А. П. Бирюков, О бесконечных совокупностях тождеств в полугруппах, *Алгебра и логика. Семинар*, 1965, том 4, номер 2, 31–32

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 4
Выпуск 2 Руководитель А.И.Мальцев 1965 г.

О БЕСКОНЕЧНЫХ СОВОКУПНОСТЯХ ТОЖДЕСТВ В ПОЛУГРУППАХ

А.П.Бирюков

В данной заметке строится пример бесконечной совокупности тождеств (полугрупповых), которая не эквивалентна никакой конечной совокупности тождеств. Отметим, что Линдон [I] построил неассоциативный конечный группоид, система истинных тождеств которого не следует из конечных множеств тождеств этого группоида.

Будем придерживаться терминологии и обозначений работы [2]. В частности, для записи тождеств будем использовать счетный алфавит $\boxdot = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$.

Пусть Φ - совокупность всевозможных тождеств вида:

$$ABC = AC,$$

где $\mu(B) \subset \mu(A) = \mu(C)$ ($\mu(A)$ - это множество букв из $\boxdot$, фактически входящих в $A(\xi_i)$).

Через Φ_n обозначаем подмножество всех тех тождеств из Φ, в записи которых участвует не более n различных букв из $\boxdot$.

Используя метод получения следствий из совокупности тождеств, легко показать (см. также [3]), что если совокупность тождеств Ψ эквивалентна некоторому конечному множеству тождеств, то Ψ эквивалентна некоторому своему конечному подмножеству. Поэтому для доказательства того, что Φ не эквивалентна никакому конечному множеству тождеств, достаточно показать, что содержащееся в Φ_n тождество

$$E_n \equiv \xi_1\xi_2\ldots\xi_n\xi_1\xi_{n-1}\xi_{n-2}\ldots\xi_1\xi_n = \xi_1\xi_2\ldots\xi_n\xi_{n-1}\xi_{n-2}\ldots\xi_1\xi_n \equiv F_n$$

($\equiv$ - знак графического равенства слов) не следует из Φ_{n-1}. При $n=1$ тождество $E_1 = F_1$, очевидно, не следует из $\Phi_0 (= \phi)$. Пусть $n \geqslant 2$ и $E_n = C_1 \varphi(ABC) C_1'$, где $\mu(B) \subset \mu(A) = \mu(C)$;

φ – некоторое отображение букв из $\mu(A)$ в непустые слова над $\boxdot$, B – возможно, и пустое слово.

Из $\mu(B) \subset \mu(A) = \mu(C)$ следует, что ни одна из букв не может входить в слово $\varphi(ABC)$ точно один раз. Поэтому $\xi_n \notin (C_1')$, т.е. C_1' – пустое слово.

Кроме того, ξ_1 не входит в C_1, так как в противном случае $\varphi(ABC)$ было бы концом слова $\xi_1 \xi_{n-1} \ldots \xi_1 \xi_n$, в которое ξ_n входит только один раз.

Следовательно, $E_n \equiv \varphi(ABC)$. Но из строения E_n следует, что для каждой буквы ξ_i из $\mu(A)$ $\varphi\xi_i$ тоже является буквой. Поэтому в слове ABC различных букв не меньше n. Таким образом, к тождеству $E_n = F_n$ не применимо ни одно тождество из Φ_{n-1}.

В заключение выражаю благодарность Л.А.Бокутю за постановку задачи.

Поступила в редакцию
10.III.1965 г.

Литература

1. Р.С. Линдон, Тождество в конечных алгебрах, кибернетический сборник, I, Москва, 1960.

2. А.П.Бирюков, Полугруппы, заданные тождествами, ДАН СССР, 1963, 149: 2 (230–232).

3. Ю.И.Янов, О системах тождеств для алгебр, Проблемы кибернетики, 8, 1962 (75–90).