Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. М. Логинов, Средняя скорость стохастически ускоренной заряженной частицы, *Письма в ЖТФ*, 1992, том 18, выпуск 7, 63–66

https://www.mathnet.ru/pjtf4259

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
17 мая 2025 г., 22:31:48

Письма в ЖТФ, том 18, вып. 7 12 апреля 1992 г.
01
© 1992

# СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИ УСКОРЕННОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

В.М. Логинов

Эффект стохастического разгона заряженных частиц флуктуациями электрических и магнитных полей является одним из ярких физических примеров трансформации хаотических форм движений в направленные. Изучение подобной организации движений в системе заряженная частица+флуктуирующее электромагнитное поле проводилось в рамках различных моделей и представлений (см., например, [1, 2]). Многие важные вопросы были изучены в рамках одномерной модели [3–5], в частности, известный механизм стохастического ускорения Ферми.

В данном сообщении в рамках одномерной модели анализируется динамика стохастического ускорения частицы массы $m$ и заряда $q$ в случайно-неоднородном электрическом поле $E(x)$, моделируемым гауссовским шумом с произвольным законом спада корреляций. Показано, что „эволюция" средней скорости происходит аналогично процессу изменения температурного поля в полуограниченном стержне, один конец которого поддерживается при заданной температуре. При этом в качестве временной переменной выступает координата, связанная с коррелятором поля, а пространственной – кинетическая энергия частицы на входе в слой стохастической среды. Проведено также рассмотрение частиц, захваченных флуктуациями поля и определена граница области запрета для проникновения частицы в стохастический слой.

Выражение для скорости $V(x)$ частицы в точке $x$, отвечающее отдельным реализациям случайного поля $E(x)$, имеет вид

$$V(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\varepsilon + q\int_0^x E(y)dy\right)}, \tag{1}$$

где $\varepsilon = \frac{mv_0^2}{2}$ – кинетическая энергия частицы в точке $x=0$, рассматриваемой в качестве границы стохастического слоя (т. е. слоя $x > 0$, занятого флуктуирующим полем $E(x)$). Примем, что среднее $\langle E(x)\rangle = 0$ и автокорреляционная функция поля $k(|x-y|) = \langle E(x)E(y)\rangle$ произвольна и зависит лишь от разности аргументов. Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций гауссова поля $E(x)$.

П р о л е т н ы е   ч а с т и ц ы. Будем называть пролетными те частицы, у которых скорость задается выражением

$$v(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\varepsilon+q\int_0^x E(y)dy\right)\theta\left(\varepsilon+q\int_0^x E(y)dy\right)}\quad, \qquad (2)$$

где $\theta(z)=\begin{cases}1, & z>0\\ 0, & z<0\end{cases}$. Определим среднюю скорость пролетной частицы. Для этого воспользуемся результатом работы [6], в которой было выведено уравнение движения для среднего от некоторой функции $\Phi=\Phi\left(z+\alpha\int_0^x E(y)dy\right)$ по гауссовой мере процесса $E$, где $z$ – переменная, статистически несвязанная с $E$, $\alpha$ – параметр. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\Psi(x,z)}{\partial x}=\alpha^2 D(X)\,\frac{\partial^2\Psi(x,z)}{\partial z^2}, \qquad (3)$$

где обозначено $\Psi(x,\ z)=\langle\Phi\rangle$ и

$$D(x)=\int_0^x dy\int_0^y k(y-y_1)dy_1 .$$

Среднее $\Psi(x,\ z)$ в пространстве переменных $(x,\ z)$ задает некоторый диффузионный процесс. При этом существенно, что коэффициент диффузии $D(x)$ является переменным, зависит от „времени" $x$ и непосредственно определяется видом корреляционной функции поля $E(x)$. Легко видеть, что скорость частицы, определяемая зависимостью (2), относится к классу функции $\Phi$. Поэтому эволюция средней скорости описывается уравнением (3), где следует положить $z=\varepsilon$ и $\alpha=q$. Это уравнение еще более упрощается и сводится к уравнению диффузии с постоянными коэффициентами при введении новой „временной" координаты $\tau=\tau(x)=D(x)$.

Выпишем явный вид начальных (при $\tau=0$) и граничных (при $\varepsilon=0$) условий для средней скорости частицы

$$\langle v(0,\varepsilon)\rangle=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\varepsilon}\quad \langle v(x,0)\rangle=\pm\sqrt{\frac{|q|}{\pi m}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt[4]{\tau},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Если трактовать переменные $\tau$ и $\varepsilon$ соответственно как время и пространственную координаты, то рассматриваемая задача совпадает с задачей о распространении тепла в полуограниченном стержне, один конец которого поддерживается при фиксированной температуре (закон изменения „температуры" определяется зависимостью $\langle v(\tau,\ 0)\rangle$). Решение такой задачи хорошо известно. Используя явный вид начальных и граничных условий (4), получаем

$$\langle v(\tau,\varepsilon)\rangle = \pm\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2q\sqrt{2m\tau}}\varepsilon^{3/2}exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8q^2\tau}\right)\left[I_{-1/4}\left(-\frac{\varepsilon^2}{8q^2\tau}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+I_{3/4}\left(-\frac{\varepsilon^2}{8q^2\tau}\right)\right]+\frac{2\sqrt{|q|}}{\pi\sqrt{m}}\Gamma(3/4)\int\limits_{\varepsilon/2q\sqrt{\tau}}^{\infty}\times \tag{5}$$

$$\left.\times\left(\tau+\frac{\varepsilon^2}{4q^2\xi^2}\right)^{1/4}exp(-\xi^2)\,d\xi\right),$$

где $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Выражение (5) является точным и полностью решает задачу об изменении средней скорости пролетной частицы в зависимости от интенсивности флуктуаций электрического поля $E$ и параметров и формы его спектральной функции (напомним, что $\tau=D(x)=\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y k(y-y_1)dy_1$).

Будем интересоваться величиной средней скорости, которую набирает частица на больших дистанциях. Рассмотрим простейший случай, когда поле $E(x)$ является гауссовским белым шумом с коррелятором $k(|x-y|)=2D_0\delta(x-y)$. Это ведет, как легко видеть, к линейной зависимости от $x$ переменной $\tau$, $\tau=D_0x$. Из (5) при $\varepsilon^2\ll 8q^2D_0x$ получаем

$$|\langle v(x,\varepsilon)\rangle|\approx\sqrt{\frac{|q|}{m}}\sqrt[4]{D_0x}\,. \tag{6}$$

Таким образом, с ростом дистанции, проходимой частицей в поле гауссовского белого шума, ее средняя скорость растет как $x^{1/4}$. Частица ускоряется флуктуациями поля.

З а х в а ч е н н ы е   ч а с т и ц ы. Этому случаю отвечает отрицательное значение подкоренного выражения в (2). Возникает область запрета для проникновения частицы. Граница $x_{cr}$ этой области определяется из равенства нулю, стоящего под знаком корня выражения и является решением следующего уравнения: $\varepsilon^2=2q^2D(x_{cr})$. Применительно к модели гауссовского белого шума имеем $D(x_{cr})=D_0x_{cr}$. Отсюда граница области запрета определяется простой зависимостью

$$x_{cr}=\frac{\varepsilon^2}{2q^2D_0}\,. \tag{7}$$

Видно, что глубина проникновения частицы в область флуктуирующего поля тем больше, чем больше кинетическая энергия частицы на входе в слой и меньше интенсивность флуктуаций поля и заряд частицы $q$. В общем случае, произвольной спектральной зависимости флуктуаций, уравнение для $x_{cr}$ является трансцендентным.

В заключение отметим, что из выражения (2) следует также, что характер функциональной зависимости от случайного поля $E(x)$

сохраняется и для любых одноточечных моментов скорости частицы $\langle v^k(x) \rangle$ , $k=2, 3, \ldots$ . Следовательно, их эволюция в пространстве фазовых переменных ($\tau$, $\varepsilon$) также описывается уравнением вида (3). При этом отличие в поведении моментов обусловливается различием их начальных и граничных условий.

## Список литературы


[1] Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. М.: Атомиздат, 1971. С. 423.

[2] Топтыгин И.Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М.: Наука, 1983. С. 302.

[3] Grappin R.F. // Physica. 1977.V.88A.P.434-45(

[4] Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. С. 376.

[5] Loginov V.M. // Physica Scripta. 1989. V. 40. P. 449-450.

[6] Логинов В.М. // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 4. С. 186-188.



Поступило в Редакцию
30 декабря 1991 г.