ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 12 (79)

УДК 513.0

Ф. С. Насрулаев

О СВЯЗНОСТИ ПОЛНОЙ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ СО ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ

§ 1. Введение

Целью настоящей работы является доказательство теоремы 3 (см. с. 67).

Для случая, когда F принадлежит классу C^2, этот результат был установлен ранее А. Л. Вернером [1]. Если требовать только принадлежность поверхности классу C^1, то доказательство А. Л. Вернера не проходит в первоначальной форме. Доказательство основного утверждения проводится другим методом (§ 4).

Ниже вводится ряд понятий и обозначений, которые согласованы с обозначениями работы [1].

Пусть полная во внутреннем смысле, незамкнутая гладкая (класса C^1) поверхность F есть погружение в трехмерное евклидово пространство R^3 двумерного полного метрического многообразия Φ. Будем считать, что в R^3 введены декартовы координаты x, y, z с началом в точке $O=(0, 0, 0)$ и поверхность F задана на Φ непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\bar{r}(u)=\{x(u), y(u), z(u)\}$, где u — точка на Φ. Сферическое изображение множества $M\subset F$ на фиксированной единичной сфере S с центром в точке O обозначим через M^*. В частности, $F^*(u)$ — сферическое изображение точки $F(u)$ — образа точки $u\in\Phi$ на поверхности F. Через Γ^* обозначим множество пар диаметрально противоположных точек на S, из которых хотя бы одна является пределом точек сходящихся последовательностей $F^*(u_n)$, где последовательности u_n расходятся на Φ (в смысле определенной на Φ метрики). Далее, через $\alpha(u)$ обозначим наименьший из углов, который образует касательная плоскость в точке $F(u)$ с плоскостью $P(h): z=h$. Множества $\Lambda(h)=\{u\in\Phi,\ z(u)=h\}$ будем называть множествами уровня поверхности F. Пусть, наконец, $\Phi^+(h)=\{u\in\Phi,\ z(u)>h\}$.

§ 2. О строении плоских сечений полных гладких поверхностей

Нам понадобится

Лемма 1 [1]. *Пусть F — полная гладкая поверхность, G_0 — не ограниченная на F компонента множества $\Phi^+(h_0)$, а область G — часть области G_0, также не ограниченная на Φ. Пусть g — граница G и множество $g\cap G_0$ ограничено на Φ.*

Тогда, если $\sup\limits_{u\in G} z(u)=h_1<+\infty$, *то* $\inf\limits_{u\in G}\alpha(u)=0$.

Из леммы 1 следует, что если $\inf\limits_{u\in G} \alpha(u) = \alpha_0 > 0$, то $\sup\limits_{u\in G} z(u) = +\infty$.

Лемма 2. *Пусть F — полная гладкая поверхность, а G — компонента множества $\Phi^+(h_0)$, для которой $\inf\limits_{u\in G} \alpha(u) = \alpha_0 > 0$.*

Тогда ее граница g состоит из одной простой кривой, и все множества $g(h) = G \cap \Delta(h)$, $h > h_0$, гомеоморфны этой кривой.

Доказательство. Каждая компонента $\gamma(h)$ множества $g(h)$, $h \geqslant h_0$, является простой кривой. Это следует из теоремы о неявной функции, поскольку везде в области G угол $\alpha(u) \neq 0$. Поэтому любая компонента множества $g(h)$, $h \geqslant h_0$, будет или простой замкнутой кривой, или бесконечной в обе стороны кривой (в смысле метрики μ поверхности F). Опишем конструкцию, с помощью которой будем сопоставлять простой кривой γ_0-компоненте множества g, $h = h_0$, компоненту $\gamma(h)$ множества $g(h)$, $h > h_0$. Для этого мы рассмотрим одно специальное семейство кривых.

Пусть $u = u(t)$ — параметрическое уравнение кривой γ_0. Через каждую точку $u(t) \in \gamma_0$ проведем во внутрь G линии $\rho(t)$, образы которых $R(t)$ на F ортогональны к образам линий уровня $\gamma(h)$. Такие кривые $\rho(t)$ будем называть линиями градиента. Если функция $z(u)$ — аппликата точки $F(u)$ на поверхности F, то дифференциальное уравнение линий градиента в некоторой локальной системе координат $(u_1, u_2) \in \Phi$ имеет вид:

$$\frac{du_1}{du_2} = -\frac{Fz_2 - Gz_1}{Ez_2 - Fz_1}, \tag{1}$$

где $z_1 = \frac{\partial z}{\partial u_1}$, $z_2 = \frac{\partial z}{\partial u_2}$, а E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности в точке $u = (u_1, u_2)$. Поскольку правая часть уравнения (1) есть лишь непрерывная функция, то, по теореме Пеано, через каждую точку $u(t) \in \gamma_0$ может проходить целое семейство линий градиента $\rho(t)$, образующих так называемую интегральную воронку, причем среди линий градиента из данной воронки существует самая левая и самая правая [2].

Пусть $u = \varphi_t(s)$ — внутреннее уравнение кривой $R(t)$, причем s — естественный параметр на $R(t)$, отсчитываемый от кривой $L(h_0)$ — образа кривой γ_0 на F. Так как вдоль образов линий градиента имеет место равенство

$$dz = \sin\alpha(u)\, ds \tag{2}$$

и $\sin\alpha(u) \geqslant \sin\alpha_0 > 0$, то функция $z(\varphi_t(s))$ строго монотонная. Поэтому линия градиента $\rho(t)$, исходя из точки $u(t) \in \gamma_0$, уходит на бесконечность в смысле метрики μ, и $\lim\limits_{s\to+\infty} z(\varphi_t(s)) = +\infty$. Следовательно, любую кривую $R(t)$ плоскость $P(h): z = h$, $h > h_0$, пересекает лишь в одной точке $F(h, t)$. Поэтому множество точек $F(h, t)$, принадлежащих образу $V(t)$ каждой интегральной воронки при $h = \text{const} > h_0$, образует простую дугу $M(h, t)$, являющуюся замкнутым множеством, заключенным между образами самой левой и самой правой линий градиента. В частности, $M(h, t)$ может быть одной точкой, когда самая левая и самая правая линии градиента совпадают.

Через $\psi(h)$ обозначим прообраз в Φ множества $\{M(h, t)\}$, где t пробегает всю область задания кривой $\gamma_0: u = u(t)$. Компоненту множества $g(h)$, которой принадлежит прообраз $m(h, t_0)$ множества $M(h, t_0)$ при некотором фиксированном $t = t_0$, обозначим через $\gamma(h)$. Покажем, что и при любом t, пробегающем область задания кривой

$\gamma_0 : u = u(t)$, все множества $m(h, t)$ принадлежат кривой $\gamma(h)$. Поскольку линии градиента сходятся к линиям градиента, а предел самых левых (самых правых) линий градиента не левее (не правее) самой левой (самой правой) линии градиента, исходящей из предельной точки $u(t_0)$, то

$$\overline{\lim_{t \to t_0}} m(h, t) \subset m(h, t_0). \tag{3}$$

Отсюда и из того, что в окрестности любой своей точки $g(h)$ является простой дугой, следует наше последнее утверждение.

Пусть $m(h, t_1) \cap m(h, t_2) = 0$, где, для определенности, положим $t_1 < t_2$. Покажем, что вся открытая дуга $\chi \subset \gamma(h)$, лежащая между $m(h, t_1)$ и $m(h, t_2)$, принадлежит множеству $\psi(h)$.

Возьмем произвольную точку $a \in \lambda$. Линия градиента, исходящая из точки a в направлении убывания h (которая найдется как решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями), не может пересечь ни интегральную воронку с началом в точке $u(t_1)$, ни воронку с началом в точке $u(t_2)$, так как в противном случае нашлась бы линия градиента правее (левее) самой правой (левой) в первой (второй) воронке. Поскольку вдоль образа $R(t)$ линии градиента $\rho(t)$, исходящей из точки a, функция $z(\varphi_t(s))$ будет строго монотонно убывающей, то кривая $R(t)$ пересечет плоскость $P(h_0) : z = h_0$ в некоторой точке $F(u_0)$, а следовательно, $\rho(t)$ пересечет кривую γ_0 в некоторой точке $u(t_0)$ — прообразе точки $F(u_0)$ на Φ, причем $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Далее утверждается, что множество $\psi(h)$ совпадает с компонентой $\gamma(h)$. Множество $\psi(h)$ открыто на $\gamma(h)$. Это следует из последнего доказанного утверждения и открытости кривой γ_0. Если γ_0 — замкнутая кривая, то из соотношения (3) следует, что множество $\psi(h)$ замкнуто, а так как оно и открыто, то $\psi(h) = \gamma(h)$. Допустим теперь, что γ_0 — бесконечная кривая и $\psi(h) \neq \gamma(h)$. Тогда, как следует из доказанного выше, $\psi(h)$ будет на $\gamma(h)$ множеством, ограниченным хотя бы с одной из сторон.

Пусть точка a — граничная точка множества $\psi(h)$ при $u(t) \to +\infty$ на γ_0, причем точка $a \overline{\in} \psi(h)$. Для определенности положим, что множества $m(h, t)$ при $u(t) \to +\infty$ расположены на $\gamma(h)$ справа от точки a. Тогда при $u(t) \to +\infty$ концы самых левых линий градиента будут сходиться к точке a, а поскольку при этом длина кривой $\gamma_0 : u = u(t)$ стремится к бесконечности, то и длины дуг самых левых линий градиента между кривыми γ_0 и $\gamma(h)$, начиная с некоторого $t \in (t_0, +\infty)$, будут сколь угодно большими. Отсюда следует, что изменение функции $z(u)$ вдоль указанных дуг, ввиду соотношения (2), также будет сколь угодно большим. Но, с другой стороны, изменение функции $z(u)$ между образами $L(h_0)$ и $L(h)$ кривых γ_0 и $\gamma(h)$ не более разности $(h - h_0)$. Полученное противоречие опровергает наше допущение, что $\psi(h) \neq \gamma(h)$. Итак, $\psi(h) = \gamma(h)$.

Как видно из проведенного выше доказательства, замкнутой компоненте γ_0 соответствует компактная, а потому замкнутая компонента $\gamma(h)$, а бесконечной компоненте γ_0 — бесконечная компонента $\gamma(h)$. Таким образом, все $\gamma(h)$, $h \geqslant h_0$, гомеоморфны γ_0. В случае единственности линий градиента этот гомеоморфизм устанавливается соответствующими линиями градиента. Укажем некоторый конкретный гомеоморфизм и в нашем случае.

Выберем вершины воронок на γ_0 так, чтобы при достаточно малой разности $(h - h_0)$ линии градиента $\rho(t)$, ограничивающие

соседние интегральные воронки, не пересекались в области ω, заключенной между кривыми γ_0 и $\gamma(h)$. Это можно сделать, так как для длин дуг линий градиента, заключенных между γ_0 и $\gamma(h)$, в метрике μ имеем равномерную по всей области ω оценку: $s \leqslant (h-h_0)\operatorname{cosec}\alpha_0$, вытекающую из равенства (2).

Взяв же соседние вершины на расстоянии (в метрике μ), большем чем $2(h-h_0)\operatorname{cosec}\alpha_0$, получим искомую последовательность вершин. Ставя в соответствие друг другу дуги на γ_0 и $\gamma(h)$, заключенные, например, между самыми левыми линиями градиента соседних воронок, исходящих из точек построенной последовательности вершин, устанавливаем гомеоморфизм между кривыми γ_0 и $\gamma(h)$.

Поскольку все кривые $\gamma(h)$ будут или замкнуты или уйдут на бесконечность на Φ в обе стороны, то совокупность $\{\gamma(h)\}$ при $h \geqslant h_0$ образует компоненту множества $\Phi^+(h_0)$. А это значит, что $\{\gamma(h)\} = G$, т. е. G имеет единственную граничную кривую γ_0. Лемма доказана.

Замечание. Как видно из доказательства, мы установили больше, чем утверждалось в теореме, а именно гомотопность кривых $\gamma(h)$, $h \geqslant h_0$.

§ 3. Зависимость числа касательных плоскостей в пучке от числа уходов на бесконечность линий уровня

Пусть F_0 — регулярная замкнутая поверхность и все касательные плоскости к F_0 из некоторого пучка Π параллельных плоскостей касаются F_0 в точках ненулевой гауссовой кривизны, причем p — число эллиптических, а q — число гиперболических точек касания на F_0. Тогда, как известно [3], имеет место формула Кронекера: $p-q=\chi(F_0)$, где $\chi(F_0)$ — эйлерова характеристика поверхности F_0. Условие регулярности поверхности F_0 можно ослабить. А именно, имеет место

Теорема 1. *Пусть F_0 — замкнутая гладкая поверхность и все касат льные плоскости к F_0 из некоторого пучка Π параллельных плоскостей касаются F_0 лишь в эллиптических и гиперболических (в смысле А. В. Погорелова [4]) точках.*

Тогда точек касания — конечное число, и если p — число эллиптических, а q — число гиперболических точек касания, то

$$p-q=\chi(F_0). \tag{4}$$

Доказательство. Сначала докажем конечность числа точек касания. Допустим противное. Тогда, ввиду компактности F_0, из бесконечного множества точек касания можно выделить сходящуюся последовательность, предельная точка которой окажется нерегулярной (в смысле А. В. Погорелова [4]). Это противоречие и опровергает наше допущение.

Перейдем теперь к доказательству равенства (3). Идея доказательства состоит в применении к специально построенной сети на F_0 формулы Эйлера $\alpha^0-\alpha^1+\alpha^2=\chi(F_0)$, где α^0 — число вершин, α^1 — число ребер, α^2 — число граней сети. Опишем строение этой сети. Для простоты будем полагать, что ось oz направлена перпендикулярно к плоскостям нашего пучка Π. За вершины сети примем p эллиптических и q гиперболических точек касания. Ввиду выбора направления оси oz в них, $\alpha(u)=0$.

Множества $L(h)=P(h)\cap F_0$, где $P(h)$ — касательные к F_0 плоскости из пучка П, в силу теоремы Н. В. Ефимова [5] о строении линий уровня в окрестности регулярной точки гладкой поверхности, состоят из точек и замкнутых кривых, которые касаются друг друга в гиперболических точках, а также из замкнутых кривых, не содержащих точек касания. Компоненты $L(h)$, на которых имеются точки касания, войдут в строящуюся сеть. Кривые $L(h)$ разбивают поверхность на некоторые области Ω_i, которые, вообще говоря, не гомеоморфны кругу.

Покажем, что области Ω_i, заключенные между соответствующими ветвями кривых $L(h)$ при $-\infty < h < +\infty$, являются топологическими цилиндрами. Поясним, что такое соответствующие ветви кривых $L(h_i)$ и $L(h_{i+1})$, $h_{i+1} > h_i$ в гиперболических точках $q_i \in L(h_i)$ и $q_{i+1} \in L(h_{i+1})$ (предполагается, что других точек касания между $P(h_i)$ и $P(h_{i+1})$ нет).

Рассмотрим плоскости P_1^i и P_2^i, а также P_1^{i+1} и P_2^{i+1}, параллельные и сколь угодно близкие соответственно к $P(h_i)$ и $P(h_{i+1})$. Пусть плоскость P_1^{i+1} расположена ниже $P(h_{i+1})$, а плоскость P_2^i — выше плоскости $P(h_i)$. Для плоских сечений $P_1^{i+1}\cap F_0$ и $P_2^i\cap F_0$ соответствие между компонентами устанавливается так же, как и в лемме 2, а затем, устремляя P_1^{i+1} к $P(h_{i+1})$, а P_2^i к $P(h_i)$, переносим это соответствие и на ветви кривых $L(h_{i+1})$ и $L(h_i)$. Для области, заключенной между соответствующими компонентами плоских сечений $P_1^{i+1}\cap F_0$ и $P_2^i\cap F_0$, наше утверждение (что она является топологическим цилиндром) прямо следует из замечания к лемме 2, поскольку в ней $\alpha(u)\neq 0$. Для областей же Ω_i, заключенных между соответствующими ветвями кривых $L(h_i)$ и $L(h_{i+1})$, это утверждение следует из сходимости линий уровня в окрестности регулярной точки гладкой поверхности при $P_2^i \to P(h_i)$ и $P_1^{i+1} \to P(h_{i+1})$ (см. упомянутую выше теорему Н. В. Ефимова).

Чтобы области Ω_i стали гомеоморфны кругу, а сеть стала связной, достаточно в каждом цилиндре Ω_i провести кривую $\tilde{L}_i$, соединяющую вершины ограничивающих данный цилиндр ветвей кривых $L(h_i)=P(h_i)\cap F_0$ и $L(h_{i+1})=P(h_{i+1})\cap F_0$, $h_{i+1}>h_i$. Если при этом компонента кривой $L(h_{i+1})$, ограничивающая область Ω_i с одной стороны, есть эллиптическая точка, то в области Ω_i проводим кривую $\tilde{L}_i$, которая соединяет какую-либо вершину на части кривой $L(h_i)$, ограничивающей Ω_i с другой стороны, с данной эллиптической точкой.

Ветви плоских сечений $P(h)\cap F_0$, сходящиеся в гиперболических точках, число которых равно $2q$ (следует из той же теоремы Н. В. Ефимова [5]) и кривые $\tilde{L}_i$, число которых равно числу областей Ω_i, будем называть ребрами построенной сети, а области Ω_i — ее гранями.

Теперь из формулы Эйлера, учитывая, что $\alpha^0=p+q$, а $\alpha^1=2q+\alpha^2$, непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть F — полная незамкнутая гладкая поверхность и сферическое изображение плоскостей из пучка* П *параллельных плоскостей не содержится в* Γ^* (см. § 1). *Пусть, далее, плоскости из* П *касаются F лишь в эллиптических и гиперболических* (в смысле А. В. Погорелова [4]) *точках.*

Тогда число таких точек касания конечно, а поверхность F конечносвязна. Множества $\Lambda(h)$ содержат одно и то же для всех h четное число $2m$ простых не ограниченных в одну сторону дуг.

И если p — число эллиптических, а q — гиперболических точек касания, то

$$p - q = \chi(F) - m. \tag{5}$$

Доказательство. В случае, когда поверхность F регулярная (класса C^2), доказательство теоремы основывается на формуле Кронекера и леммах 1 и 2 (§ 2) для регулярного случая (см. [1]). Поскольку эти результаты перенесены теперь и на рассматриваемые нами гладкие поверхности (доказательство леммы 1 не отличается от ее доказательства в регулярном случае), то доказательство теоремы 2 проводится дословным повторением доказательства соответствующей теоремы в регулярном случае с одним лишь изменением: вместо линий градиента мы будем пользоваться самыми левыми линиями градиента.

Поэтому доказательство теоремы 2 опускаем.

§ 4. Основная теорема

Следуя А. Л. Вернеру, полную ориентируемую седловую поверхность F со взаимно однозначным сферическим изображением будем называть простейшей гиперболической поверхностью.

Теорема 3. *Пусть F — простейшая незамкнутая гладкая гиперболическая поверхность без самопересечений. Тогда связность F не более двух, т. е. либо она гомеоморфна плоскости, либо круговому цилиндру.*

Доказательство. Ввиду взаимной однозначности сферического изображения поверхности F, ось oz можно выбрать так, чтобы она не пересекала Γ^*. Отсюда, вследствие теоремы 2, следует конечносвязность F. По этой же причине на F может быть в данном направлении не более двух гиперболических точек, в которых $\alpha(u) = 0$, т. е. $q \leqslant 2$. Точек других типов на F, по условию теоремы, нет.

Число компонент пересечения $P(h) \cap F$ не может быть более трех. Действительно, в противном случае при параллельном перемещении плоскости $P(h)$ из положения $h = +\infty$ в положение $h = -\infty$ хотя бы одна компонента не будет иметь касаний с другими компонентами, и, следовательно, нарушится связность поверхности F. Заметим при этом, что в одной точке касания $P(h)$ с F не могут касаться более двух компонент, так как это противоречило бы теореме Н. В. Ефимова [5] о строении линий уровня в окрестности регулярной гиперболической точки гладкой поверхности.

Из сказанного следует, что имеет место соотношение

$$q + 1 \geqslant m + m_0, \tag{6}$$

где m — число компонент, являющихся простыми дугами, уходящими на бесконечность в обе стороны, в сечениях, не проходящих через критические точки, а m_0 — число циклов в том же сечении. Как отмечалось в теореме 2, m — инвариант плоских сечений. Вместе с тем легко указать примеры, показывающие, что m_0 не инвариант плоских сечений $P(h) \cap F$. Для гиперболической поверхности формула (5) принимает вид

$$\chi(F) = m - q. \tag{7}$$

Рассмотрим возможные для $\chi(F)$ значения.

I. Пусть $q = 0$, тогда из (5) $1 \geqslant m + m_0$, и, следовательно, $m \leqslant 1$.

По формуле (6) имеем:

$$\chi(F)=\begin{cases}0 \text{ при } m=0,\\ 1 \text{ при } m=1.\end{cases}$$

II. $q=1,\ 2\geqslant m+m_0$.

а) $$\chi(F)=\begin{cases}0 \text{ при } m=1,\\ 1 \text{ при } m=2;\end{cases}$$ б) $\chi(F)=-1$ при $m=0$.

В случае б) для m_0 на разных уровнях возможны значения 0, 1 и 2.

III. $q=2,\ 3\geqslant m+m_0$.

а) $$\chi(F)=\begin{cases}0 \text{ при } m=2,\\ 1 \text{ при } m=3;\end{cases}$$ б) $\chi(F)=-1$ при $m=1$; в) $\chi(F)=-2$ при $m=0$.

В случае III б) и в) для m_0 на разных уровнях снова возможны значения 0, 1, 2 и 3.

Так как имеет место равенство $r(F)=2-\chi(F)$, где $r(F)$ — связность поверхности F, то случаи I, II а) и III а) удовлетворяют нашей теореме. Поэтому для доказательства теоремы достаточно исключить случаи II б), III б) и III в). Это удается сделать с помощью одной леммы из [1], формулировку которой мы приводим ниже.

Лемма 3. *Пусть множество предельных лучей $A(T, X)$ гиперболической трубки T имеет строго опорную плоскость Q, а g^* — граница сферического изображения выпуклого конуса $K(T)$ — имеет границы выпуклой оболочки множества $A(T, X)$.*

Тогда $g^*\subset\Gamma^*(T)$, и внутри нет точек множества F^*.

Здесь под предельным лучом гиперболической трубки T понимают предел, к которому стремятся лучи XX_n, где X – произвольная фиксированная точка, а $X_n\in T$, когда длины $XX_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Через $\Gamma^*(T)$ обозначена бесконечно удаленная часть границы сферического изображения трубки T, а через F^* — сферическое изображение поверхности F, содержащей T.

Продолжим доказательство теоремы. Во всех оставшихся случаях связность поверхности $r(F)\geqslant 3$. Поэтому в случаях II б) и III в) хотя бы две трубки T_1 и T_2 поверхности F окажутся по одну сторону от плоскости $P(h)$, которая будет строго опорной к множествам предельных лучей $A(T_1, X)$ и $A(T_2, X)$. Но тогда выпуклые кривые g_1^* и g_2^* — соответственно границы сферических изображений выпуклых конусов $K(T_1)$ и $K(T_2)$ (см. лемму 3) — будут иметь общие точки, а следовательно, и $\Gamma^*(T_1)\cap\Gamma^*(T_2)\neq 0$. Отсюда следует, что внутри кривых g_1^* и g_2^* имеются точки множества F^*, что противоречит второму утверждению леммы 3.

В случае же III б) трубки T_1 и T_2 могут лежать по разные стороны от касательных плоскостей $P(h_i)$, $i=1,\ 2$, к поверхности F в точках $F(u_i)$, $i=1,\ 2$, принадлежащих трубке T_3 (напомним, что в этом случае $m=1$). Тогда касательные плоскости $P(h_i)$ будут одновременно и строго опорными к множествам $A(T_1, X)$ и $A(T_2, X)$. Поэтому сферическое изображение каждой из точек $F^*(u_i)$, $i=1,\ 2$, будет лежать внутри одной из кривых g_i^*, $i=1,\ 2$ (g_i^* имеет тот же смысл, что и выше). Опять имеем противоречие со вторым утверждением леммы 3. Таким образом, случаи II б), III б) и III в) исключены, и теорема полностью доказана.

Резюмируя вышеизложенное, можно утверждать, что существуют лишь следующие типы простейших гиперболических гладких поверхностей:

А) $r(F)=1$ (например, гиперболический параболоид);

Б) $r(F)=2$; 1) F состоит из гиперболических чаши и рога; 2) F состоит из двух гиперболических чаш.

Замечание. Основная теорема остается верной, если допустить самопересечения, расположенные в компактной части на F. Но, по-видимому, и это условие является излишним. В предложениях §§ 2 и 3 условие отсутствия самопересечений не используется.

Рассмотренная задача была поставлена А. Л. Вернером. Считаю своим долгом выразить А. Л. Вернеру и Ю. Д. Бураго глубокую признательность за внимание к работе и ее обсуждение.

г. Ленинград

Поступило
2 VIII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Вернер А. Л. Топологическое строение и асимптотика некоторых полных поверхностей. Краткое содержание докл. II Всесоюзн. симпозиума по геометрии „в целом", 1967, с. 15—18.
2. Бокштейн М. Ф. Теоремы существования и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Учен. зап. МГУ, вып. 15, кн. 1, 1939, с. 3—72.
3. Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом. М., ИИЛ, 1947.
4. Погорелов А. В. Поверхности ограниченной внешней кривизны. Изд. Харьковск. ун-та, 1956.
5. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей „в малом". Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 30, 1949, с. 68—76.

Е. Л. РАБКИН. О ЧИСЛЕ ЭКСТРЕМУМОВ ПОЛИНОМОВ ПО СИСТЕМАМ ЧЕБЫШЕВА

(аннотация статьи, принятой к печати)

Доказывается, что если система из $n+1$ непрерывных функций образует систему Маркова, причем первая функция этой системы является тождественной константой, то любой полином по этой системе имеет не более $n-1$ экстремума; если же система из $n+1$ функций образует такую систему Чебышева, что константы являются полиномами по этой системе, то любой полином по этой системе имеет не более $2n-2$ экстремумов; как показывают примеры, обе эти оценки точные. Приведен пример системы Маркова (являющейся даже системой Декарта), полиномы по которой имеют бесконечное число экстремумов (разумеется, константы не являются полиномами по этой системе). Доказательство первого утверждения статьи проводится элементарными средствами, для доказательства второго используются результаты Рутмана [2]. (Работа поступила в журнал „Математика" 15.V. 1968.)

В. И. РОЗЕНБЕРГ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ХАНКЕЛЯ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Получены теоремы сложения модифицированных функций Бесселя $j_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{n+1/2}(z)$ и Ханкеля $h_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}H^{(1)}_{n+1/2}(z)$, где $J_{n+1/2}(z)$ и $H^{(1)}_{n+1/2}(z)$ — функции Бесселя и Ханкеля соответственно. (Работа поступила в журнал „Математика" 22.IV.1968.)