Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. V. Ivanov, On interior estimates of the first derivatives of solutions of quasilinear non-uniformly elliptic and parabolic equations of general form,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1969, Volume 14, 24–47

https://www.mathnet.ru/eng/znsl2305

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
December 11, 2025, 12:20:47

А.В.Иванов

О ВНУТРЕННИХ ОЦЕНКАХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И НЕРАВНОМЕРНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Хорошо известно, что оценки максимума модуля первых производных решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка занимают важное место в теории классической разрешимости краевых задач для этих уравнений (см. [I], [2], [4]). В данной работе будут обсуждаться лишь вопросы, касающиеся, так называемых, внутренних оценок максимума модуля первых производных, которые устанавливаются во всей области определения дифференциального уравнения в предположении, что априори известны значения первых производных на границе этой области.

Рассмотрим в ограниченной области Ω евклидова пространства E_n уравнение

$$\mathcal{A}_{ij}(x,u,u_x)u_{ij}=\mathcal{B}(x,u,u_x)^{*)} \quad (\mathcal{A}_{ij}=\mathcal{A}_{ji}) \qquad (0.I)$$

где $u_x=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}), u_{ij}=u_{x_ix_j}$ в предположении, что при всех $x\in\Omega$, $|u|\le M=const$ и любых $p=(p_1,\dots,p_n)$

$$\xi^2 \le \mathcal{A}_{ij}(x,u,p)\xi_i\xi_j . \qquad (0.2)$$

Рассмотрим в цилиндре $Q_T=\Omega\times[0,T]$ уравнение

---

*) Здесь и ниже всегда предполагается суммирование по всем дважды встречающимся индексам.

$$-u_t + A_{ij}(x,t,u,u_x)\,u_{ij} = B(x,t,u,u_x)\ (A_{ij}=A_{ji}), \quad (0.3)$$

предполагая, что при всех $x,t \in Q_T$, $|u| \le M = const$ и любых $p=(p_1,\dots,p_n)$

$$\lambda(x,t,u,p)\,\xi^2 \le A_{ij}(x,t,u,p)\,\xi_i\xi_j, \qquad \lambda(x,t,u,p)>0. \quad (0.4)$$

В случае равномерно эллиптических (р.э.) и равномерно параболических (р.п.) уравнений, то-есть, при условиях

$$\xi^2 \le A_{ij}(x,u,p)\,\xi_i\xi_j \le c\,\xi^2, \qquad c=const, \quad (0.5)$$

и

$$\lambda(x,t,u,p)\,\xi^2 \le A_{ij}(x,t,u,p)\,\xi_i\xi_j \le c\,\lambda(x,t,u,p)\,\xi^2,\ c=const, \quad (0.6)$$

(и при $\lambda(x,t,u,p)=|p|^{m-2}$, $m>1$) внутренние оценки $|u_x|$ для решений $u(x)$ и $u(x,t)$ (для которых $\max|u| \le M$)ж) этих уравнений были установлены О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой (см. [I] , [2]). Обобщения этих результатов на неравномерно эллиптические (н.э.) и неравномерно параболические (н.п.) уравнения вида (0.I) и (9.5) были предприняты в работах [3] - [6] .

В работах [3] - [5] оценки $\max|u_x|$жж) установлены для н.э. уравнений, группирующихся вокруг конкретных уравнений, связанных с известными геометрическими или вариационными задачами. Поэтому выделение допустимых классов н.э. уравнений в [3] - [5] связано с (большей или меньшей) конкретизацией структуры уравнений вида (0.I).

ж)Условие $\max|u| \le M$ впредь будет предполагаться для любых рассматриваемых решений уравнений (0.I) и (0.3), так как условия (0.2) и (0.4) формулировались в предположении, что $|u| \le M$.

жж)Здесь и ниже речь идет лишь о внутренних оценках $\max|u_x|$ (в указанном выше смысле).

В работе [6] выделение допустимых классов н.э. и н.п. уравнений связано с ограничением произвола вхождения переменных x и u в коэффициенты уравнений, причем чем больше степень неравномерности рассматриваемого уравнения, тем более жесткими становятся условия вхождения аргументов x и u в коэффициенты A_{ij} и B. В определенном смысле, условия, полученные в [6] при установлении оценки $\max|u_x|$, соединяют условия Ладыженской и Уральцевой для р.э. и р.п. уравнений (в несколько ослабленном виде) с хорошо известным классическим результатом об оценке $\max|u_x|$ для решений уравнений с коэффициентами, не зависящими от x и u,

$$A_{ij}(u_x)u_{ij}=B(u_x), \quad -u_t+A_{ij}(t,u_x)=B(t,u_x) \qquad (0.7)$$

(для которых, как известно, оценка $\max|u_x|$ установлена без каких-либо ограничений на рост $\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}$ и B при $|p|\to\infty$).

Однако, условия, найденные в [6] не являются точными, по крайней мере, для тех н.э. и н.п. уравнений, которые не являются слишком близкими к р.э. и р.п. уравнениям.

В настоящей работе предлагается некоторый подход для установления оценки $\max|u_x|$ для решений н.э. и н.п. уравнений, при помощи которого удается существенно расширить (по сравнению с [6]) произвол вхождения переменных x и u в коэффициенты A_{ij} и B н.э. и н.п. уравнений вида (0.I) и (0.3) при условии, что последние имеют не слишком малую степень неравномерности. В случае же параболических уравнений вида (0.3) с $\lambda(x,t,u,p)$, удовлетворяющим при достаточно больших $|p|$ условию $\lambda(x,t,u,p)<\frac{c}{|p|^2}$ $(c=const)$, результаты работы [6] существенно усилены здесь для любых н.п. уравнений (и, в частности, для р.п. уравнений).

Полученные в данной работе условия на коэффициенты A_{ij} и B, при которых возможна оценка $\max|u_x|$, отличаются следующими

особенностями. В эллиптическом случае эти условия зависят от степени неравномерности уравнения и ухудшаются (хотя и не так резко, как в [6]) при увеличении степени неравномерности уравнения (0.I). Для р.э уравнений эти условия не совпадают с условиями Ладыженской и Уральцевой и уступают им. В параболическом случае большая часть полученных условий не зависит от степени неравномерности уравнения (0.3). При этом в случае возрастающих (при $|p| \to \infty$) λ эти условия не переходят для р.п. уравнений в условия Ладыженской и Уральцевой и уступают им. В случае λ , убывающих (при $|p| \to \infty$) быстрее, чем $1/|p|^2$, полученные условия являются существенно более широкими чем условия принадлежности уравнения (0.3) к так называемому, классу (L) С.Н.Бернштейна.

Для большей наглядности мы проиллюстрируем полученные результаты на примере частного класса изучаемых в данной работе уравнений, а именно, - класса н.э. и н.п. уравнений вида (0.I) и (0.3), коэффициенты которых имеют степенное поведение при $|p| \to \infty$. В общем случае основные результаты данной работы сформулированы в теоремах 2.I, 3.I и 3.2.

Предположим, что коэффициенты $A_{ij}(x,u,p)$ уравнения (0.I) непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют при всех $x \in \Omega$, $|u| \leq M$ и любых p условиям

$$\xi^2 \leq A_{ij}(x,u,p)\,\xi_i\,\xi_j \leq \varphi\,\xi^2,$$

$$\left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}\right| \leq c\,\frac{\varphi}{|p|} \qquad \text{(при достаточно больших } |p| \text{)}, \tag{0.8}$$

где $c = const$, $\varphi = \varphi(|p|)$ - монотонно неубывающая функция $|p|$, причем $\varphi(|p|) \geq 1$. Очевидно, что функция $\varphi(|p|)$ характеризует степень неравномерности уравнения (0.I).

Из теоремы 2.I настоящей работы следует, что для выделенных уравнений оценка $\max|u_x|$ имеет место при следующих предположениях: при $|p|\to\infty$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u}=\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}|p|}\right),\qquad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x}=\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p}=\sigma(\sqrt{\varphi}),\quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u}=\sigma\left(\frac{1}{\varphi}\right),\quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}=\sigma\left(\frac{|p|}{\varphi}\right). \tag{0.9}$$

С другой стороны, из теоремы 2 работы [6] вытекает, что для тех же самых уравнений оценка $\max|u_x|$ установлена в предположениях, что при $|p|\to\infty$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u}=\sigma\left(\frac{1}{\varphi}\right),\qquad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x}=\sigma\left(\frac{|p|}{\varphi}\right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p}=\sigma(|p|),\quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u}=\sigma\left(\frac{|p|^2}{\varphi^2}\right),\quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}=\sigma\left(\frac{|p|^3}{\varphi^2}\right). \tag{0.I0}$$

Введем следующие обозначения. Пусть $\Psi_1=\Psi_1(\tau)$ и $\Psi=\Psi_2(\tau)$ – неотрицательные функции переменной $\tau\in[0,\infty)$. Будем записывать $\Psi_1\prec\Psi_2$, если при $\tau\to\infty$ Ψ_1 растет медленнее, чем Ψ_2 (то-есть, если при $\tau\to\infty$ $\Psi_1/\Psi_2\to 0$). Будем записывать $\Psi_1\lesssim\Psi_2$, если Ψ_1 растет при $\tau_1\to\infty$ не быстрее, чем Ψ_2 (то-есть, если при достаточно больших τ $\Psi_1\le C\Psi_2$, где $C=const>0$). Будем записывать $\Psi_1\approx\Psi_2$, если Ψ_1 и Ψ_2 эквивалентны при $\tau\to\infty$ (то-есть, если при достаточно больших τ $C_1\Psi_1\le\Psi_2\le C_2\Psi_2$, где $C_i=const>0$).

Сравним теперь условия (0.9) и (0.I0). Если $1\lesssim\varphi\prec|p|^2$, то более широкими являются условия (0.I0). В случае $\varphi\approx|p|^2$ условия (0.9) и (0.I0) совпадают. Если же $\varphi\succ|p|^2$, то более широкими являются условия (0.9), причем они становятся тем

более широкими (по сравнению с (0.10)), чем более быстро растущей является функция φ , характеризующая степень неравномерности уравнения (0.1).

Предположим теперь, что коэффициенты $A_{ij}(x,t,u,p)$ уравнения (0.3) непрерывно дифференцируемы по x, u, p и удовлетворяют при всех $x,t \in Q_T$, $|u| \leq M$ и любых p условиям

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\xi^2 \leq A_{ij}(x,t,u,p)\xi_i\xi_j \leq \lambda\varphi\xi^2 \\ &\left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}\right| \leq c\,\frac{\lambda\varphi}{|p|} \text{ (при достаточно больших } |p| \text{)} \end{aligned}\right\} \quad (0.11)$$

где $c = const$, $\lambda = \lambda(|p|)$ – положительная монотонная функция $|p|$, $\varphi = \varphi(|p|)$ – монотонно неубывающая функция $|p|$, причем $\varphi(|p|) \geq 1$. Функция $\varphi(|p|)$ характеризует степень неравномерности уравнения (0.3).

Для выделенных уравнений теорема 3.1 настоящей работы обеспечивает оценку $\max|u_x|$ в предположениях, что при $|p| \to \infty$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u} = O\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{|p|}\right), \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} = O(\sqrt{\lambda}), \quad \frac{\partial B}{\partial u} = O(1), \quad \frac{\partial B}{\partial x} = O(|p|), \quad (0.12)$$

а теорема 3.2 – в предположениях, что при $|p| \to \infty$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_{ij}}{\partial u} = o\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}|p|}\right), \qquad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} = o\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}}\right), \\ &\mathcal{B}_p = o(\lambda\sqrt{\varphi}), \qquad \mathcal{B}_u = o\left(\frac{\lambda}{\varphi}\right), \qquad \mathcal{B}_x = o\left(\frac{\lambda|p|}{\varphi}\right). \end{aligned} \quad (0.13)$$

С другой стороны, из теоремы 1 работы [6] следует, что

для тех же самых уравнений оценка $\max|u_x|$ имеет место при следующих предположениях:

в случае $\lambda \gg 1/|p|^2$ при $|p| \to \infty$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u} = o\left(\frac{\lambda}{\varphi}\right), \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} = o\left(\frac{\lambda|p|}{\varphi}\right), \tag{0.14}$$

$$\mathcal{B}_p = o(\lambda|p|), \quad \mathcal{B}_u = o\left(\frac{\lambda|p|^2}{\varphi^2}\right), \quad \mathcal{B}_x = o\left(\frac{\lambda|p|^3}{\varphi^2}\right);$$

в случае $\lambda \ll 1/|p|^2$ при $|p| \to \infty$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u} = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{|p|\varphi}\right), \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\varphi}\right), \tag{0.15}$$

$$\mathcal{B}_p = O(\sqrt{\lambda}), \quad \mathcal{B}_u = O\left(\frac{1}{\varphi^2}\right), \quad \mathcal{B}_x = O\left(\frac{|p|}{\varphi^2}\right).$$

Сравним эти результаты. Пусть сначала $\lambda \ll 1/|p|^2$. В этом случае надо сравнивать условия (0.12) и (0.15) (поскольку условия (0.12) заведомо шире условий (0.13) при любом $\varphi \gg 1$ при $\lambda \ll 1/|p|^2$). Если $\varphi \approx 1$, то условия (0.12) более широкие, чем (0.15), ибо условия на $(A_{ij})_u$, $(A_{ij})_x$, $\mathcal{B}_u$ и $\mathcal{B}_x$ в этом случае совпадают, но в (0.15) присутствует еще лишнее (по сравнению с (0.12)) условие $\mathcal{B}_p = O(\sqrt{\lambda})$, ограничивающее вхождение аргумента p в коэффициент $\mathcal{B}$. Если $\varphi \gg 1$, то, очевидно, условия (0.12) более широкие, чем (0.15), причем они становятся тем более широкими, чем более быстро растущей является функция φ.

Пусть теперь $\lambda \gg 1/|p|^2$. В этом случае нужно сравнивать между собой условия (0.12), (0.13) и (0.14). Сравним сначала условия (0.12) и (0.13). Если $1 \ll \varphi \ll \lambda$, то условия (0.12) и (0.13) пересекаются; если же $\varphi \gg \lambda$, то условия

(0.I2) являются более широкими, чем (0.I3). Сравним теперь условия (0.I3) и (0.I4). Если $1 \lesssim \varphi \lesssim |p|^2$, то условия (0.I4) более широкие; в случае $\varphi \approx |p|^2$ условия (0.I3) и (0.I4) совпадают; если же $\varphi \gtrsim |p|^2$, то условия (0.I3) более широкие, чем (0.I4), причем они становятся тем более широкими (по сравнению с (0.I4)), чем более быстро растущей функцией является φ. Сравним, наконец, условия (0.I2) и (0.I4). Если $1 \lesssim \varphi \lesssim \sqrt{\lambda}|p|$, то условия (0.I2) и (0.I5) пересекаются; если же $\varphi \gtrsim \sqrt{\lambda}|p|$, то условия (0.I2) являются более широкими, чем (0.I4), причем тем более широкими (по сравнению с (0.I4)), чем более быстро растущей является функция φ.

Структура работы такова. В § I собраны основные из вспомогательных предложений. В § 2 получены оценки для эллиптических уравнений. Кроме упоминавшейся выше теоремы 3.I в § 2 доказана также теорема 3.2, в которой для одного частного класса уравнений вида (0.I) оценка $\max|u_x|$ получена в предположениях, не зависящих от степени неравномерности уравнения. В § 3 получены оценки для параболических уравнений.

§ I. Вспомогательные предложения

Лемма I.I. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ удовлетворяет в ограниченной области $\Omega \subset E_n$ неравенству

$$a_{ij}(x)\, u_{ij} \geqslant a(x)\, u, \tag{I.I}$$

причем a_{ij}, $a \in C^0(\Omega)$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$, $a_{ij} = a_{ji}$,

Предположим, что при всех $x \in \Omega$

$$|a(x)| < \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)}{e^d(1+ne^d)} \qquad (d \text{ - диаметр области } \Omega). \tag{I.2}$$

Т о г д а

$$\max_{\Omega} u(x) \leq (1 + ne^{d}) \max \left\{0, \max_{\partial\Omega} u(x)\right\}. \qquad (I.3)$$

<u>Доказательство</u>. Будем считать (не ограничивая общности), что начало координат находится в области Ω. Положим

$$u(x) = (1 + ne^{d} - \sum_{k=1}^{n} e^{-x_k})\, \bar{u}(x); \qquad (I.4)$$

очевидно,

$$u_i = (1 + ne^{d} - \sum_{k} e^{-x_k})\, \bar{u}_i + e^{-x_i} \bar{u},$$

$$u_{ij} = (1 + ne^{d} - \sum_{k} e^{-x_k})\, \bar{u}_{ij} + e^{-x_j} \bar{u}_i + e^{-x_i} \bar{u}_j - \delta_{ij} e^{-x_i} \bar{u}.$$

Поэтому

$$(1 + ne^{d} - \sum_{k} e^{-x_k})\, a_{ij} \bar{u}_{ij} \geq$$

$$\geq \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii} e^{-x_i} + a(1 + ne^{d} - \sum_{k} e^{-x_k})\right] \bar{u}. \qquad (I.5)$$

Предположим, что $\bar{u}(x)$ имеет положительный максимум внутри Ω, например, в $(\cdot)\, x_0 \in \Omega$. Но в точке x_0 левая часть неравенства (I.5) неотрицательна, а правая оценивается снизу выражением

$$\left[e^{-d} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_0) - |a(x_0)|(1 + ne^{d})\right] \bar{u}(x_0), \qquad (I.6)$$

которое в силу (I.2) строго больше нуля. Следовательно,

$$\max_{\Omega} \bar{u}(x) \leq \max \left\{0, \max_{\partial\Omega} \bar{u}(x)\right\}, \qquad (I.7)$$

откуда и следует (I.3) (ибо $1 \leq 1 + ne^{d} - \sum_{k=1}^{n} e^{-x_k} \leq 1 + ne^{d}$).

<u>Лемма I.2</u>. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ удовлетворяет в ограниченной области $\Omega \subset E_n$ неравенству

$$a_{ij}(x) u_{ij} + \sum_{i=2}^{n} a_i(x) u_i \geq a(x) u \tag{I.8}$$

причем a_{ij}, a_i, $a \in C^0(\Omega)$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Предположим, что при всех $x \in \Omega$

$$|a(x)| < \frac{a_{11}}{e^{d}(1+e^{d})} \quad (d \text{ — диаметр области } \Omega) \tag{I.9}$$

Тогда

$$\max_{\Omega} u(x) \leq (1 + e^{d}) \max \left\{ 0, \max_{\partial\Omega} u(x) \right\}. \tag{I.10}$$

<u>Доказательство</u>. Полагая $u = (1 + e^{d} - e^{-x_1})\bar{u}$ и учитывая, что

$$\begin{aligned} u_i &= (1 + e^{d} - e^{-x_1})\bar{u}_i + \delta_{i1} e^{-x_1} \bar{u}, \\ u_{ij} &= (1 + e^{d} - e^{-x_1})\bar{u}_{ij} + \delta_{i1} e^{-x_1} \bar{u}_j - \delta_{i1}\delta_{j1} e^{-x_1} \bar{u}, \end{aligned} \tag{I.11}$$

получаем из (I.8) неравенство

$$\begin{aligned} &(1 + e^{d} - e^{-x_1}) a_{ij} \bar{u}_{ij} + e^{-x_1} a_{1j} \bar{u}_j + \\ &+ \sum_{i=2}^{n} a_i (1 + e^{d} - e^{-x_1}) \bar{u}_i \geq [a_{11} e^{-x_1} + (1 + e^{d} - e^{-x_1}) a] \bar{u}. \end{aligned} \tag{I.12}$$

Из (I.I2) и (I.9) вытекает (как и при доказательстве леммы I.I) что $\bar{u}(x)$ не может иметь положительного максимума внутри Ω, откуда и следует оценка (I.I0).

Лемма I.3. Пусть $u(x,t) \in C^2(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяет в цилиндре Q_T неравенству

$$-u_t + a_{ij} u_{ij} + a_i u_i \geqslant a u, \tag{I.I3}$$

причем a_{ij}, a_i, $a \in C^0(Q_T)$, $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$, $a_{ij} = a_{ji}$. Пусть при любых $x,t \in Q_T$

$$\max_{Q_T} |a(x,t)| < C_0 \tag{I.I4}$$

Тогда

$$\max_{Q_T} u \leqslant e^{(1+C_0)T} \max\left\{0, \max_{\partial Q_T} u\right\}.^{*)} \tag{I.I5}$$

Доказательство. Полагая $u(x,t) = e^{C_0 t}\bar{u}(x,t)$, получим для функции $\bar{u}$ неравенство

$$-\bar{u}_t + a_{ij}\bar{u}_{ij} + a_i \bar{u}_i \geqslant (a + C_0)\bar{u}. \tag{I.I6}$$

Если $\bar{u}$ имеет положительный максимум в точке x_0, t_0, не принадлежащей ∂Q_T, то в ней неравенство (I.I6) невозможно в силу (I.I5). Поэтому

$$\bar{u}(x,t) \leqslant \max\left\{0, \max_{\partial Q_T} \bar{u}\right\}, \tag{I.I7}$$

откуда и следует (I.I5).

Лемма I.4. Пусть $u(x,t) \in C^2(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяет в цилиндре Q_T неравенству

*) Здесь и ниже ∂Q_T обозначает множество всех точек x,t, лежащих либо на нижнем основании, либо на боковой поверхности Q_T.

$$-u_t + a_{ij} u_{ij} \geqslant a u, \qquad (I.18)$$

причем a_{ij}, $a \in C^0(Q_T)$, $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Пусть при любых $x, t \in Q_T$ справедливо неравенство

$$|a(x,t)| < \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x,t)}{e^d(1+ne^d)}, \qquad (I.19)$$

где d – диаметр области Ω.

Тогда

$$\max_{Q_T} u(x,t) \leq (1+ne^d) \max\left\{0, \max_{\partial Q_T} u(x,t)\right\} \qquad (I.20)$$

<u>Доказательство</u>. Полагая $u(x,t) = (1+ne^d - \sum_{k=1}^{n} e^{-x_k})\,\bar{u}(x,t)$, как и при доказательстве леммы I.I, придем к неравенству

$$(1+ne^d - \sum_{k=1}^{n} e^{-x_k})(-\bar{u}_t + a_{ij}\bar{u}_{ij}) + 2a_{ij}e^{-x_j}\bar{u}_i \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}e^{-x_i} + a(1+ne^d - \sum_{k=1}^{n} e^{-x_k})\right\}\bar{u}. \qquad (I.21)$$

Отсюда и из (I.19) вытекает, что $\bar{u}(x,t)$ не может иметь положительный максимум в точке x_0, t_0, не принадлежащей ∂Q_T. Следовательно,

$$\max_{Q_T} \bar{u}(x,t) \leq \max\left\{0, \max_{\partial Q_T} \bar{u}(x,t)\right\}, \qquad (I.22)$$

откуда и следует (I.20).

§ 2. Оценка $|u_x|$ для решений эллиптических уравнений

Рассмотрим в ограниченной области Ω квазилинейное уравнение (0.I), предполагая, что коэффициенты $A_{ij}(x,u,p)$ и $B(x,u,p)$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и удовлетворяют при всех $x \in \Omega$, $|u| \leq M$ и любых p условиям

$$A_{ij}(x,u,p)\xi_i\xi_j \geq \xi^2, \quad \sqrt{\sum_{i,j}\left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}\right|^2} \leq \theta(|p|), \tag{2.I}$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u} = \sigma\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}}{\theta|p|^2}\right), \qquad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} = \sigma\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}}{\theta|p|}\right),$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_\ell} = \sigma\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}\right), \qquad \frac{\partial B}{\partial u} = \sigma\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}{\theta^2|p|^2}\right), \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \sigma\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}{\theta^2|p|}\right), \tag{2.2}$$

где $\theta(|p|)$ – монотонная функция $|p|$, $\theta(|p|) > 1/|p|$ при достаточно больших $|p|$ причем функция θ в (2.1) и порядковые члены в (2.2) зависят от M как от параметра.

Применим к обеим частям уравнения (0.I) оператор $u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Мы получим

$$A_{ij}u_{ijk}u_k + \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}u_{\ell k}u_k u_{ij} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial u}u_k^2 u_{ij} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}u_k u_{ij} =$$

$$= \frac{\partial B}{\partial p_\ell}u_{\ell k}u_k + \frac{\partial B}{\partial u}u_k^2 + \frac{\partial B}{\partial x_k}u_k. \tag{2.3}$$

Положим $v = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$ и обозначая

$$\dot{G}(x,u,p) = \frac{p_k}{|p|} G_{x_k} + |p| G_u^{*)}, \tag{2.4}$$

перепишем (2.3) в виде

$$1/2\, A_{ij} v_{ij} = A_{ij} u_{ki} u_{kj} + 1/2 \left(\frac{\partial B}{\partial p_\ell} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell} u_{ij} \right) v_\ell + \sqrt{v} (\dot{B} - \dot{A}_{ij} u_{ij}) \tag{2.5}$$

Учитывая (2.I) и применяя неравенство Коши, получим для всех $x \in \Omega$, где $|u_x| > 0$, неравенство

$$1/2\, A_{ij} v_{ij} > 1/2 \frac{\partial B}{\partial p_\ell} v_\ell - \tag{2.6}$$

$$-1/8 \sum_{ij} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell} \right)^2 v_\ell^2 + \left(\frac{\dot{B}}{|u_x|} - 1/2 \sum \dot{A}_{ij}^2 \right) v.$$

Умножим (2.6) на положительную функцию $f(v)$. Полагая $w = \int_1^v f(\tau)\, d\tau$ и учитывая, что $w_i = f v_i$, $w_{ij} = f v_{ij} + f' v_i v_j$, а также условие (2.2), приходим к неравенству

$$1/2\, A_{ij} w_{ij} \geq 1/2\, f' v_x^2 - 1/8\, \theta^2 f v_x^2 +$$

$$+ 1/2 \frac{\partial B}{\partial p_\ell} f v_\ell + \left(\frac{\dot{B}}{|u_x|} - 1/2 \sum \dot{A}_{ij}^2 \right) f v. \tag{2.7}$$

---

*) Такое обозначение применялось в работе [4].

Неравенство (2.7) мы получили для всех $x \in \Omega$, где $v(x)$ достаточно велико, скажем $v(x) \geqslant L$, причем L – известное число, определяемое условиями (2.2).

Выберем f так, чтобы

$$\theta^2 f = 2f' \tag{2.8}$$

Используя (2.7), (2.8) и неравенство Коши, получаем

$$A_{ij} w_{ij} \geqslant \tfrac{1}{2} f' v_x^2 + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell} f v_\ell + 2f\left(\frac{\dot{\mathcal{B}}}{|u_x|} - \tfrac{1}{2}\sum \dot{A}_{ij}^2\right) v \geqslant$$

$$\geqslant -\tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell}\right)^2 \frac{f^2}{f'} + 2f\left(\frac{\dot{\mathcal{B}}}{|u_x|} - \tfrac{1}{2}\sum \dot{A}_{ij}^2\right) v = \tag{2.9}$$

$$= f\left\{-\frac{1}{\theta^2}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{\mathcal{B}}}{|u_x|} - \tfrac{1}{2}\sum \dot{A}_{ij}^2\right) v\right\}.$$

Заметим теперь, что при достаточно больших v, скажем, при $v \geqslant L'$ (причем L' определяется лишь функцией $\theta(v)$)

$$f(v) = f(0) + \int_1^v f(\tau)\,d\tau \leq$$

$$\leq 2\int_1^v f'(\tau)\,d\tau = \int_1^v \theta^2(\sqrt{\tau})\, f(\tau)\,d\tau \leq C_0\,\theta^2(\sqrt{v})\, w^{*)} \tag{2.10}$$

---

*) При $\theta \geqslant 1$ неравенство (2.10) получается из тривиальных соображений с константой $C_0 = 1$, при $\frac{1}{|p|} \leqslant \theta < 1$ неравенство (2.10) нетрудно получить с некоторой константой C_0, зависящей от вида функции θ.

Таким образом, w удовлетворяет неравенству

$$A_{ij} w_{ij} \geqslant -C_0 \left\{ \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{B}_0}{\partial p_\ell} \right)^2 + \theta^2 \left(2 |\dot{\mathcal{B}}_0| |u_x| + \sum_{ij} \dot{A}_{ij}^2 |u_x|^2 \right) \right\} w \qquad (2.11)$$

во всех $x \in \Omega$, где $v(x) \geqslant \max(L, L')$. Из условий (2.2) следует, что во всех $x \in \Omega$, где $v(x) \geqslant L''$ (L'' - зависит лишь от диаметра d области Ω и от порядковых членов в (2.2)) коэффициент при n не превосходит величины $\frac{\sum_1^n A_{ii}}{e^d (1 + n e^d)}$. Применяя теперь лемму I.I, получим оценку

$$\max_{\Omega} w \leq c(\max_{\partial\Omega} w, f(L''), n, d). \qquad (2.12)$$

Учитывая, что $w = \int_1^v f(\tau)\, d\tau$, получаем, что $\max_{\Omega} |u_x| = (\max_{\Omega} v)^{1/2}$ оценивается величиной, зависящей только от $\max_{\partial\Omega} |u_x|$, n, d и от свойств функций, входящих в условия (2.I), (2.2). Таким образом, доказана следующая

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть коэффициенты уравнения (0.I) непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и удовлетворяют при всех $x \in \Omega$, $|u| \leq M$ и любых p условиям (2.I),(2.2) и пусть $u(x) \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ - произвольное решение этого уравнения, удовлетворяющее неравенству $|u(x)| \leq M$. Тогда $\max_{\Omega} |u_x|$ оценивается величиной, зависящей лишь от $\max_{\partial\Omega} |u_x|$, n, диаметра d области Ω, от функции θ и от порядковых членов в (2.2) (зависящих от M).

Предположим теперь, что функции $A_{ij}(x,u,p)$ и $\mathcal{B}(x,u,p)$ имеют вид

$$A_{ij}=A_{ij}(x,u,p_2,\ldots,p_n),\quad \mathcal{B}=\mathcal{B}(x,u,p_2,\ldots,p_n) \tag{2.13}$$

и удовлетворяют при всех $x\in\Omega$, $|u|\leq M$ и любых $p=p'=(p_2,\ldots,p_n)$ условиям

$$A_{ij}(x,u,p')\xi_i\xi_j \geqslant \xi^2 \tag{2.14}$$

и при $|p|\to\infty$

$$\begin{gathered}(A_{ij})_u=o\left(\frac{1}{|p|}\right),\quad (A_{ij})_x=o(1)\\ \mathcal{B}_u=o(1),\quad \mathcal{B}_x=o(|p|),\end{gathered} \tag{2.15}$$

причем порядковые члены в (2.15) зависят от M как от параметра.

Обозначая, как и при доказательстве теоремы 2.1, $v=\sum_{k=1}^{n}u_k^2$, и пользуясь обозначением (2.4), получим равенство (ср. (2.3))

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}A_{ij}v_{ij}=A_{ij}u_{ki}u_{kj}+\\ +\tfrac{1}{2}\sum_{\ell=2}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_\ell}-\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}u_{ij}\right)v_\ell+\left(\dot{\mathcal{B}}-\dot{A}_{ij}u_{ij}\right)\sqrt{v}.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Применяя неравенство Коши и учитывая (2.14), получим из (2.16) неравенство

$$A_{ij}v_{ij}-\sum_{\ell=2}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_\ell}-\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}u_{ij}\right)v_\ell \geqslant \left(\frac{2\dot{\mathcal{B}}}{|u_x|}-\sum\dot{A}_{ij}^2\right)v \tag{2.17}$$

для всех $x\in\Omega$, где $|u_x|>0$. Из условий (2.15) вытекает, что коэффициент при v в (2.17) во всех $x\in\Omega$, где $v(x)$

достаточно велико ($v(x) \geq L$; L зависит лишь от диаметра d области Ω и порядковых членов в (2.I5)) не превосходит величины $\frac{1}{e^d(1+ne^d)} < \frac{A_{11}}{e^d(1+ne^d)}$. Применяя теперь лемму I.2, получим оценку

$$\max_{\Omega} \leq (1+ne^d) \max_{\partial\Omega} v + L . \qquad (2.I8)$$

Таким образом, установлена

Теорема 2.2. Пусть коэффициенты уравнения (0.I) непрерывно дифференцируемы и имеют вид (2.I3) и удовлетворяют при всех $x \in \Omega$, $|u| \leq M$ и любых $p = p'$ условиям (2.I4), (2.I5) и пусть $u(x) \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ – произвольное решение этого уравнения, удовлетворяющее неравенству $|u(x)| \leq M$. Тогда $\max_{\Omega} |u_x|$ оценивается величиной, зависящей лишь от $\max_{\partial\Omega} |u_x|$, диаметра d области Ω и порядковых членов в (2.I5) (зависящих от M).

§ 3. Оценка $|u_x|$ для решений параболических уравнений

Рассмотрим в цилиндре Q_T квазилинейное уравнение (0.3), предполагая, что коэффициенты $A_{ij}(x,t,u,p)$ и $B(x,t,u,p)$ непрерывно дифференцируемы по аргументам x, u и p и удовлетворяют при всех $x,t \in Q_T$, $|u| \leq M$ и любых p следующим условиям

$$A_{ij}(x,t,u,p)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x,t,u,p)\xi^2, \quad \lambda(x,t,u,p)>0, \tag{3.1}$$

и при $|p|\to\infty$

$$(A_{ij})_u = O\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{|p|}\right), \quad (A_{ij})_x = O(\sqrt{\lambda}),$$

$$\mathcal{B}_u = O(1), \qquad \mathcal{B}_x = O(|p|), \tag{3.2}$$

причем порядковые члены в (3.2) зависят от M как от параметра.

Применим к обеим частям уравнения (0.3) оператор $u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Мы получим

$$-(u_k)_t u_k + A_{ij} u_{ijk} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial u} u_k^2 u_{ij} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} u_k u_{ij} =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell} u_{\ell k} u_k + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u} u_k^2 + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_k} u_k. \tag{3.3}$$

Полагая $v = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$ и пользуясь обозначением (2.4), получим

$$\tfrac{1}{2}(-v_t + A_{ij} v_{ij}) = A_{ij} u_{ki} u_{kj} +$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell} u_{ij}\right) v_\ell + \sqrt{v}\,(\dot{\mathcal{B}} - \dot{A}_{ij} u_{ij}). \tag{3.4}$$

Учитывая (3.1) и применяя неравенство Коши, выведем из (3.4) для любой точки x,t, где $|u_x(x,t)|>0$, неравенство

$$-v_t + A_{ij} v_{ij} + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell} u_{ij} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell}\right) v_\ell \geq \tag{3.5}$$

$$\geq \left(2\frac{\dot{\mathcal{B}}}{|u_x|} - \tfrac{1}{\lambda}\sum_{i,j} \dot{A}_{ij}^2\right) v.$$

Из условий (3.2) вытекает тогда, что коэффициент при v в (3.5) не превосходит по абсолютной величине некоторую константу C_0 во всех точках цилиндра Q_T, в которых $v(x,t)$ достаточно велико ($v(x,t) \geq L$; L зависит лишь от диаметра d области Ω и от порядковых членов в (3.2)). Применяя тогда лемму I.3, получим

$$\max_{Q_T} v \leq e^{(1+C_0)T} \max_{\partial Q_T} v + L. \qquad (3.6)$$

Таким образом, доказана

<u>Теорема 3.I</u>. Пусть коэффициенты уравнения (0.3) непрерывно дифференцируемы по аргументам x, u и p и удовлетворяют при всех $x,t \in Q_T$, $|u| \leq M$ и любых p условиям (3.I), (3.2) и пусть $u(x,t)$ - произвольное решение ($\in C_3(Q_T) \cap C_1(\bar{Q}_T)$) этого уравнения, удовлетворяющее неравенству $|u(x,t)| \leq M$. Тогда $\max |u_x|$ оценивается величиной, зависящей лишь от $\max_{\partial Q_T} |u_x|$, диаметра d области Ω и порядковых членов в (3.2) (зависящих от M).

При определенных условиях на степень неравномерности параболического уравнения (0.3) и функцию $\lambda(x,t,u,p) = \lambda(|p|)$ из условия (0.4) возможность более свободного вхождения переменных x и u в коэффициенты уравнения (0.3), чем это позволяет теорема 3.I или результаты [6] , может обеспечивать следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть коэффициенты уравнения (0.3) непрерывно дифференцируемы по аргументам x, u и p и удовлетворяют при всех $x,t\in Q_T$, $|u|\leq M$ и любых p условиям

$$A_{ij}(x,t,u,p)\xi_i\xi_j \geq \lambda(|p|)\xi^2, \quad \sqrt{\sum_{i,j}\left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}\right|^2} \leq \theta(|p|), \tag{3.7}$$

где $\lambda(|p|)$, $\theta(|p|)$ и $\frac{\theta(|p|)}{\lambda(|p|)}$ – положительные монотонные функции $|p|$, $\frac{\theta}{\lambda} > \frac{1}{|p|}$ при достаточно больших $|p|$ и при $|p|\to\infty$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u} = o\left(\frac{\lambda^{3/2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}}{\theta\,|p|^2}\right) \qquad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} = o\left(\frac{\lambda^{3/2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}}{\theta\,|p|}\right),$$

$$\mathcal{B}_p = o\left(\lambda\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}\right), \quad \mathcal{B}_u = o\left(\frac{\lambda^2\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}{\theta^2|p|^2}\right), \quad \mathcal{B}_x = o\left(\frac{\lambda^2\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}{\theta^2|p|}\right), \tag{3.8}$$

причем функция $\theta(|p|)$ в (3.7) и порядковые члены в (3.8) зависят от M как от параметра. Пусть $u(x,t)$ – произвольное решение ($\in C^3(Q_T)\cap C^1(\bar{Q}_T)$) этого уравнения, удовлетворяющее неравенству $|u(x,t)|\leq M$. Тогда $\max|u_x|$ оценивается величиной, зависящей лишь от $\max\limits_{\partial Q_T}|u(x,t)|$, n, диаметра d области Ω, от функций λ и θ и от порядковых членов в (3.10) (завися-

щих от M).

Доказательство. Из неравенства (3.4) (см. доказательство теоремы 3.I), учитывая (3.7) и применяя неравенство Коши, выведем неравенство

$$\frac{1}{2}(-v_t + A_{ij} v_{ij}) \geq \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial p_\ell} v_\ell -$$

$$-\frac{1}{8}\lambda \sum_{ij}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_\ell}\right)^2 v_\ell^2 + \left(\frac{\dot{B}}{|u_x|} - \frac{1}{2\lambda}\sum \dot{A}_{ij}^2\right) v, \tag{3.9}$$

справедливое во всех точках $x, t \in Q_T$, где $|u_x(x,t)| > 0$. Умножим (3.II) на положительную функцию $f(v)$ и положим

$$w = \int_1^v f(\tau)\, d\tau \tag{3.I0}$$

Тогда учитывая, что $w_i = f v_i$, $w_{ij} = f v_{ij} + f' v_i v_j$, а также условия (3.8). получим для всех $x, t \in Q_T$, где $v \geq L$ (L зависит лишь от порядковых членов в (3.I0)), неравенство

$$\frac{1}{2}(-w_t + A_{ij} w_{ij}) \geq \frac{1}{2} f' A_{ij} v_i v_j - \frac{1}{8}\frac{\theta^2}{\lambda} f v_x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial p_\ell} f v_\ell + \left(\frac{\dot{B}}{|u_x|} - \frac{1}{2\lambda}\sum \dot{A}_{ij}^2\right) f v. \tag{3.II}$$

Выберем f так, чтобы

$$\frac{f\theta^2}{\lambda} = 2 f' \lambda. \tag{3.I2}$$

Тогда используя (3.II), (3.I2) и неравенство Коши, получаем

$$-w_t + A_{ij} w_{ij} \geq \frac{1}{2} f' \lambda v_x^2 + \frac{\partial B}{\partial p_\ell} f v_\ell +$$

$$+2\left(\frac{\dot{B}}{|u_x|} - \frac{1}{2}\sum \dot{A}_{ij}^2\right) f v \geq$$

$$\geq -\tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell}\right)^2 \frac{f^2}{f'\lambda} + 2\left(\frac{\dot{\mathcal{B}}}{|u_x|} - \tfrac{1}{2}\lambda\sum_{i,j}\dot{A}_{ij}^2\right) f v =$$

$$= f\left[-\frac{\lambda}{\theta^2}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell}\right)^2 + \left(\frac{2\dot{\mathcal{B}}}{|u_x|} - \tfrac{1}{\lambda}\sum \dot{A}_{ij}^2\right) v\right]. \tag{3.13}$$

При достаточно больших v (при $v \geq L'$; L' зависит лишь от функций θ и λ) имеем

$$f(v) \leq 2\int_1^v f'(\tau)\,d\tau = \int_1^v f(\tau)\,\frac{\theta^2(\sqrt{\tau})}{\lambda^2(\sqrt{\tau})}\,d\tau \leq c_0\,\frac{\theta^2}{\lambda^2}\,w. \tag{3.14}$$

Таким образом, w удовлетворяет неравенству

$$-w_t + A_{ij}\,w_{ij} \geq$$

$$\geq -c_0\left[\tfrac{1}{\lambda}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_\ell}\right)^2 + 2\,\frac{\theta^2}{\lambda^2}\,|\dot{\mathcal{B}}|\,|u_x| + \frac{\theta^2}{\lambda^3}\sum_{i,j}\dot{A}_{ij}^2\,|u_x|^2\right] \tag{3.15}$$

во всех $x, t \in Q_T$, где $v \geq \max(L, L')$. Из условий (3.8) теперь следует, что для любых $x, t \in Q_T$, где $v \geq L''$ (L'' зависит лишь от диаметра d области Ω, от порядковых членов в (3.8) и от L и L') коэффициент при w в (3.15) не превосходит величины $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}{e^d(1+ne^d)}$. Применяя тогда лемму I.4, получим оценку

$$\max_{Q_T} w \leq c\left(\max_{\partial Q_T} w,\ f(L''),\ n,\ d\right) \tag{3.17}$$

Учитывая (3.10), заключаем, что $\max\limits_{Q_T}|u_x| = (\max\limits_{Q_T} v)^{1/2}$ оценивается величиной, зависящей от $\max\limits_{\partial Q_T}|u_x|, n, d$, от свойств функций θ и λ из условия (3.I) и от порядковых членов в (3.2). Теорема 3.2 доказана.

---

*) См. сноску к формуле (2.10).

Литература

I. О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.Физматгиз, I964.

2. О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. "Наука", М., I967.

3. О.А.Ладыженская и Н.Н.Уральцева. О некоторых классах неравномерно эллиптических уравнений. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, том II, I29-I49, "Наука", Л.I968.

4. j.Serrin.The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables

5. И.Я.Бакельман. Гиперповерхности с данной средней кривизной и квазилинейные эллиптические уравнения с сильными нелинейностями. Матем. сборник, I968, 75, № 4, 604-638.

6. Н.М.Ивочкина, А.П.Осколков. Нелокальные оценки первых производных решений первой краевой задачи для неравномерно эллиптических и неравномерно параболических недивергентных уравнений. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, том II, 6-72.