Б. З. Мороз, Аналитическое продолжение скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей и его применение, *Докл. АН СССР*, 1963, том 150, номер 4, 752–754

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. З. МОРОЗ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ РЯДОВ ГЕККЕ ДВУХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 I 1963)

1. В работах Гекке ([1]) вводятся так называемые характеры величины $\lambda(\alpha) = \alpha/|\alpha| = e^{i\arg\alpha}$, α — алгебраическое число. Гекке ставит и решает задачу об асимптотическом распределении простых чисел квадратичных полей в подобно расширяемых контурах. В дальнейшем эти исследования были продолжены и получены асимптотические формулы с остаточными членами в работах Г. Радемахера ([4]) и И. Кубилюса ([2]). Для решения этих задач рассматриваются Z-функции, введенные Гекке в работе ([1]).

Естественно возникает вопрос о распределении простых чисел нескольких квадратичных полей. Именно: пусть $K_1, K_2, \ldots, K_r$ — r мнимых квадратичных полей (для простоты предполагаемых одноклассными); будем сопоставлять числу $\alpha_l = x_l + iy_l \in K_l$ точку плоскости T_l с координатами (x_l, y_l). Требуется найти число таких систем $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r)$ простых чисел полей $K_1, K_2, \ldots, K_r$, что $N_{K_1/R}\mathfrak{p}_1 = N_{K_2/R}\mathfrak{p}_2 = \ldots = N_{K_r/R}\mathfrak{p}_r$ и образы $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ лежат в подобно расширяемых контурах $D_1^{(t)}, D_2^{(t)}, \ldots, D_r^{(t)}$ (t — коэффициент подобия). В случае многоклассных полей вместо простых чисел надлежит рассматривать идеальные простые числа (см. Гекке ([1])). Эта задача связана с вопросом об аналитическом продолжении скалярного произведения рядов Гекке:

$$Z(s; \lambda_1^{l_1}, \ldots, \lambda_r^{l_r}) = \sum_{N_{K_1/R}\alpha_1 = \ldots = N_{K_r/R}\alpha_r} \frac{\lambda_1^{l_1}(\alpha_1)\ldots\lambda_r^{l_r}(\alpha_r)}{(N_{K_1/R}\ \alpha_1)^{rs}},$$

где суммирование распространяется на все целые числа $\alpha_1 \in K_1, \ldots, \alpha_r \in K_r$. Такая постановка задачи принадлежит Ю. В. Линнику.

В настоящей заметке рассматривается этот вопрос для двух квадратичных полей $K_1 = R(\sqrt{-1})$ и $K_2 = R(\sqrt{-3})$ (R — поле рациональных чисел). Рассмотрение любой другой пары мнимых одноклассных квадратичных полей аналогично. Приводим основные результаты.

Теорема 1. *Число пар простых чисел* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ $(\mathfrak{p} \in R(\sqrt{-1})$; $\mathfrak{q} \in R(\sqrt{-3}))$ *в области* $\varphi_1 \leqslant \arg\ \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2$, $\tilde{\varphi}_1 \leqslant \arg\ \mathfrak{q} \leqslant \tilde{\varphi}_2$, $N_{K_1/R}\mathfrak{p} = N_{K_2/R}\ \mathfrak{q} \leqslant X$, *равно*

$$\left(\frac{6}{\pi^2}\right)\int_2^X \frac{du}{\log u}(\varphi_2 - \varphi_1)(\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1) + O\left(Xe^{-c_1\sqrt{\log X}}\right).$$

Теорема 2. *Пусть* D_1: $r_1 = f_1(\varphi_1)$ *и* D_2: $r_2 = f_2(\varphi_2)$ — *два гладких замкнутых контура на плоскостях* $T_1 = \{(x, y)\}$, $T_2 = \{(z, t)\}$ $((r_i, \varphi_i)$ — *полярные координаты на* T_1 *и* T_2). *Пусть* $C_1^{(t)}$ *и* $C_2^{(t)}$ — *контуры, подобные* C_1 *и* C_2 (*центр подобия начало координат, коэффициент подобия* t); $Q_1^{(t)}$ *и* $Q_2^{(t)}$ — *области, ограниченные* $C_1^{(t)}$ *и* $C_2^{(t)}$. *Тогда число пар простых чисел*

$(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ $(\mathfrak{p} \in R(\sqrt{-1});\ \mathfrak{q} \in R(\sqrt{-3}))$ *таких, что* $\mathfrak{p} \in Q_2^{(t)}$, $\mathfrak{q} \in Q_2^{(t)}$, $N_{K_1/R}\mathfrak{p} = N_{K_2/R}\mathfrak{q}$, *равно*

$$\left(\frac{6}{\pi^2}\right)\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \min\{f_1^2(\varphi_1), f_2^2(\varphi_2)\}\, d\varphi_1 d\varphi_2\right)\frac{t^2}{\log t} + O\left(\frac{t^2}{\log^2 t}\right).$$

Основным шагом к доказательству этих теорем является следующая лемма, представляющая, по-видимому, и некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Положим* $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$; *число целых точек на поверхности* $f(x) = 0$ *в области* $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$; $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{x_2}{x_1} \leqslant \operatorname{tg}(\varphi + \Delta_1)$; $\operatorname{tg}\tilde{\varphi} \leqslant \frac{x_4}{x_3} \leqslant \operatorname{tg}(\varphi + \Delta_2)$; $x_1^2 + x_2^2 \leqslant X$ *при условии* $\Delta_1 > X^{-1/250}$, $\Delta_2 > X^{-1/250}$ *равно*

$$N^X_{\varphi_1, \varphi_2}(\Delta_1, \Delta_2) = CX\Delta_1\Delta_2\left(\frac{6}{\pi^2}\right) + O\left(X^{1-1/500}\right),$$

где $C = \lim\limits_{X\to\infty} \frac{N^{(X)}}{X}$, $N^{(X)}$ — *число точек на поверхности* $f(x) = 0$ *в области* $x_1^2 + x_2^2 \leqslant X$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$, $0 \leqslant x_4/x_3 \leqslant \sqrt{3}$.

В п. 2 мы покажем, каким образом из леммы 1 с помощью аналитического продолжения скалярного произведения рядов Гекке могут быть доказаны теоремы, а в п. 3 мы наметим план доказательства леммы 1.

2. Пусть $\alpha \in K_1 = R(\sqrt{-1})$; $\beta \in K_2 = R(\sqrt{-3})$. Назовем характерами величины функции $\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|} = e^{i \arg \alpha}$, $\mu(\beta) = \frac{\beta}{|\beta|} = e^{\arg \beta}$, и пусть $Z(s, \lambda^{4n}) = \sum\limits_{\alpha \in K_1} \frac{\lambda^{4n}(\alpha)}{(N_{K_1/R}\alpha)^s}$ и $Z(s, \mu^{6m}) = \sum\limits_{\beta \in K_2} \frac{\mu^{6m}(\beta)}{(N_{K_2/R}(\beta))^s}$ (суммирование ведется по целым числам $\alpha \in K_1$, $\beta \in K_2$, лежащим в областях $0 \leqslant \arg\alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \arg\beta \leqslant \pi/3$). Эти функции впервые введены и исследованы Гекке в ([1]).

Рассмотрим скалярное произведение рядов Гекке:

$$Z(s, \lambda^{4m}, \mu^{6m}) = \sum_{N_{K_1/R}\alpha = N_{K_2/R}\beta} \frac{\lambda^{4n}(\alpha)\mu^{6m}(\beta)}{(N_{K_1/R}\alpha)^{2s}} =$$

$$= \prod_{p \not\equiv 1 \pmod{12}} \left(1 - \frac{1}{p^{4s}}\right)^{-1} \cdot \prod_{N_{K_1/R}\mathfrak{p} = N_{K_2/R}\mathfrak{q}} \left(1 - \frac{\lambda^{4n}(\mathfrak{p})\mu^{6m}(\mathfrak{q})}{(N_{K_1/R}\mathfrak{q})^{2s}}\right)^{-1}$$

(где сумма распространяется на все целые, а произведение — на все простые числа области $0 \leqslant \arg\alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \arg\beta \leqslant \pi/3$, p — простое натуральное число). Из леммы 1 непосредственно вытекает, что $Z(s, \lambda^{4n}, \mu^{6m})$ — функция, аналитическая при $\operatorname{Re} s > 1/2 - 1/3000$, $nm \neq 0$.

В самом деле,

$$A_X = \sum_{N_{K_1/R}\alpha = N_{K_2/R}\beta \leqslant X} \lambda^{4n}(\alpha)\mu^{6m}(\beta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{\pi}{2}X^{1/1500}]} \sum_{l=0}^{[\frac{\pi}{3}X^{1/1500}]} e^{4nikX^{-1/1500} + 6milX^{-1/1500}} N_{kX^{-1/1500},\, lX^{-1/1500}}\left(X^{-1/1500}, X^{-1/1500}\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{k,l} N_{kX^{-1/1500},\, lX^{-1/1500}}\left(X^{-1/1500}, X^{-1/1500}\right)\cdot\left|1 - e^{iX^{-1/1500}(4n+6m)}\right|\right) =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/3} e^{4ni\varphi + 6mi\tilde{\varphi}}\, d\varphi\, d\tilde{\varphi}\cdot CX + O\left(X^{1/500}\right) + O\left(X^{1-1/750}X^{1/750 - 1/1500}\right) = O\left(X^{1-1/1500}\right).$$

$$Z(s, \lambda^{4u}, \mu^{6m}) = \sum_{N_{K_1/R}\alpha = N_{K_2/R}\beta} \frac{\lambda^{4n}(\alpha)\,\mu^{6m}(\beta)}{(N_{K_1/R}\alpha)^{2s}} =$$

$$= \sum_{X=1}^{\infty} \frac{A_X - A_{X-1}}{X^{2s}} = \sum_{X=1}^{\infty} A_X \left(\frac{1}{X^{2s}} - \frac{1}{(X+1)^{2s}}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{X=1}^{\infty} A_X \frac{2s}{X^{2s+1}}\right) = O\left(\sum_{X=1}^{\infty} \frac{1}{X^{2s+1/1500}}\right),$$

где последний ряд сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s > 1/2 - 1/3000$.

Аналогично нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *В области* $1/2 - 1/3000 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 2$

$$|Z(s, \lambda^{4n}, \mu^{6m})| < c_2 (1 + |n| + |m|)^2 (1 + |t|),$$

где $t = \operatorname{Im} s$.

Отсюда, как обычно (см., например, ([2])), получается лемма 3.

Лемма 3. *Существуют такие постоянные* $c_5, c_3, c_4 > 1$, *что* $Z(s, \lambda^{4n}, \mu^{6m})$ *не имеет нулей в области*

$$\operatorname{Re} s \geqslant \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{c_3 \log(1 + |n| + |m|) \log(1 + |t|)}, & |t| \geqslant c_5, \\ 1 - \dfrac{1}{c_4 \log(1 + |n| + |m|)(1 + c_5)}, & |t| \leqslant c_5. \end{cases}$$

Теперь теорема 1 получается с помощью одной леммы И. М. Виноградова так же, как теорема 9 в работе ([2]). Теорема 2 — простое следствие теоремы 1.

3. Для доказательства леммы 1 применяется метод Харди — Литтльвуда и обобщение леммы И. М. Виноградова о разложении в ряд Фурье сглаженных характеристических функций множества (замечание 9, гл. III, § 4 монографии ([3])).

Вначале получается асимптотическая формула

$$\sum_{f(x)=0} e^{-\nu g(x) + 2\pi i (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4)} =$$

$$= K \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\nu}\left(\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{4-t} + \frac{\lambda_3^2 + \frac{1}{3}\lambda_4^2}{t}\right)\right)}{t(4-t)}\, dt \right) +$$

$$+ O\left(\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{3}{4} + \frac{11}{2}\eta + \varepsilon}\right),$$

где $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2} \leqslant \nu^{1/2 - \eta}$; $\varepsilon > 0$; $\nu \to 0$,

$$K = \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\chi_{12}(q)\,\varphi(q)}{q^2}, \qquad \chi_{12}(q) = \begin{cases} 1, & q \equiv \pm 1 \pmod{12}; \\ -1, & q \equiv \pm 5 \pmod{12}; \\ 0, & (q, 12) \neq 1; \end{cases}$$

$\varphi(q)$ — функция Эйлера; $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2$.

План вывода этой формулы такой же, как и план доказательства теоремы 1, § 3, гл. III монографии ([3]). Отсюда лемма 1 получается способом, сходным с доказательством теоремы 3, § 4, гл. III упомянутой монографии.

В заключение выражаю благодарность Ю. В. Линнику и А. В. Малышеву за ряд полезных замечаний, сделанных по ходу решения этой задачи.

Поступило
2 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Hecke, Math. Zs., 1, 357 (1918); 6, 11 (1920). [2] И. П. Кубилюс, Уч. зап. ЛГУ, 19, 40 (1950). [3] А. В. Малышев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 65 (1962). [4] H. Rademacher, Math. Ann., 111, 209 (1935).