1997. Т. 33, № 9. С. 1174 — 1180

УДК 517.956+517.968

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРАНСЛОЙНОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. Ф. Кравченко, Г. А. Несененко

Введение. Известно, что метод граничных интегральных уравнений широко применяется для изучения нестационарной теплопроводности в твердых телах [1]. Многие практически важные задачи математической физики приводят к необходимости исследования решений сингулярно возмущенных уравнений параболического типа, в том числе решений краевых задач, поставленных для таких уравнений [2] в областях с подвижными границами, на которых заданы нелинейные граничные условия типа Стефана — Больцмана [3].

В данной работе предлагается и обосновывается метод определения погранслойного асимптотического разложения решения $T(x,t)$ сингулярно возмущенной краевой задачи

$$\partial T/\partial t = \varepsilon \partial^2 T/\partial x^2, \quad (x,t) \in M_t = \{(x,t) : kt < x < N_2(t),\ 0 < t \le 1\}, \tag{1}$$

$$T(x,t) = T_0 = \mathrm{const}, \quad t = +0, \quad 0 \le x \le N_2(0), \tag{2}$$

$$\partial T(x,t)/\partial x = \gamma T^4(x,t), \quad x = kt, \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

$$\partial T(x,t)/\partial x = 0, \quad x = N_2(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

где $\varepsilon = \tilde{a}\tilde{T}H^{-2}$ — малый безразмерный параметр, $\tilde{a}$ — коэффициент температуропроводности, $\tilde{T}$ и H — соответственно временно́й и пространственный масштабы, T_0, γ, k — постоянные, $N_2(t)$ — непрерывная функция, x и t — безразмерные переменные, $k > 0$.

Спецификой рассматриваемой задачи является малость параметра $\varepsilon > 0$ (обусловленная либо малостью временно́го масштаба $\tilde{T}$, либо малостью коэффициента температуропроводности $\tilde{a}$, либо большим пространственным масштабом H, либо малостью всего комплекса $\tilde{a}\tilde{T}H^{-2}$) и нелинейность краевых условий (3) на подвижной, линейно изменяющейся во времени границе области M_t.

Будем искать асимптотическое разложение решения $T(x,t)$ краевой задачи (1) — (4) в предположении, что выполнено условие принадлежности точки с координатами (x,t) пограничному слою подвижной, линейно изменяющейся во времени границы области M_t [2]:

$$x - kt = O(\varepsilon^p), \quad p > 1. \tag{5}$$

Важность изучения погранслойных асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач теплопроводности типа (1) — (4) вызвана тем обстоятельством, что именно в пограничных слоях твердых тел возникают динамические напряжения, которые могут приводить к разрушению конструкционных материалов [4].

Найдем погранслойную асимптотику решения $T(x,t)$ краевой задачи (1) — (4), используя асимптотическое разложение функции Грина $\Gamma(x,t;y,s)$ соответствующей линейной краевой задачи и учитывая нелинейные краевые условия (3), при помощи метода граничных интегральных уравнений. В работе [2] найдено и обосновано погранслойное асимптотическое разложение при $\varepsilon \to 0$ функции Грина $\Gamma(x,t;y,s)$ линейной краевой задачи, соответствующей задаче (1) — (4), но с нелинейными подвижными границами. Из полученного в [2] результата следует, что если одна из границ области M_t линейно изменяется во времени, то при выполнении условия (5) и в предположении, что отрезок прямой, соединяющей точки с координатами $(x, 0)$ и (x, t), не имеет общих точек с графиком функции $N_2(s)$ при $0 < s < t$, для функции Грина $\Gamma(x, t; y, s)$ имеет место асимптотическое разложение вида

$$\Gamma(x,t;y,s) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}}\left[\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon(t-s)}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+y-2ks)^2}{4\varepsilon(t-s)} + \frac{k(y-ks)}{\varepsilon}\right\}\right] - \\ -\frac{k}{2\varepsilon}\exp\left\{\frac{k(y-ks)}{\varepsilon}\right\}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+y-2ks}{2\sqrt{\varepsilon(t-s)}}\right). \tag{6}$$

Следуя идеям метода граничных интегральных уравнений, представим решение $T(x, t)$ краевой задачи (1) — (4) в интегральной форме, предполагая, что $p(t)$ — неизвестная функция:

$$T(x,t) = T_0 - \varepsilon\int_0^t \Gamma(x,t;ks,s)p(s)ds. \tag{7}$$

Чтобы найти уравнение для неизвестной функции $p(t)$, подставим правую часть соотношения (7) в нелинейные краевые условия (3). Тогда, учитывая (6) и действуя так, как указано в [5], получаем нелинейное граничное интегральное уравнение

$$p(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \gamma\left[T_0 - \varepsilon\int_0^t \exp\left\{-\frac{k^2(t-s)}{4\varepsilon}\right\}\frac{p(s)ds}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}} + \frac{k}{2}\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2}\sqrt{\frac{(t-s)}{\varepsilon}}\right)p(s)ds\right]^4. \tag{8}$$

Положив для упрощения дальнейших выкладок

$$\bar{p}(t) = p(t)/T_0, \quad \bar{\gamma} = \gamma T_0{}^3, \tag{9}$$

нелинейное граничное интегральное уравнение (8) приведем к виду

$$\bar{p}(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \bar{\gamma}\left[1 - \varepsilon\int_0^t \exp\left\{-\frac{k^2(t-s)}{4\varepsilon}\right\}\frac{\bar{p}(s)ds}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}} + \frac{k}{2}\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2}\sqrt{\frac{(t-s)}{\varepsilon}}\right)\bar{p}(s)ds\right]^4. \tag{10}$$

1. Определение асимптотического разложения решения нелинейного граничного интегрального уравнения. Уравнение (10) решаем методом последовательных приближений [5], отыскивая для каждого приближения его асимптотику:

$$\bar{p}_n(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \bar{\gamma}\left[1 - \varepsilon\int_0^t \exp\left\{-\frac{k^2(t-s)}{4\varepsilon}\right\}\frac{\bar{p}_{n-1}(s)ds}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}} + \frac{k}{2}\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2}\sqrt{\frac{(t-s)}{\varepsilon}}\right)\bar{p}_{n-1}(s)ds\right]^4, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Полагая $\bar{p}_0(t) = 0$, имеем $\bar{p}_1(t) \sim \bar{\gamma}$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\bar{p}_2(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \bar{\gamma}\left[1 - \varepsilon\int_0^t \exp\left\{-\frac{k^2(t-s)}{4\varepsilon}\right\}\frac{\bar{\gamma}ds}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}} + \frac{k}{2}\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2}\sqrt{\frac{(t-s)}{\varepsilon}}\right)\bar{\gamma}ds\right]^4 = \gamma[1 - I_1 - I_2]^4. \tag{12}$$

Найдем асимптотики для каждого из интегралов I_i $(i = 1, 2)$, стоящих справа в (12). Асимптотика интеграла I_1 имеет вид

$$I_1 = \bar{\gamma}\varepsilon\int_0^t \exp\left\{-\frac{k^2(t-s)}{4\varepsilon}\right\}\frac{ds}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}} = \frac{2\bar{\gamma}\varepsilon}{k\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty - \int_{k^2t/(4\varepsilon)}^\infty\right]\exp\{-v\}\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{2\bar{\gamma}\varepsilon}{k} + O(e^{-c/\varepsilon}), \tag{13}$$

где постоянная $c > 0$ и не зависит от ε. Асимптотика интеграла I_2 находится аналогично. Применив при этом интегрирование по частям, находим

$$I_2 = \bar{\gamma}\varepsilon/k + O(\exp[-c/\varepsilon]), \tag{14}$$

где постоянная $c > 0$ и не зависит от ε. Подставляя теперь (13) и (14) в (12), получаем асимптотическое равенство

$$\bar{p}_2(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \bar{\gamma}[1 - \bar{\gamma}\varepsilon/k + O(\exp[-c/\varepsilon])]^4, \tag{15}$$

из которого с точностью до экспоненциально малых слагаемых вытекает асимптотическое соотношение вида $\bar{p}_2(t) \sim \bar{\gamma}[1 - (\varepsilon/k)\bar{p}_1(t)]^4$, $\varepsilon \to 0$. Тогда нетрудно сделать вывод, что справедливо рекуррентное соотношение ($\bar{p}_n = \bar{p}_n(t) = \mathrm{const}$)

$$\bar{p}_n \sim \bar{\gamma}[1 - (\varepsilon/k)\bar{p}_{n-1}]^4, \quad \varepsilon \to 0. \tag{16}$$

Докажем справедливость этого соотношения, используя метод полной математической индукции. Для $n = 2$ справедливость (16) следует из (15). Пусть соотношение (16) справедливо для какого-нибудь натурального числа n, покажем, что оно справедливо для $n+1$. Действительно, подставляя (16) в (11), имеем

$$\bar{p}_{n+1} \sim \bar{\gamma}\Bigg[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{k}\bar{p}_{n-1}\right)^4 \varepsilon\bar{\gamma}\int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{k^2(t-s)}{4\varepsilon}\right\}\frac{ds}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}} +$$

$$+\left(1 - \frac{\varepsilon}{k}\bar{p}_{n-1}\right)^4 \frac{\bar{\gamma}k}{2}\int\limits_0^t \mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2}\sqrt{\frac{(t-s)}{\varepsilon}}\right)ds\Bigg]^4 =$$

$$= \bar{\gamma}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{k}\bar{p}_{n-1}\right)^4\left(I_1 + I_2\right)\right]^4 \sim \bar{\gamma}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{k}\bar{p}_{n-1}\right)^4 \frac{\bar{\gamma}\varepsilon}{k}\right]^4 = \bar{\gamma}\left[1 - \frac{\varepsilon}{k}\bar{p}_n\right]^4, \quad \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

Согласно доказанной в [5] сходимости метода последовательных приближений для решения нелинейного интегрального уравнения типа (10) при малых значениях "времени" t (это соответствует малым значениям параметра $\varepsilon > 0$), имеем асимптотическое разложение решения $\bar{p}(t)$ граничного нелинейного интегрального уравнения (10) вида

$$\bar{p}(t) \sim \bar{p}_n \sim \bar{\gamma}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{a}_i\varepsilon^i, \quad \varepsilon \to 0, \tag{18}$$

где все коэффициенты a_i асимптотического разложения вычисляются в явном виде. Заметим, что так как по условию $T_0 = \mathrm{const}$, то $a_i = \mathrm{const}$. Например, $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = -4\bar{\gamma}/k$, $\bar{a}_2 = 22\bar{\gamma}^2/k^2$.

2. Погранслойное асимптотическое разложение решения исследуемой сингулярно возмущенной нелинейной краевой задачи. Для определения погранслойного асимптотического разложения решения $T(x,t)$ исходной нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи (1) — (4) подставим правые части асимптотических равенств (6) и (18) под знак интеграла в (7). Далее, учитывая (9), запишем следующее асимптотическое равенство:

$$T(x,t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} T_0 - \varepsilon\gamma T_0^4\sum_{i=0}^{\infty}a_i\varepsilon^i\left[\int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{(x-ks)^2}{4\varepsilon(t-s)}\right\}\frac{ds}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-s)}} - \frac{k}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \mathrm{erfc}\left(\frac{x-ks)}{2\sqrt{\varepsilon(t-s)}}\right)ds\right] =$$

$$= T_0 - \varepsilon\gamma T_0^4\sum_{i=0}^{\infty}a_i\varepsilon^i(B_1 - B_2). \tag{19}$$

Найдем погранслойное асимптотическое разложение интеграла B_1, для чего введем в рассмотрение новую независимую переменную $W = (x-kt)^2/(4\varepsilon(t-s))$. Тогда

$$B_1 = \frac{(x-kt)}{\sqrt{\pi}2\varepsilon}\exp\left\{-\frac{(x-kt)k}{2\varepsilon}\right\}\left[\int\limits_0^{\infty} - \int\limits_0^{W^*}\right]\exp\left\{-W - \left[\frac{(x-kt)k}{4\varepsilon}\right]^2\cdot\frac{1}{W}\right\}\frac{dW}{W^{3/2}}, \tag{20}$$

где $W^* = (x-kt)^2/(4\varepsilon t)$.

В дальнейшем будем использовать известное соотношение [6]

$$\int\limits_0^{\infty} x^{\nu-1}\exp\left\{-\frac{\beta}{x} - \tilde{\gamma}x\right\}dx = 2\left(\frac{\beta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\nu/2}K_\nu\left[2\sqrt{\beta\tilde{\gamma}}\right], \tag{21}$$

где K_ν — функция Макдональда [6].

С помощью (21) первое слагаемое, стоящее справа в (20), можно переписать так [6]:

$$\int\limits_0^{\infty} W^{-3/2}\exp\left\{-\left[\frac{(x-kt)k}{4\varepsilon}\right]^2\cdot\frac{1}{W} - W\right\}dW = \frac{4\varepsilon\sqrt{\pi}}{(x-kt)k}\exp\left\{-\frac{(x-kt)k}{2\varepsilon}\right\}. \tag{22}$$

Для второго слагаемого из правой части (20) справедлива оценка вида:

$$\int\limits_0^{W^*} W^{-3/2}\exp\left\{-\left[\frac{(x-kt)k}{4\varepsilon}\right]^2\cdot\frac{1}{W} - W\right\}dW <$$

$$< \left[\frac{(x-kt)^2}{4\varepsilon t}\right]^{-3/2}\exp\left\{-\left[\frac{(x-kt)k}{4\varepsilon}\right]^2\cdot\frac{4\varepsilon t}{(x-kt)^2}\right\}\int\limits_0^{W^*} e^{-W}dW = O\left(\exp\left[-\frac{c}{\varepsilon}\right]\right), \tag{23}$$

$c > 0$ и не зависит от ε.

Учитывая (22), (23) и (20), получаем асимптотику интеграла B_1 в виде

$$B_1 = (2/k)\exp\{-(x-kt)k/\varepsilon\}[1 + O(\exp[-(c/\varepsilon)])], \quad \varepsilon \to 0, \tag{24}$$

причем постоянная $c > 0$ не зависит от ε.

Приступая к нахождению асимптотики интеграла B_2, воспользуемся интегрированием по частям, получаем

$$B_2 = \frac{k}{4\sqrt{\pi\varepsilon^3}}\int\limits_0^t \frac{s(x-2kt+ks)}{(t-s)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-ks)^2}{4\varepsilon(t-s)}\right\}ds. \tag{25}$$

Сравнивая подынтегральные выражения, стоящие в равенствах (20) и (25), видим, что они отличаются только сомножителями при экспоненте. Поэтому асимптотика интеграла B_2 находится точно так же, как находилась асимптотика интеграла B_1, с использованием эталонного соотношения (21) и оценки типа (23):

$$B_2 = \frac{k}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-kt)k}{2\varepsilon}\right\}\left[\int\limits_0^{\infty} - \int\limits_0^{W^*}\right]\exp\{-W\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\left[\frac{(x-kt)k}{4\varepsilon}\right]^2\cdot\frac{1}{W}\right\}\left[\frac{1}{W^{1/2}} - \frac{(x-kt)x}{4\varepsilon W^{3/2}} + \frac{(x-kt)^3k}{(4\varepsilon)^2W^{5/2}}\right]dW =$$

$$= \frac{k}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-kt)k}{2\varepsilon}\right\}\left[t\sqrt{\pi} - \frac{x\sqrt{\pi}}{k} + \sqrt{\pi}\left(\frac{x-kt}{k} + \frac{2\varepsilon}{k^2}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x-kt)k}{2\varepsilon}\right\} + O\left(\exp\left[-\frac{c}{\varepsilon}\right]\right) = \frac{1}{k}\exp\left\{-\frac{(x-kt)k}{\varepsilon}\right\}\left[1 + O\left(\exp\left[-\frac{c}{\varepsilon}\right]\right)\right], \quad \varepsilon \to 0, \tag{26}$$

постоянная $c > 0$ и не зависит от ε.

Подставив (24) и (26) в правую часть равенства (19), получаем искомое погранслойное асимптотическое разложение решения $T(x,t)$ краевой задачи (1) — (4) вида

$$T(x,t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} T_0 - \frac{\gamma}{k}T_0^4 \exp\left\{-\frac{(x-kt)k}{\varepsilon}\right\}\sum_{i=0}^{\infty} a_i\varepsilon^{i+1}. \tag{27}$$

Итак, доказана

Теорема. *Пусть выполнено условие (5) принадлежности точки с координатами (x,t) пограничному слою линейно изменяющейся во времени границы области M_t и пусть отрезок, соединяющий точки с координатами $(x,0)$ и (x,t), не пересекает при $0 < s < t$ графика функции $N_2(s)$ и $k > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ справедливо погранслойное асимптотическое разложение решения $T(x,t)$ нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи (1) — (4), задаваемое асимптотическим равенством (27), где коэффициенты разложения a_i вычисляются в явном виде.*

Например,

$$a_0 = 1; \quad a_1 = -4\gamma T_0^3/k; \quad a_2 = 22T_0^6\gamma^2/k^2. \tag{28}$$

3. Обсуждение результатов.

А. Поскольку нами найдены в явном виде первые три коэффициента погранслойного асимптотического разложения решения $T(x,t)$ нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи (1) — (4), то можно убедиться в том, что найденное погранслойное асимптотическое разложение решения $T(x,t)$ удовлетворяет нелинейным краевым условиям (3) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ включительно. Действительно, используя (27), (28) и учитывая, что полученные при помощи метода Лапласа асимптотические разложения можно дифференцировать [7], запишем такое асимптотическое равенство:

$$\partial T(x,t)/\partial x|_{x=kt} = \gamma T_0^4[1 - 4T_0^3\gamma\varepsilon/k + 22T_0^6\gamma^2\varepsilon^2/k^2 + O(\varepsilon^3)]. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$\gamma[T(x,t)|_{x=kt}]^4 = \gamma[T_0 - T_0^4\gamma\varepsilon/k + 4T_0^7\gamma^2\varepsilon^2/k^2 + O(\varepsilon^3)]^4 = \gamma[T_0^4 - 4\gamma T_0^7\varepsilon/k + 22\gamma^2T_0^{10}\varepsilon^2/k^2 + O(\varepsilon^3)]. \tag{30}$$

Сравнивая правые части равенств (29) и (30), убеждаемся в том, что с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ включительно найденное погранслойное асимптотическое разложение удовлетворяет нелинейным краевым условиям (3). Поскольку рекуррентное соотношение (16) позволяет определять в явном виде коэффициенты a_i для любого индекса i, то способом, аналогичным приведенному выше, можно найти асимптотическое погранслойное разложение вида (27) для любого порядка i, а затем аналогично изложенному выше убедиться в том, что это разложение удовлетворяет нелинейным граничным условиям (3) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^i)$ включительно.

Б. Определенное в данной работе погранслойное асимптотическое разложение, задаваемое формулой (27), объясняет, почему в качестве критерия принадлежности точки с координатами (x,t) пограничному слою подвижной линейно изменяющейся во времени границы области M_t выбрано соотношение (5). Действительно, если выполнено (5), то справедливо асимптотическое равенство вида

$$(x-kt)k/\varepsilon = (1/\varepsilon)O(\varepsilon^p) = O(\varepsilon^{p-1}) = O(\varepsilon^q), \quad q > 0, \tag{31}$$

и тогда сомножитель $\exp\{-(x-kt)k/\varepsilon\}$ при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ не является экспоненциально малым. А это означает, что второе слагаемое в правой части (27), определяющее вклад нелинейных граничных условий (3) краевой задачи (1) — (4) в асимптотику решения $T(x,t)$ при малых значениях параметра ε, является сравнимым (более точно, одного порядка) с числом T_0, при помощи которого в краевой задаче (1) — (4) заданы начальные условия. Если же выполнено условие

$$x - kt = O(\varepsilon^r), \quad 0 < r < 1, \tag{32}$$

то ($c > 0$ и не зависит от ε) справедлива оценка вида

$$\exp\{-(x-kt)k/\varepsilon\} = O(\exp[-c/\varepsilon^{1-r}]) = o(\varepsilon^N), \tag{33}$$

где N — любое положительное число, из которой следует, что в случае выполнения для точки (x,t) условия (32) вклад нелинейных граничных условий (3) в асимптотику решения $T(x,t)$ краевой задачи (1) — (4) пренебрежимо мал. Именно в силу приведенных выше соображений соотношение (5) взято в качестве критерия, определяющего принадлежность точки (x,t) пограничному слою нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи (1) — (4).

В. В работе [8] исследовалось асимптотическое разложение решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи (1) — (4) в случае, когда (в обозначениях данной работы) для точки (x,t) выполнялись условия (32).

Полученный в [8] результат качественно согласуется с асимптотическим разложением (27), но в силу соотношения (33) этот результат описывается асимптотическим равенством вида

$$T(x,t) \sim T_0 + O(\exp[-c/\varepsilon]), \quad \varepsilon \to 0. \tag{34}$$

Следует подчеркнуть, что в [8] для получения (34) использовался стандартный метод Лапласа [7], в котором в качестве эталонного интеграла брался интеграл вида

$$\int_0^\infty x^\nu \exp\{-x^2\}dx. \tag{35}$$

В настоящей работе в качестве эталонного интеграла используется интеграл, стоящий слева в равенстве (21). Невозможность использования при определении погранслойного асимптотического разложения решения $T(x,t)$ в качестве эталонного интеграла вида (35) (и, следовательно, необходимость использования интеграла из (21)) вызвана тем обстоятельством, что в случае выполнения условия (5) стационарная точка s_0 функции

$$S(s) = (x-ks)^2/(t-s) \tag{36}$$

при $\varepsilon \to 0$ сливается с концом интервала интегрирования в интегралах, стоящих справа в (19): $s_0 \sim t$, $\varepsilon \to 0$. При этом, как видно из (36), функция $S(s)$ при $s = t$ имеет полюс. Именно поэтому в случае выполнения условия (5) для вычисления асимптотик интегралов B_1 и B_2 (следовательно, и для вычисления погранслойной асимптотики решения $T(x,t)$) нельзя в качестве эталонного интеграла выбирать интеграл (35), а надо использовать интеграл из (21). Таким образом, предложенный нами новый подход определения асимптотик интегралов B_1 и B_2 можно рассматривать как модификацию метода Лапласа [7] на случай слияния стационарной точки функции, стоящей в показателе экспоненты, с концом интервала интегрирования, в котором эта функция имеет полюс. Заметим, что подобные модификации метода стацфазы описаны в работе [9].

Г. Полученное в данной работе погранслойное асимптотическое разложение, определяемое формулой (27) — это "классическое" асимптотическое разложение [10], так как его коэффициенты a_i вычисляются в явном виде и не зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$. Необходимо отметить, что в работах других авторов, посвященных определению асимптотик решений сингулярно возмущенных краевых задач, поставленных для уравнений параболического типа [11], находятся "обобщенные" асимптотические разложения решений этих краевых задач [10], так как в указанных работах коэффициенты разложений представлены в виде интегралов, зависящих от малого параметра.

Д. Предложенным способом можно находить асимптотические разложения решений более сложных сингулярно возмущенных нелинейных краевых задач нестационарной теплопроводности, а именно: при произвольных начальных условиях $T(x,t)|_{t=0} = T_0(x)$, в пограничных слоях нелинейно изменяющихся во времени подвижных границ, в многослойных областях, а также для дифференциальных уравнений параболического типа с нелинейными тепловыми источниками (подробнее см. в [12]).

Литература

1. *Шиппи Д. Дж.* // Метод граничных интегральных уравнений. М., 1978. С. 30 — 45.
2. *Несененко Г. А.* Пограничный слой в нестационарных температурных полях твердых тел. М., 1991.
3. *Барвинок В. А.* Управление напряженным состоянием и свойства плазменных покрытий. М., 1990.
4. *Карташов Э. М., Партон В. З.* // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. 1991. Т. 22. С. 55 — 127.
5. *Тихонов А. Н.* // Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. 1937. Т. 3. С. 461 — 479.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра и ортогональные многочлены. М., 1966.
7. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М., 1977.
8. *Несененко Г. А.* // Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса: Межвуз. сб. М., 1986. С. 161 — 169.
9. *Анютин А. П., Боровиков В. А.* Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя. М., 1984. (Препринт / Ин-т радиотехники и электроники АН СССР: 42).
10. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., 1967.
11. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
12. *Несененко Г. А.* Библиографический обзор, формулировки теорем и алгоритмы по теме: “геометрооптический” асимптотический метод решения сингулярно возмущенных задач нелинейного тепло- и массопереноса в областях с подвижными границами. М., 1995.

Институт радиотехники и электроники РАН, г. Москва,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
1 апреля 1997 г.