4

И.В. И о ф ф е

Работа посвящена возможности существования солитонов огибающих в растворе He^3-He^4 и нового вида солитонов на поверхности раствора, при наличии градиента температуры нормального к поверхности раствора. В последнем случае возможно изменение скорости солитона внешними условиями. Автор не знает работ на эту тему. Ограничимся раствором низкой концентрации $C \ll 1$, когда магнитная проницаемость раствора равна

$$\mu = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi\rho m^2 C}{3MT} \quad (1)$$

(ρ – плотность, T – температура в энергетических единицах, M – масса атома He^3, m – ядерный магнетон). В магнитном поле H стрикционная сила [1]

$$\frac{\rho}{8\pi}\nabla\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right) - \frac{H^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\nabla T + \frac{\partial\mu}{\partial C}\nabla C\right). \quad (2)$$

Учет ∇C приводит при $\nabla T=0$ к малой перенормировке скоростей $s_{1,2}$ первого и второго звуков. Используем обычную систему уравнений, описывающую гидродинамику раствора He^3-He^4 с учетом магнитострикции и зависимости термодинамических величин от магнитного поля [2]. Линеаризуем систему по малым отклонениям концентрации, температуры и давления C', T', P' от равновесных значений и положим малые величины зависящими от $\eta = x - wt$. Пусть распространяется электромагнитная волна вида

$$H = A(\eta)\exp\left[i\varphi(\eta) + ikx - i\omega t\right]$$
$$kA \gg \frac{\partial A}{\partial x},\ k\varphi \gg \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \omega A \gg \frac{\partial A}{\partial t},\ \omega\varphi \gg \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (3)$$

Из линеаризованной системы найдем