Г. А. КАМЕНСКИЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Введение

В этой статье исследуется асимптотическое поведение решений уравнений

$$y''(x) - M(x)\,y(x-\Delta(x)) = P(x); \quad A \leqslant x < \infty; \tag{1}$$

$$y''(x) + M(x)\,y(x-\Delta(x)) = P(x); \quad A \leqslant x < \infty, \tag{2}$$

неустойчивого (1) и периодического (2) типов.

Функции $M(x)$, $P(x)$ и $\Delta(x) \geqslant 0$ заданы и непрерывны при $A \leqslant x < \infty$. Всюду будем полагать, что существует такое число x_0, что $M(x) \geqslant 0$ при $x > x_0$ и

$$\int_A^\infty M(t)\,dt = \infty, \tag{3}$$

а функция $\Delta(x)$ такова, что

$$\lim_{x\to\infty} (x - \Delta(x)) = \infty. \tag{4}$$

Точка A называется начальной. Пусть $z \geqslant A$; под $\gamma(z)$ будем понимать верхнюю грань чисел $x > z$, для которых $x - \Delta(x) < z$. Если таких чисел нет, то $\gamma(z) = z$. Заметим, что всегда $z \leqslant \gamma(z)$ и, если $z_1 < z_2$, то $\gamma(z_1) \leqslant \gamma(z_2)$. Функция $\Delta(x)$ определяет множество E_0, состоящее из точки A и тех точек $x - \Delta(x)\,(x \geqslant A)$, для которых $x - \Delta(x) < A$. На множестве E_0 задается функция $\varphi(x)\,(x \in E_0)$, называемая начальной.

Функция $y(x)$ называется решением уравнения (1) [соответственно (2)], соответствующим начальной функции $\varphi(x)$, если $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1) [соответственно (2)] при $x \geqslant A$, а при $x - \Delta(x) \leqslant A$ $(x \geqslant A)$ $y(x-\Delta(x)) \equiv \varphi(x-\Delta(x))$.

Введем следующие обозначения:

$$\delta_0 = \inf_{[A,\,\infty)} \Delta(x); \quad \Delta_0 = \sup_{[A,\,\infty)} \Delta(x); \quad m_0 = \inf_{[A,\,\infty)} M(x); \quad M_0 = \sup_{[A,\,\infty)} M(x).$$

А. Д. Мышкисом [1] доказано, что начальная функция $\varphi(x)$ и значение $y'(A)$ производной от решения в точке A (под производной от решения

в точке A понимается производная справа) единственным образом определяют решение уравнения (1) [соответственно (2)], график которого проходит через точку $(A, \varphi(A))$ с направлением $y'(A)$.

Всюду будем полагать, что решение $y(x)$ не обращается тождественно в нуль для всех x бо́льших, чем некоторое число x_0.

§ 1. О решениях уравнений неустойчивого типа

Теорема 1. *Пусть* $P(x) \geqslant 0$ $(P(x) \leqslant 0)$ *при* $x > x_0$. *Тогда, если решение* $y(x)$ *уравнения* (1) *остается неотрицательным (неположительным) при* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1, *то*:

либо а) $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \infty\,(-\infty)$ и $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = \infty\,(-\infty)$,

либо б) $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$.

Доказательство. Будем считать, что $\varphi(x)$, $M(x)$, $P(x)$ и $y(x)$ всюду неотрицательны. В общем случае, в силу (4), этого можно добиться перенесением начальной точки достаточно далеко вправо.

Проинтегрируем (1) от A до x:

$$y'(x) = y'(A) + \int_A^x M(t)\, y(t - \Delta(t))\, dt + \int_A^x P(t)\, dt. \tag{5}$$

Из (5) следует, что $y'(x)$ не убывает. Значит существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x)$.

Не может быть $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) < 0$, так как в этом случае было бы $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = -\infty$.

Пусть $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$. Тогда необходимо

$$\int_A^\infty M(t)\, y(t - \Delta(t))\, dt < \infty \tag{6}$$

и $y'(x) \leqslant 0$ при $A \leqslant x < \infty$. Значит $y(x)$ не возрастает и ограничена снизу. Поэтому существует $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$. Но в силу (3) и (6) предел этот не может быть отличен от нуля.

Пусть $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \infty$, а в силу (5) и (3) необходимо и $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = \infty$.

Следствие. Все решения уравнения

$$y''(x) - M(x)\, y(x - \Delta(x)) = 0; \quad A \leqslant x < \infty, \tag{7}$$

разбиваются на три типа:

I. $\lim\limits_{x \to \infty} |y(x)| = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} |y'(x)| = \infty$.

II. $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$.

III. Решение $y(x)$ меняет знак на всяком интервале (a, ∞), где a — произвольное число.

Если в уравнении (7) положить $\Delta(x) \equiv 0$, то мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение $y''(x) - M(x)\, y(x) = 0$. Из теории обыкновенных

дифференциальных уравнений известно, что это уравнение не может иметь решений, принадлежащих к типу III (см. [2], гл. VI, § 2). Однако уравнение (7) может иметь такие решения.

Пример. Если в (7) положить $M(x) \equiv 1$; $\Delta(x) \equiv \pi$; $A = \pi$, то $y(x) = \cos x$ будет являться решением с начальными данными: $\varphi(x) = \cos x$; $y'(A) = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\int\limits_A^\infty P(t)\,dt$ *сходится. Тогда для всякого решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *сохраняющего знак при* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1, *будет*

либо а) $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} |y'(x)| = \infty$,

либо б) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} |y(x)| = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

Доказательство. Если $\int\limits_A^\infty M(t)\,|y(t-\Delta(t))|\,dt = \infty$, то имеет место а).

Если $\int\limits_A^\infty M(t)\,|y(t-\Delta(t))|\,dt$ сходится, то существует конечный $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x)$, который, как и ранее, не может быть отличен от нуля. С другой стороны, в силу (3) тогда необходимо $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} |y(x-\Delta(x))| = 0$ и в силу (4) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} |y(x)| = 0$.

Покажем, что в условиях теоремы 2 могут существовать не меняющие знак решения такие, что $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} |y(x)| = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$, а $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} |y(x)| > 0$.

Пример. Фиксируем последовательность чисел:

$$x_k = e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Возьмем последовательность непересекающихся сегментов $\delta_k = [x_k,\ x_k + 1]$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Определим функции:

$$M_k(x) = \begin{cases} \sin^2(x - x_k)\pi, & \text{если } x \in \delta_k, \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} \delta_k. \end{cases}$$

Положим

$$\overline{M}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(x).$$

Очевидно, что

$$0 \leqslant \overline{M}(x) \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \overline{M}(t)\,dt = \infty.$$

Пусть

$$\overline{P}(x) = \overline{M}(x)\,(\sin\ln x - 1) - \frac{\sin\ln(x+1) + \cos\ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Покажем, что $\int\limits_0^\infty \overline{P}(t)\,dt$ сходится. В самом деле,

$$L = \int\limits_0^\infty \left| \frac{\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1)}{(t+1)^2} \right| dt < 2,$$

$$N = \int\limits_0^\infty |M(t)(\sin\ln t - 1)|\,dt < \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_k}^{x_k+1} |\sin\ln t - 1|\,dt.$$

Заметим, что $\sin \ln x_k = 1$. Очевидно, что максимум $|\sin \ln x - 1|$ на δ_k достигается на правом конце этого сегмента. Отметим, что

$$|\ln(x_k+1) - \ln x_k| = \frac{1}{x_k+\theta} < \frac{1}{x_k} \quad (0<\theta<1),$$

далее,

$$|\sin \ln(x_k+1) - 1| = |\sin \ln(x_k+1) - \sin \ln x_k| =$$

$$= \left|2\cos\frac{\ln(x_k+1)+\ln x_k}{2}\sin\frac{\ln(x_k+1)-\ln x_k}{2}\right| < \frac{1}{x_k}.$$

Значит, всюду на δ_k будет

$$|\sin \ln x - 1| < \frac{1}{x_k}.$$

Тогда

$$N < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k},$$

откуда

$$\int_0^{\infty} |P(t)|\,dt < L + N < 2 + e^{-\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k\pi} < \infty.$$

Если положить теперь в уравнении (1) $M(x) \equiv \overline{M}(x)$; $P(x) \equiv \overline{P}(x)$; $\Delta(x) \equiv 1$; $A = 0$ и взять начальные данные $\varphi(x) = (\sin \ln(x+1) - 1$; $y'(A) = 1$, то легко видеть, что требования теоремы 2 будут выполнены, а решением будет функция $y(x) = (\sin \ln(x+1) - 1)$.

Теорема 3. *Пусть* $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} M(x) > 0$; $\Delta_0 < \infty$ *и* $\int_A^{\infty} P(t)\,dt$ *сходится. Тогда для всякого решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *сохраняющего знак при всех* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1, *будет*

либо а) $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} |y'(x)| = \infty$,

либо б) $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $\varphi(x) \geqslant 0$; $M(x) \geqslant m_0 > 0$ и $y(x) \geqslant 0$. Если $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) \neq 0$, то имеет место а). Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$. Тогда $\int_A^{\infty} M(t)\,y(t-\Delta(t))\,dt$ сходится и $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} y(x) = 0$. Предположим, что $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} y(x) = \varepsilon_0 > 0$. Множество E тех x, где $y(x) > \frac{\varepsilon_0}{2}$, состоит из счетного числа непересекающихся интервалов $\delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ $(\alpha_i > \beta_{i-1}$; $i = 1, 2, 3, \ldots)$. Найдем бесконечную последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \to \infty$ таких, что $y(x_k) > \frac{3}{4}\varepsilon_0$ и никакие две точки x_k и x_l $(k \neq l)$ не попадают в один и тот же интервал δ_i. Рассмотрим те интервалы δ_{i_k}, куда попали точки x_k. В силу того, что $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$ и $y(\alpha_i) = y(\beta_i) = \frac{\varepsilon_0}{2}$,

будет $\lim\limits_{k\to\infty}(\beta_{i_k}-\alpha_{i_k})=\infty$. Найдется такое число k_0, что при $k\geqslant k_0$ будет $\beta_{i_k}-\alpha_{i_k}>2\Delta_0$. Тогда $y(x-\Delta(x))>\frac{\varepsilon_0}{2}$ при $x\in(\alpha_{i_k}+\Delta_0,\ \beta_{i_k})$. Поэтому

$$\int_A^\infty M(t)\,y(t-\Delta(t))\,dt>\sum_{k=k_0}^{\infty}m_0\int_{\alpha_{i_k}+\Delta_0}^{\beta_{i_k}}y(t-\Delta(t))\,dt>$$

$$>\sum_{k=k_0}^{\infty}m_0\frac{\varepsilon_0}{2}(\beta_{i_k}-\alpha_{i_k}-\Delta_0)=\infty.$$

Получено противоречие. Значит $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\,y(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=0$.

Лемма 1 *. Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица при $A\leqslant x<\infty$ и $\int_A^\infty|f(t)|\,dt$ сходится, то $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Лемма 2. Если производная $f'(x)$ ограничена при $A\leqslant x<\infty$ и $\Delta(x)$ удовлетворяет условию Липшица при $A\leqslant x<\infty$, то $\psi(x)=f(x-\Delta(x))$ удовлетворяет условию Липшица при $\gamma(A)\leqslant x<\infty$.

Доказательство. Пусть $x_1,\ x_2\in[\gamma(A),\ \infty)$.

$$\psi(x_1)-\psi(x_2)=f(x_1-\Delta(x_1))-f(x_2-\Delta(x_2))=$$

$$=[x_1-\Delta(x_1)-x_2+\Delta(x_2)]f'(\xi)\quad(\xi\in[(x_1-\Delta(x_1)),\ (x_2-\Delta(x_2))]).$$

Но $|\Delta(x_1)-\Delta(x_2)|<K|x_1-x_2|$.
Значит

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|\leqslant(K+1)\sup_{[A,\ \infty)}f'(x)\,|x_1-x_2|.$$

Теорема 4. *Пусть* $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\,M(x)>0$; $\left|\int_A^x P(t)\,dt\right|<C$ *при* $A\leqslant x<\infty$ *и* $\Delta(x)$ *удовлетворяет условию Липшица при* $A\leqslant x<\infty$. *Тогда для всякого решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *сохраняющего знак при* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1, *будет*

либо а) $\lim\limits_{x\to\infty}|y(x)|=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}|y'(x)|=\infty$,

либо б) $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=0$ и $|y'(x)|<C_1$ при $A\leqslant x<\infty$.

Доказательство. Если $\int_A^\infty M(t)\,|y(t-\Delta(t))|\,dt=\infty$, то имеет место а).

Если $\int_A^\infty M(t)\,|y(t-\Delta(t))|\,dt$ сходится, то $|y'(x)|<C_1$ при $A\leqslant x<\infty$,

а в силу того, что $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\,M(x)>0$, сходится интеграл $\int_A^\infty|y(t-\Delta(t))|\,dt$.

Но по лемме 2 $y(x-\Delta(x))$ удовлетворяет условию Липшица, а тогда по лемме 1 $\lim\limits_{x\to\infty}y(x-\Delta(x))=0$ и в силу (4) $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=0$.

---

* И. П. Натансон [3].

Теорема 5. *Пусть функции* $M(x)$ и $P(x)$ *представимы в виде*

$$M(x)=M_1+M_2(x) \quad \text{и} \quad P(x)=P_1+P_2(x), \tag{8}$$

где $M_1>0$ и P_1 — *некоторые константы, а интегралы* $\int\limits_A^x M_2(t)\,dt$ *и* $\int\limits_A^x P_2(t)\,dt$ *ограничены при* $A\leqslant x<\infty$. (Такое представление возможно, если, например, $M(x)$ и $P(x)$ — периодические функции, или если существуют пределы $M^*=\lim\limits_{x\to\infty} M(x)$ и $P^*=\lim\limits_{x\to\infty} P(x)$ и интегралы $\int\limits_A^x (M^*-M(t))\,dt$ и $\int\limits_A^x (P^*-P(t))\,dt$ ограничены при $A\leqslant x<\infty$).

Тогда, если $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} M(x)>0$ *и* $\Delta(x)$ *удовлетворяет условию Липшица при* $A\leqslant x<\infty$, *то все решения уравнения* (1) *разбиваются на три типа:*

I. $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)|=\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} |y'(x)|=\infty$.

II а. $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=-\dfrac{P_1}{M_1}$ *и* $|y'(x)|<C_1$ *при* $A\leqslant x<\infty$, *причем* $y(x)\neq-\dfrac{P_1}{M_1}$ *при достаточно больших* x.

III. *График решения* $y(x)$ *пересекает прямую* $y=-\dfrac{P_1}{M_1}$ *на любом интервале* $(a,\ \infty)$, *где* a — *произвольное число.*

Доказательство. Заменой $z(x)=y(x)+\dfrac{P_1}{M_1}$ уравнение (1) приводится к уравнению

$$z''(x)-M(x)z(x-\Delta(x))=P_2(x)-\frac{P_1}{M_1}M_2(x); \quad A\leqslant x<\infty. \tag{9}$$

Для уравнения (9) выполняются требования теоремы 4, что и доказывает теорему.

Замечание. Если в условиях теоремы 5 интегралы $\int\limits_A^\infty M_2(t)\,dt$ и $\int\limits_A^\infty P_2(t)\,dt$ сходятся, то для решения типа IIа будет $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x)=0$.

Теорема 6. *Пусть даны два уравнения:*

$$y''(x)-M(x)y(x-\Delta(x))=0; \quad A\leqslant x<\infty \tag{7}$$

$$\overline{y}''(x)-\overline{M}(x)\overline{y}(x-\overline{\Delta}(x))=0; \quad A\leqslant x<\infty \tag{10}$$

и пусть $y(x)$ *и* $\overline{y}(x)$ — *решения этих уравнений, соответствующие начальным данным* $\varphi(x)$, $y'(A)$ *и* $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{y}'(A)$. *Тогда*

а) *Если*

$$\overline{M}(x)\geqslant M(x)\geqslant 0; \qquad \overline{\Delta}(x)\leqslant\Delta(x);$$

$$\overline{y}'(A)\geqslant y'(A)\geqslant 0; \quad (\overline{y}'(A)\leqslant y'(A)\leqslant 0);$$

$$\overline{\varphi}(x)\geqslant\varphi(x)\geqslant 0; \qquad (\overline{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant 0);$$

обе функции $\varphi(x)$ *и* $\overline{\varphi}(x)$ *заданы на* E_0+E_0 *и по крайней мере одна из них не убывает (не возрастает) на этом множестве, то* $\overline{y}(x)\geqslant y(x)$ $(\overline{y}(x)\leqslant y(x))$ при $A\leqslant x<\infty$.

б) *Если*

$$M(x)\geqslant\overline{M}(x)\geqslant 0;\quad \overline{\Delta}(x)\leqslant\Delta(x);$$
$$\overline{y}'(A)\leqslant y'(A)\leqslant 0;\quad (\overline{y}'(A)\geqslant y'(A)\geqslant 0);$$
$$\varphi(x)\geqslant\overline{\varphi}(x)\geqslant 0;\quad (\varphi(x)\leqslant\overline{\varphi}(x)\leqslant 0);$$

$\varphi(x)$ *не возрастает (не убывает) при* $x\in E_0$, *а* $y(x)$ *не возрастает (не убывает) при* $A\leqslant x<\infty$, *то* $y(x)\geqslant\overline{y}(x)$ $(y(x)\leqslant\overline{y}(x))$ *при* $A\leqslant x<\infty$.

Доказательство. Все утверждения доказываются аналогично. Докажем, например, утверждение б).

Предположим дополнительно, что $\varphi(A)>\overline{\varphi}(A)$ и $\overline{y}'(A)<y'(A)$.

Общий случай следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий [1].

Предположим противное. Пусть x_0 — нижняя грань тех x, где $\overline{y}(x)>y(x)$. Так как $\varphi(A)>\overline{\varphi}(A)$, то $x_0>A$. В силу непрерывности решений необходимо $\overline{y}(x_0)=y(x_0)$. Но тогда должно быть $y'(x_0)\leqslant\overline{y}'(x_0)$.

С другой стороны, так как $y(x)$ не возрастает и $\overline{\Delta}(x)\leqslant\Delta(x)$, то $y(x-\Delta(x))\geqslant y(x-\overline{\Delta}(x))$. Но при $x-\overline{\Delta}(x)<x_0$ будет $y(x-\overline{\Delta}(x))\geqslant\overline{y}(x-\overline{\Delta}(x))$. Поэтому при $x<x_0$ будет $y(x-\Delta(x))\geqslant\overline{y}(x-\overline{\Delta}(x))$.

Так как

$$y'(x_0)=y'(A)+\int_A^{x_0}M(t)\,y(t-\Delta(t))\,dt,$$

$$\overline{y}'(x_0)=\overline{y}'(A)+\int_A^{x_0}\overline{M}(t)\,\overline{y}(t-\overline{\Delta}(t))\,dt$$

и $\overline{y}'(A)<y'(A)$, то необходимо $\overline{y}'(x_0)<y'(x_0)$.

Мы пришли к противоречию.

Следствие. Пусть выполнены условия следствия к теореме 1, а решение $y(x)$ уравнения (7) принадлежит к типу I. Тогда при достаточно больших x будет

$$y_1(x)=a_1e^{\lambda(\sqrt{m_0}\Delta_0)\sqrt{m_0}x}\leqslant|y(x)|\leqslant a_2e^{\lambda(\sqrt{M_0}\delta_0)\sqrt{M_0}x}=y_2(x),$$

где $\lambda(p)$ есть единственный положительный корень уравнения $\lambda^2-e^{-\lambda p}=0$ $(p>0)$, a_1 и a_2 — некоторые положительные константы.

Доказательство. Для доказательства достаточно, используя теорему 6а, сравнить $y(x)$ с $y_2(x)$ и $y_1(x)$, являющимися соответственно решениями уравнений:

$$y''(x)-M_0y(x-\delta_0)=0,$$
$$y''(x)-m_0y(x-\Delta_0)=0,$$

причем за начальную точку следует принять такое большое число A_1, что при $x>A_1-\Delta_0$, $y(x)$ и $y'(x)$ сохраняют знак и монотонно стремятся к ∞ (или к $-\infty$), а числа a_1 и a_2 подобрать так, чтобы при $A_1-\Delta_0\leqslant x\leqslant A_1$ выполнялись неравенства

$$a_1e^{\lambda(\sqrt{m_0}\Delta_0)\sqrt{m_0}x}\leqslant|y(x)|\leqslant a_2e^{\lambda(\sqrt{M_0}\delta_0)\sqrt{M_0}x}$$

и

$$a_1\lambda(\sqrt{m_0}\Delta_0)\sqrt{m_0}\,e^{\lambda(\sqrt{m_0}\Delta_0)\sqrt{m_0}A_1}\leqslant|y'(A_1)|\leqslant a_2\lambda(\sqrt{M_0}\delta_0)\sqrt{M_0}\,e^{\lambda(\sqrt{M_0}\delta_0)\sqrt{M_0}A_1}.$$

Теорема 7. *Пусть* $M(x) \geqslant 0$ *при* $A \leqslant x < \infty$; $\varphi(x) \geqslant 0$ $(\varphi(x) \leqslant 0)$ *при* $x \in E_0$ *и*

$$\left.\begin{aligned} y'(A) &> -\sqrt{m_0}\,\varphi(A)\,e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(A)-A)} \\ (y'(A) &< -\sqrt{m_0}\,\varphi(A)\,e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(A)-A)}). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тогда, если $y(x)$ *есть решение* (7), *соответствующее этим начальным данным, то* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty\,(-\infty)$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \infty\,(-\infty)$.

Доказательство. Предположим, что $\varphi(A) > 0$ и $m_0 > 0$. Если по крайней мере одно из этих чисел равно нулю, то $y'(A) > 0$, а так как $y'(x)$ не убывает при $A \leqslant x < \infty$, то $y(x)$ может принадлежать только к типу I следствия к теореме 1 и, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \infty$.

1) Пусть $\gamma(A) > A$. Покажем, что $y(x) > 0$ при $A \leqslant x \leqslant \gamma(A)$. Из того, что $\chi(\alpha) = 1 - \alpha e^{-\alpha} > 0$ следует, что $y^*(x) = \varphi(A)[1 - \sqrt{m_0}\,(x - A) \times \times e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(A)-A)}] > 0$ при $A \leqslant x \leqslant \gamma(A)$. Предположим, что $\bar{x}$ — самый левый нуль $y(x)$ и $A < \bar{x} \leqslant \gamma(A)$. Тогда $y(x) > 0$ при $x < \bar{x}$, а так как $\varphi(x) \geqslant 0$ $(x \in E_0)$, то $y'(x)$ не убывает при $x < \bar{x}$; следовательно, при $x < \bar{x}$ будет $y(x) \geqslant y^*(x)$. Значит, и $y(\bar{x}) \geqslant y^*(\bar{x})$. Но $y^*(\bar{x}) > 0$ и мы пришли к противоречию. Итак, $y(x) > 0$ при $A \leqslant x \leqslant \gamma(A)$. Отсюда следует, что $y'(x)$ не убывает при $A \leqslant x \leqslant \gamma(A)$. Значит, $y(x) \geqslant y^*(x)$ при $A \leqslant x \leqslant \gamma(A)$.

Из (11) следует, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что

$$y'(A) = -\sqrt{m_0}\,\varphi(A)\,e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(A)-A)} + \varepsilon_0.$$

Функция

$$\bar{y}(x) = \varphi(A)\,e^{-\sqrt{m_0}(x-A)} + \frac{2\alpha}{\sqrt{m_0}}\operatorname{sh}\sqrt{m_0}\,(x - A)$$

является решением уравнения

$$\bar{y}''(x) - m_0\bar{y}(x) = 0, \tag{12}$$

соответствующим начальным данным

$$\bar{y}(\gamma(A)) = \varphi(A)\,e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(A)-A)} + \frac{2\alpha}{\sqrt{m_0}}\operatorname{sh}\sqrt{m_0}(\gamma(A) - A),$$

$$\bar{y}'(\gamma(A)) = -\sqrt{m_0}\,\varphi(A)\,e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(A)-A)} + 2\alpha\operatorname{ch}\sqrt{m_0}(\gamma(A) - A).$$

Число $\alpha > 0$ выбрано столь малым, что

$$\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2\operatorname{ch}\sqrt{m_0}(\gamma(A) - A)}, \tag{13}$$

$$\alpha < \frac{\sqrt{m_0}\,\varphi(A)\,[1 - (\sqrt{m_0}(\gamma(A) - A) + 1)\,e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(A)-A)}]}{2\operatorname{sh}\sqrt{m_0}(\gamma(A) - A)}. \tag{14}$$

Очевидно, что $\bar{y}(A) = \varphi(A)$. Из (14) следует, что $\bar{y}(x) < y^*(x)$ при $A < x \leqslant \gamma(A)$. Значит, $\bar{y}(x) \leqslant y(x)$ при $A \leqslant x \leqslant \gamma(A)$. Из (13) следует, что $\bar{y}'(\gamma(A)) < y'(\gamma(A))$.

Предположим, что $y(x)$ может принимать нулевые значения при $A \leqslant x < \infty$. Пусть $\bar{x}$ — самый левый нуль $y(x)$. Доказано, что $\bar{x} > \gamma(A)$. Но $y(x) > 0$ при $x < \bar{x}$, поэтому $y'(x)$ не убывает при $x < \bar{x}$. Пусть x^* — нижняя грань тех $x > A$, где $\bar{y}(x) > y(x)$. Очевидно, что $\gamma(A) < x^* < \bar{x}$. Приняв теперь точку $\gamma(A)$ за начальную и рассуждая, как при доказательстве теоремы 6б,

придем к противоречию, доказав одновременную необходимость неравенств $y'(x^*) \leqslant \bar{y}'(x^*)$ и $y'(x^*) > \bar{y}'(x^*)$.

Итак, $y(x) > 0$, при $A \leqslant x < \infty$.

Поэтому $y(x)$ может принадлежать либо к типу I, либо к типу II. Но $y(x)$ не может принадлежать к типу II, так как тогда для $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ будут выполнены требования теоремы 6б, если за начальную точку принять $\gamma(A)$ и взять указанные выше начальные условия, и необходимо было бы $\bar{y}(x) < y(x)$ при $A \leqslant x < \infty$. Но это невозможно, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \bar{y}(x) = \infty$, а по нашему предположению $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$. Итак, $y(x)$ может принадлежать только к типу I и, следовательно, $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = \infty$.

2) Пусть $\gamma(A) = A$. Тогда $y'(A) = -\sqrt{m_0}\,\varphi(A) + \varepsilon_0$; множество E_0 вырождается в точку A. Сравнивая $y(x)$ с решением (12),

$$\bar{y}(x) = \varphi(A) e^{-\sqrt{m_0}(x-A)} + \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{m_0}} \operatorname{sh} \sqrt{m_0}(x-A),$$

соответствующим начальным данным $\bar{y}(A) = \varphi(A)$ и $\bar{y}'(A) = -\sqrt{m_0}\,\varphi(A) + \frac{\varepsilon_0}{2}$, аналогично предыдущему докажем, что $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = \infty$.

Следствие. Пусть решение $y(x)$ уравнения (7) принадлежит к типу II. Пусть $x^* \geqslant x_0$ — нижняя грань тех x, где $y(x) > 0$ ($y(x) < 0$), а $y'(t) < 0$ ($y'(t) > 0$) и не убывает (не возрастает) при $t > x$. Тогда

$$|y(x)| \leqslant |y(x^*)|\, e^{-\sqrt{m_0}} \int\limits_{x^*}^{x} e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(t)-t)}\, dt. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $x > x^*$ — произвольная точка. Предположим, что $y'(x) > -\sqrt{m_0}\, y(x)\, e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(x)-x)}$. Заметим, что условие $\varphi(x) \geqslant 0$ ($x \in E_0$) при доказательстве теоремы (7) было использовано только для установления того, что $y'(x)$ не убывает на некотором интервале, лежащем справа от точки A. Но $y'(x)$ в нашем случае не убывает всюду справа от точки x^*.

Поэтому, взяв точку x за начальную и рассуждая, как при доказательстве теоремы 7, можно показать, что, вопреки предположению следствия, $y(x)$ принадлежит к типу I. Поэтому всюду справа от точки x^* будет:

$$y'(x) \leqslant -\sqrt{m_0}\, y(x)\, e^{-\sqrt{m_0}(\gamma(x)-x)}.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от x^* до x, получим требуемый результат.

Замечание. Неравенство (11) нельзя усилить, так как, например, для уравнения (12) невыполнение (11) приводит к решениям уже иного вида. Поэтому нельзя также улучшить оценку (15), не сужая рассматриваемого класса уравнений.

Теорема 8. *Все решения уравнения* (1) *неустойчивы в смысле Ляпунова.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $M(x) \geqslant 0$ при $A \leqslant x < \infty$. Пусть $y(x)$ есть решение (1) с начальными данными $\varphi(x)$ и $y'(A)$, и пусть дано произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть $y_1(x)$ есть решение (1), соответствующее начальным данным $\varphi_1(x) = \varphi(x) + \varepsilon$ и $y_1'(A) = y'(A) + \varepsilon$. Функция $y_2(x) = y_1(x) - y(x)$ будет решением уравнения (7) с начальными данными $\varphi_2(x) \equiv \varepsilon$ и $y_2'(A) = \varepsilon$. Для $y_2(x)$ выполнены требования теоремы 7. Следовательно $\lim\limits_{x \to \infty} y_2(x) = \infty$.

§ 2. О решениях уравнений периодического типа

Теоремы этого параграфа могут быть доказаны аналогично соответствующим теоремам предыдущего параграфа.

Теорема 9. *Пусть* $P(x) \leqslant 0$ $(P(x) \geqslant 0)$ *при* $x > x_0$. *Тогда не может существовать решения уравнения* (2), *которое оставалось бы неотрицательным* (*неположительным*) *при всех* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1.

Следствие. Всякое решение уравнения

$$y''(x) + M(x)\,y(x - \Delta(x)) = 0; \quad A \leqslant x < \infty \tag{16}$$

меняет знак на любом интервале (a, ∞), где a — произвольное число.

Теорема 10. *Пусть* $\int\limits_A^{\infty} P(t)\,dt$ *сходится. Тогда для всякого решения* $y(x)$ *уравнения* (2), *сохраняющего знак при* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1, *будет*

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} |y(x)| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \infty} y'(x) = 0.$$

Замечание. Можно построить пример, когда выполнены требования этой теоремы, решение $y(x)$ сохраняет знак и $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} |y(x)| > 0$.

Теорема 11. *Пусть* $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} M(x) > 0$; $\Delta_0 < \infty$ и $\int\limits_A^{\infty} P(t)\,dt$ *сходится. Тогда для всякого решения* $y(x)$ *уравнения* (2), *сохраняющего знак при* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1, *будет* $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$.

Теорема 12. *Пусть* $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} M(x) > 0$; $\left| \int\limits_A^x P(t)\,dt \right| < C$ *при* $A \leqslant x < \infty$ *и* $\Delta(x)$ *удовлетворяет условию Липшица при* $A \leqslant x < \infty$. *Тогда для всякого решения* $y(x)$ *уравнения* (2), *сохраняющего знак при* x *бо́льших, чем некоторое число* x_1, *будет* $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$ *и* $|y'(x)| < C_1$ *при* $A \leqslant x < \infty$.

Теорема 13. *Пусть функции* $M(x)$ *и* $P(x)$ *представимы в виде* (8); $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} M(x) > 0$ *и* $\Delta(x)$ *удовлетворяет условию Липшица при* $A \leqslant x < \infty$. *Тогда все решения уравнения* (2) *разбиваются на два типа*:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = -\dfrac{P_1}{M_1}$ *и* $|y'(x)| < C_1$ *при* $A \leqslant x < \infty$, *причем* $y(x) \neq -\dfrac{P_1}{M_1}$ *при достаточно больших* x.

б) *График решения* $y(x)$ *пересекает прямую* $y = -\dfrac{P_1}{M_1}$ *на любом интервале* (a, ∞), *где* a — *произвольное число.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Мышкис. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. УМН, IV, 5 (1949).
2. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, М. — Л., 1950.
3. И. П. Натансон. Об одном способе суммирования интегралов Фурье. Математический сборник, т. 7 (49), № 2 (1940).