П. П. Кулиш, Квантовые группы, q-осцилляторы и ковариантные алгебры, *ТМФ*, 1993, том 94, номер 2, 193–199

√

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 94, № 2
февраль, 1993

©1993г. П. П. Кулиш

КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ, q-ОСЦИЛЛЯТОРЫ И КОВАРИАНТНЫЕ АЛГЕБРЫ

На примерах простейших q-деформированных объектов (квантовые группы и алгебры, q-осцилляторы и комодуль–алгебры) обсуждается физическая интерпретация основных понятий теории квантовых групп: копроизведения, представления и копредставления, действия и кодействия. Показано, что редукция ковариантной алгебры квантовых тензоров второго ранга включает алгебры q-осциллятора и квантовой сферы. Специальный случай ковариантной алгебры соответствует группе кос в пространстве с нетривиальной топологией.

Памяти Михаила Константиновича Поливанова

Формализм квантового метода обратной задачи (R-матричный подход), использованный в [1] для формулировки теории квантовых групп и алгебр Ли, способствовал значительному росту внимания к этим новым математическим объектам и их использования физиками-теоретиками. Были даны убедительные примеры описания свойств симметрии физических моделей с помощью квантовых групп и алгебр (см., например, [2–6]) как в привычном контексте, когда гамильтониан модели H коммутирует с генераторами X_i квантовой алгебры: $[H, X_i] = 0$, так и в более сложной ситуации конформной теории поля. Квантовые группы и алгебры служат основой и для новых подходов к возможной структуре пространства-времени на малых расстояниях (см. [7, 8]), позволяя естественно определять квантовые однородные пространства.

Однако, несмотря на интенсивное развитие математической теории квантовых групп (см. [9]) физическая интерпретация целого ряда утверждений в этой области заслуживает, на наш взгляд, большего внимания. Как всегда в таких случаях обсуждение легче всего проводить на простых примерах. В качестве таковых мы ограничимся хорошо известными: квантовой группой $F_q(GL(2))$, квантовой алгеброй $sl_q(2)$, q-деформированным осциллятором и новым примером [10] простейшей квантовой алгебры A, порожденной уравнением отражения и ковариантной по отношению к квантовой группе $F_q(GL(2))$. Обсуждать же мы будем такие понятия как копроизведение, представления и копредставления, действие и кодействие.

Квантовая группа $F_q(GL(2))$ как ассоциативная алгебра порождается четырьмя генераторами a, b, c, d, удовлетворяющими соотношениям

$$(1)\qquad \begin{aligned} &ab = qba, \qquad ac = qca, \qquad [a, d] = \omega bc, \\ &bd = qdb, \qquad cd = qdc, \qquad [b, c] = 0, \end{aligned}$$

где q – комплексный параметр деформации, $\omega = q - q^{-1}$. Соотношения (1) определяют умножение в алгебре F_q. Их можно записать в компактной форме [1], используя 2×2-матрицу T

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

и 4×4-матрицу R с диагональю $(q, 1, 1, q)$ и единственным отличным от нуля элементом под диагональю $R_{21,12} = \omega$,

$$RT_1T_2 = T_2T_1R, \tag{3}$$

где $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$. Строки и столбцы R-матрицы в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ нумеруются парой индексов 11, 12, 21, 22. Как математический объект F_q является алгеброй Хопфа, что означает наличие еще трех операций наряду с умножением μ [1]: копроизведения $\Delta\colon F_q \to F_q \otimes F_q$, антипода $s\colon F_q \to F_q$ и коединицы $\varepsilon\colon F_q \to \mathbb{C}$. Эти три отображения определяются на генераторах и распространяются на всю алгебру F_q из требования, что Δ и ε – гомоморфизмы, а s – антигомоморфизм ($s(a,b) = s(b)s(a)$). Их также удобно записывать в матричной форме:

$$\begin{aligned} &\Delta(T) = T(\otimes)T, &\quad &\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}, \\ &s(T)T = Ts(T) = I, &\quad &\varepsilon(T) = I, \end{aligned} \tag{4}$$

где, как и выше, I – единичная матрица 2×2. Операции μ, Δ, ε, s связаны между собой рядом аксиом [1], справедливость которых почти очевидна в R-матричном подходе.

Квантовая алгебра $sl_q(2)$ порождается тремя генераторами J, X_+, X_-, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[J, X_\pm] = \pm X_\pm, \qquad [X_+, X_-] = \frac{q^{2J} - q^{-2J}}{q - q^{-1}} = [2J]_q, \tag{5}$$

где введено обозначение $[x]_q = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$. Дополнительные три отображения, определяющие структуру (квазитреугольной [11]) алгебры Хопфа, задаются соотношениями

$$\begin{aligned} &\Delta J = J \otimes 1 + 1 \otimes J, &\quad &\Delta(X_\pm) = X_\pm \otimes q^{-J} + q^J \otimes X_\pm, \\ &s(J) = -J, &\quad &s(X_\pm) = -q^{\mp 1} X_\pm, \\ &\varepsilon(J) = \varepsilon(X_\pm) = 0, &\quad &\varepsilon(1) = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Соотношения (5), (6) также можно записать в R-матричной форме, используя верхне- и нижне-треугольные матрицы $L^\pm$ [1, 12].

Ассоциативная алгебра $A(q)$ деформированного осциллятора определяется еще проще, поскольку она порождается, как и $sl_q(2)$, тремя генераторами α, α^+, N, удовлетворяющими соотношениям

$$[N, \alpha] = -\alpha, \qquad [N, \alpha^+] = \alpha^+, \qquad [\alpha, \alpha^+] = q^{-2N}, \tag{7}$$

а структура алгебры Хопфа для нее неизвестна.

Наконец, ассоциативная алгебра A, связанная с уравнением отражения [10], порождается четырьмя генераторами α, β, γ, δ, удовлетворяющими квадратичным соотношениям ($\omega = q - q^{-1}$)

$$\begin{array}{lll} [\alpha,\beta] = \omega\alpha\gamma, & \alpha\gamma = q^2\gamma\alpha, & [\alpha,\delta] = \omega(q\beta+\gamma)\gamma, \\ [\beta,\gamma] = 0, & [\beta,\delta] = \omega\gamma\delta, & \gamma\delta = q^2\delta\gamma. \end{array} \tag{8}$$

Структура алгебры Хопфа для нее также неизвестна.

R-матричная запись (8) использует 2×2-матрицу K из генераторов α, β, γ, δ и R-матрицу квантовой группы $F_q(GL(2))$ (3)

$$RK_1R^{t_1}K_2 = K_2R^{t_1}K_1R, \tag{9}$$

где R^{t_1} – матрица, транспонированная по первому пространству в $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$. Следовательно, диагональ в R^{t_1} та же, что и в R, а единственный ненулевой недиагональный элемент ω находится в правом верхнем углу.

Если использовать приведенные выше алгебры в качестве алгебр наблюдаемых, то необходимо ввести в них вещественную структуру ($*$-операцию). Например, из $sl_q(2,\mathbb{C})$ получают $su_q(2)$, $su_q(1,1)$, $sl_q(2,\mathbb{R})$ с подходящими ограничениями на параметр деформации ($q\in\mathbb{R}$, $|q|=1$). Однако на вопросе вещественных форм мы в этой работе останавливаться не будем.

Основная цель работы – отметить тесные связи этих алгебр, некоторые из которых хорошо известны, например двойственность $sl_q(2)$ и $F_q(SL(2))$ [1], и предложить физическую интерпретацию этих связей. Отметим также, что приведенные ассоциативные алгебры имеют центральные элементы:

$$\begin{array}{ll} \det_q T = ad - qbc; & c_2 = X_-X_+ + [J]_q[J+1]_q; \\ c_2(q) = \alpha^+\alpha - [N;q^{-2}], & [n;q] = (q^n-1)/(q-1); \\ z_1 = \beta - q\gamma, & z_2 = \alpha\delta - q^2\beta\gamma. \end{array} \tag{10}$$

Отметим, что матрица K удовлетворяет характеристическому уравнению

$$K\varepsilon_q K = z_2\varepsilon_q - qz_1K,$$

где ε_q – квантовая метрика для $F_q(SL(2))$.

Прежде чем обсуждать представления, поскольку речь идет об ассоциативных алгебрах, остановимся на связях между алгебрами. Деформированный осциллятор может быть получен из квантовой алгебры $sl_q(2)$ посредством контракции [13] ($f\to 0$)

$$\alpha = \lim f\omega^{1/2}X_+, \qquad \alpha^+ = \lim f\omega^{1/2}X_-, \qquad q^{-N} = \lim fq^J, \tag{11}$$

в частности $\lim f^2\omega c_2 = c_2(q) + q^2/(q^2-1)$. Остальные же соотношения (6) алгебры Хопфа $sl_q(2)$ такого предела не выдерживают. Можно тем не менее получить конечные выражения в правой части для копроизведения Δ,

$$\psi(\alpha) = \alpha\otimes q^{-J} + \omega^{1/2}q^{-N}\otimes X_+, \qquad \psi(N) = N\otimes 1 - 1\otimes J \tag{12}$$

и интерпретировать его как отображение ψ из алгебры $A(q)$ в тензорное произведение $A(q) \otimes sl_q(2)$, которое сохраняет коммутационные соотношения (7) алгебры q-осциллятора $A(q)$

$$[\,\psi(\alpha), \psi(\alpha^+)\,] = q^{-2\psi(N)}, \qquad [\,\psi(N), \psi(\alpha)\,] = \psi(\alpha). \tag{13}$$

Такое отображение, удовлетворяющее свойствам согласованности с копроизведением: $(\psi \otimes id) \circ \psi = (id \otimes \Delta) \circ \psi$ и коединицей: $(id \otimes \varepsilon) \circ \psi = id$ квантовой алгебры $sl_q(2)$, где id – тождественное отображение, называется кодействием $sl_q(2)$ на $A(q)$, а последняя $sl_q(2)$ – комодуль-алгеброй [14].

Если копроизведение позволяет определять действие исходной алгебры в тензорном произведении ее представлений, то кодействие, в данном случае ψ, определяет представление алгебры $A(q)$ в тензорном произведении представления $A(q)$ на представление $sl_q(2)$. Таким образом, если интерпретировать копроизведение Δ для $sl_q(2)$ как сложение q-спинов, то кодействие ψ интерпретируется как такое сложение q-осциллятора и q-спина, которое воспроизводит алгебру q-осциллятора $A(q)$.

Если ограничиться фоковским представлением $\mathcal{H}_F$ алгебры $A(q)$ (другие неприводимые представления см. в [13]) с базисными векторами $|0\rangle$, $\alpha|0\rangle = 0$, $|n\rangle \simeq (\alpha^+)^n|0\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, и выбрать гамильтониан q-осциллятора в виде

$$H = \alpha^+\alpha = [N; q^{-2}] = (1 - q^{-2N})/(1 - q^{-2}), \tag{14}$$

то кодействие (12) определяет гамильтониан взаимодействующих специальным образом q-осциллятора и q-спина, который будет иметь тот же спектр (с дополнительной кратностью). Соответствующее выражение получается подстановкой в (14) правых частей (12)

$$H_I = \alpha^+\alpha q^{-2J} + \omega q^{-2N} X_- X_+ \omega^{1/2} q^{-J-N}(\alpha^+ X_+ + \alpha X_-). \tag{15}$$

Этот гамильтониан действует в пространстве $\mathcal{H}_F \otimes V_j$, где V_j – неприводимое представление $sl_q(2)$ размерности $(2j+1)$, и оно разлагается в прямую сумму $(2j+1)$ неприводимых фоковских представлений алгебры $A(q)$. Условие согласованности ψ с копроизведением Δ позволяет строить взаимодействие q-осциллятора с произвольным числом q-спинов. В рамках исчисления Клебша–Гордана и Вигнера–Рака это отвечает контракции по одному из спинов.

Аналогичная связь в отношении кодействия существует и между алгеброй A (8) и квантовой группой $F_q(GL(2))$ [10]. Кодействие $\varphi\colon A \to F_q \otimes A$ задается на генераторах α, β, γ, δ посредством умножения матриц:

$$\varphi\colon K \to K_T = TKT^t, \tag{16}$$

например, $\varphi(\beta) = ac\alpha + bc\gamma + ad\beta + bd\delta$. Как и в предыдущем случае (12), кодействие (16) согласовано с коумножением Δ и коединицей ε в F_q. Оно, так же как и ψ, сохраняет перестановочные соотношения (8) для преобразованных генераторов $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$, $\ldots$. Такая связь между алгебрами A

и F_q позволяет характеризовать A как F_q-комодуль-алгебру [14] или F_q-ковариантную алгебру. Таким образом, если трактовать F_q и A как алгебры наблюдаемых, наличие кодействия φ позволяет воспроизвести структуру A в составной системе $F_q \otimes A$ и при заданных представлениях V и W для F_q и A ставить вопрос о разложении $V \otimes W$ на неприводимые представления алгебры A.

Как отмечалось, в алгебре Хопфа, например F_q, имеется две операции: умножение μ и коумножение Δ. Поэтому можно рассматривать ее представления операторами в линейном пространстве [15], когда μ соответствует умножение операторов, а наличие коумножения Δ позволяет определять представление в тензорном произведении представлений. Можно также рассматривать копредставления алгебры Хопфа, когда основной операцией является коумножение Δ. Например, для F_q пространство V с образующими x, y и отображением $\varphi\colon V \to F_q \otimes V$, $\varphi(x) = ax + by$, $\varphi(y) = cx + dy$ задает копредставление, поскольку φ, Δ и ε согласованы:

$$(\Delta \otimes id) \circ \varphi = (id \otimes \varphi) \circ \varphi, \qquad (\varepsilon \otimes id) \circ \varphi = id, \tag{17}$$

что совпадает с соотношениями квантовой группы (1).

Считая, что образующие x и y коммутируют с элементами F_q, можно показать, что кодействие φ сохраняет соотношение $xy = qyx$ (квантовая плоскость [16]). Тем самым V превращается из линейного пространства в F_q-комодуль-алгебру (ковариантную алгебру). Как и в случае представлений, можно рассмотреть несколько копий копредставлений, например V_1 и V_2. Однако их образующие не будут коммутировать между собой. Чтобы эти дополнительные соотношения сохранялись при кодействии φ и объединение V_1, V_2 было F_q-ковариантной алгеброй, они должны иметь вид

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= qx_2x_1, & y_1y_2 &= qy_2y_1, \\ y_1x_2 &= x_2y_1, & x_1y_2 &= y_2x_1 + \omega x_2y_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Используя R-матрицу (3) и двухкомпонентные столбцы $v_i{}^t = (x_i, y_i)$, можно записать соотношения (18) в матричном виде

$$Rv_2 \otimes v_1 = v_1 \otimes v_2. \tag{19}$$

Инвариантность (19) при кодействии $v_i \to \varphi(v_i) = Tv_i$ в силу матричной записи очевидна. Элемент $x_1y_2 - qx_2y_1 = y_2x_1 - qx_2y_1$ является центральным. Обобщение на произвольное число копредставлений V_j, $j = 1, 2, \dots$, использует соотношение (19) для $v_i \otimes v_j$ и любой упорядоченной пары индексов $i > j$.

Аналогичное расширение допускает и ковариантная алгебра A. Мы проиллюстрируем это на примере эквивалентной ей алгебры B, 2×2-матрица генераторов которой удовлетворяет уравнению отражения [2, 10]

$$M_1 R^{-1} M_2 \widetilde{R}^{-1} = R^{-1} M_2 \widetilde{R}^{-1} M_1, \qquad \widetilde{R} = \mathcal{P}R\mathcal{P}, \tag{20}$$

отличающемуся от (9), но эквивалентному ему для $n = 2$. В (20) $\mathcal{P}$ – оператор перестановки в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. После умножения (20) слева и справа на $\mathcal{P}$ приходим к уравнению

$$\tau\sigma\tau\sigma = \sigma\tau\sigma\tau, \tag{21}$$

где $\tau = M$, $\sigma = \mathcal{P}R^{-1}$. Матрица σ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера в форме для образующих группы кос: $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Уравнение (21) совпадает с дополнительными соотношениями для группы кос в шаре с одной ручкой, образующая τ отвечает охвату ручки первой нитью [6, 17]. Группа кос в сфере с g ручками имеет g образующих τ_j, $j = 1, 2, \ldots, g$, удовлетворяющих (21), а также дополнительным соотношениям типа (21) между собой (аналог (19)). При реализации $\sigma = \mathcal{P}R^{-1}$, получаем расширенную ковариантную алгебру, генераторы которой образуют матрицы $M(j)$. Каждая $M(j)$ удовлетворяет (20), а для $i > j$ имеем

$$RM_1(i)R^{-1}M_2(j) = M_2(j)RM_1(i)R^{-1}. \tag{22}$$

Отметим, что исходная алгебра B изоморфна алгебре, порожденной элементами любой из матриц $M^{(k)} = M(1)M(2)\cdots M(k)$, $k = 1, 2, \ldots, g$, поскольку все $M^{(k)}$ удовлетворяют (20) (следствие из (20) и (22)).

В заключение на примере алгебры A проиллюстрируем возможность квантования пространства, заменяя алгебру коммутирующих функций на нем на некоммутативную алгебру. В качестве пространства будем иметь в виду двумерную сферу S^2. Наличие в алгебре A двух центральных элементов z_1 и z_2 (10) позволяет редуцировать ее, фиксируя, например, один из них. При $z_1 = 0$ получаем алгебру, порожденную тремя образующими ($\beta = q\gamma$) и соотношениями [10]

$$\alpha\gamma = q^2\gamma\alpha, \qquad \gamma\delta = q^2\delta\gamma, \qquad [\alpha, \delta] = q(q^2 - q^{-2})\gamma^2. \tag{23}$$

Ее можно считать q-деформацией алгебры функций на S^2 [18] (при вещественной структуре $\delta^* = q\alpha$, $\gamma = -\gamma^*$, $z_2 \sim \alpha\alpha^* + q^4\gamma\gamma^*$ пропорционально квадрату радиуса квантовой сферы). На этой алгебре существует $F_q(SU(2))$-инвариантный интеграл, превращающий ее в гильбертово пространство состояний частицы на квантовой сфере [19]. Как и в случае q-осциллятора, вопрос о гамильтониане такой системы не решается однозначно. В качестве такового можно предложить оператор Лапласа некоммутативной дифференциальной геометрии квантовой сферы, ковариантной относительно $F_q(SU(2))$. В силу упомянутой двойственности F_q и квантовой алгебры $su_q(2)$ этот оператор совпадает с оператором Казимира $su_q(2)$ и имеет спектр $[n]_q[n+1]_q$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. (5), (10)).

В то же время видно, что после простых переопределений генераторов $\delta \sim \alpha^+$, $\alpha \sim \alpha$, $\gamma \sim exp(-N \ln q)$ и параметра деформации соотношения (23) совпадают с алгеброй q-осциллятора (7). Следовательно, одна и та же квантовая алгебра $A(q)$ может рассматриваться и как алгебра наблюдаемых, и как пространство состояний.

Мы надеемся, что приведенное выше обсуждение различных свойств квантовых групп и алгебр будет способствовать их дальнейшему использованию в теоретической физике.

Список литературы

[1] *Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. С. 178.

[2] *Moore G., Reshetikhin N.* // Nucl. Phys. 1989. V. B328. P. 557;*Решетихин Н.Ю., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* // Letters in Math. Phys. 1990. V. 19. P. 133.

[3] *Alvarez-Gaumé L., Gómez C., Sierra G.* // Nucl. Phys. 1990. V. B330. P. 347.

[4] *Pasqnier V., Saleur H.* // Nucl. Phys. 1990. V. B330. P. 523.

[5] *Kulish P., Sklyanin E.* // J. Phys. 1991. V. A 24. P. L435.

[6] *Kulish P.* Quantum groups and quantum algebras as symmetries of dynamical systems. Preprint YITP/K-959. Kyoto, 1991.

[7] *Zumino B.* Introduction to differential geometry of quantum groups. Preprint UCB–PTH–62/91. Berkeley, 1991.

[8] *Carrow–Watamura U. et al* // Z. Phys. 1990. V. C 48. P. 159.

[9] Kulish P.P. (ed.) Quantum groups // Lect. Notes in Math. Proc. Euler Intern. Math. Inst. V. 1510. Springer. Berlin, 1992. P. 398.

[10] *Kulish P.P., Sklyanin E.* Algebraic structures related to reflection equations. Preprint YITP/K-980. Kyoto, 1992; // J. Phys. A. 1992. V. 25.

[11] *Drinfeld V.G.* Quantum groups // Proc. ICM–86. V. 1. Berkeley. 1987. P. 798.

[12] *Takhtajan L.A.* Quantum groups // Lect. Notes in Physics. V. 370. Springer. Berlin. 1990. P. 3.

[13] *Кулиш П.П.* // ТМФ. 1991. Т. 86. С. 157.

[14] *Majid S.* // Intern. Journ. Mod. Phys. 1990. V. A5. P. 1;// J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 3246.

[15] *Faddeev L.D., Takhtajan L.A.* Quantum groups // Lect. Notes in Phys. V. 246. 1986. P. 166.

[16] *Manin Yu.* Topics in noncommutative geometry. Princeton Preprint, 1991.

[17] *Sossinsky A.* // Lect. Notes in Math. V. 1510. 1992. P. 354.

[18] *Podleś P.* // Lett. Math. Phys. 1987. V. 14. P. 193;*Noumi M., Mimachi K.* // Comm. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 521.

[19] *Podleś P.* Quantization enforces interaction. Preprint RIMS–817, 1991.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Поступила в редакцию
8.IX.1992 г.

P. P. Kulish

QUANTUM GROUPS, q–OSCILLATORS AND COVARIANT ALGEBRAS

The physical interpretation of the main notions of the quantum group theory (coproduct, representations and corepresentations, action and coaction) is discussed using the simplest examples of q-deformed objects (quantum group $F_q(GL(2))$, quantum algebra $sl_q(2)$, q-oscillator and F_q-covariant algebra). Appropriate reductions of the covariant algebra of second rank q-tensors give rise to the algebras of the q-oscillator and q-sphere. A special covariant algebra related to the reflection equation corresponds to the braid group in a space with nontrivial topology.