С. Сирота, О спектральном представлении замкнутых подмножеств бикомпактов,
Докл. АН СССР, 1968, том 181, номер 5, 1069–1072

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 181, № 5

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

С. СИРОТА

О СПЕКТРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ БИКОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 1 XII 1967)

Пространством замкнутых подмножеств данного топологического пространства X в топологии Вьеториса называется пространство $\exp X$, точками которого являются замкнутые подмножества H пространства X, а базисными открытыми множествами — все множества вида $\langle U_{\alpha(1)}, \ldots$

$$\ldots, U_{\alpha(n)}\rangle = \{H = [H] \subset X:\quad H \subset \bigcup_{i=1} U_{\alpha(i)},\quad H \cap U_{\alpha(i)} \neq \phi,\quad i = 1, \ldots, n\},$$

где $U_{\alpha(1)}, \ldots, U_{\alpha(n)}$ — открытые подмножества пространства X. Как известно ([2]) $\exp X$ есть бикомпакт тогда и только тогда, когда X — бикомпакт.

Основным результатом работы является теорема 1, дающая спектральное представление для пространства замкнутых подмножеств предела обратного топологического спектра, и теорема 3, в которой доказывается диадичность пространства замкнутых подмножеств бикомпакта в случае, когда он сам диадичен и его вес не превосходит $\aleph_1$.

В дальнейшем точку пространства $\exp X$, соответствующую замкнутому подмножеству H пространства X, будем обозначать символом $\hat{H}$.

Лемма 1. *Если φ: $X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, то отображение ψ: $\exp X \to \exp Y$, определенное следующим образом*: $\psi(\hat{H}) = \widehat{\varphi(H)}$ *есть непрерывное отображение, причем* $\psi(\exp X) = \exp\varphi(X)$ *и, если отображение φ открыто, то отображение ψ также открыто.*

В дальнейшем отображение ψ, порожденное отображением φ с помощью вышеописанной конструкции, мы будем называть спектральным продолжением отображения φ.

Теорема 1. *Если $\{X_\alpha; \pi_\beta^\alpha\}$ — спектр, где X_α — бикомпакты, то $\{\exp X_\alpha; \omega_\beta^\alpha\}$ является также спектром, причем $Y = \varprojlim \{\exp X_\alpha; \omega_\beta^\alpha\} = \exp \varprojlim \{X_\alpha; \pi_\beta^\alpha\}$*, где ω_β^α *есть экспоненциальное продолжение отображения π_β^α.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\{\exp X_\alpha; \omega_\beta^\alpha\}$ есть спектр. Множество $\{\alpha\}$ направлено, и остается показать, что если $\alpha > \beta > \gamma$, то $\omega_\gamma^\beta\omega_\beta^\alpha = \omega_\gamma^\alpha$. Но для каждого $H = [H] \subset X$, очевидно, $\omega_\gamma^\beta\omega_\beta^\alpha(\hat{H}) = \omega_\gamma^\beta\widehat{\pi_\beta^\alpha(H)} = \widehat{\pi_\gamma^\beta\pi_\beta^\alpha(H)} = \widehat{\pi_\gamma^\alpha(H)} = \omega_\gamma^\alpha(H)$, откуда и следует требуемое.

Как известно ([3]), если для бикомпакта $\exp X$ существует семейство $\{\varphi_\alpha\}$ его отображений на пространства $\exp X_\alpha$, причем $\omega_\beta^\alpha\varphi_\alpha = \varphi_\beta$, то оно порождает непрерывное отображение φ бикомпакта $\exp X$ на Y. Обозначим через π_α естественные проекции $X = \varprojlim \{X_\alpha; \pi_\beta^\alpha\}$ на X_α, и пусть φ_α: $\exp X \to \exp X_\alpha$ есть экспоненциальное продолжение отображения π_α. Докажем теперь, что $\omega_\beta^\alpha\varphi_\alpha = \varphi_\beta$. Для $\alpha > \beta$ имеем $\omega_\beta^\alpha\varphi_\alpha(\hat{H}) = \omega_\beta^\alpha\widehat{\pi_\alpha(H)} = \widehat{\pi_\beta^\alpha\pi_\alpha(H)} = \widehat{\pi_\beta(H)} = \varphi_\beta(\hat{H})$. Тем самым для пространства $\exp X$ мы получили семейство отображений, удовлетворяющих требуемым условиям, которое порождает непрерывное отображение φ на Y, и, в силу бикомпактности $\exp X$, для доказательства гомеоморфизма достаточно показать, что φ — уплотнение. Пусть $\hat{H}_1 \in \exp X$, $\hat{H}_2 \in \exp X$, $\hat{H}_1 \neq \hat{H}_2$. Очевидно, $H_i = \varprojlim \{\pi_\alpha(H_i);\ \pi_\beta{}^\alpha | \pi_\alpha(H_i)\}$, где $\pi_\beta{}^\alpha | \pi_\alpha(H_i)$ — ограничение отображения $\pi_\beta{}^\alpha$ на множестве $\pi_\alpha(H_i)$, $i = 1, 2$, и, так как $H_1 \neq H_2$, то при некотором α будет $\pi_\alpha(H_1) \neq \pi_\alpha(H_2)$ или, что то же самое, $\varphi_\alpha(\hat{H}_1) \neq \varphi_\alpha(\hat{H}_2)$. Но это значит, что $\omega_\alpha\varphi(\hat{H}_1) \neq \omega_\alpha\varphi(\hat{H}_2)$, откуда следует, что $\varphi(\hat{H}_1) \neq \varphi(\hat{H}_2)$. Отсюда следует, что φ есть уплотнение и гомеоморфизм. Теорема доказана.

Лемма 2. *Существует такое топологическое вложение канторова дисконтинуума C в отрезок $[0, 1]$ вещественной прямой, что для любых трех точек x, y, z из C, если $x \neq y$, то всегда $|x - z| \neq |x - y|$.*

Всегда в дальнейшем канторов дисконтинуум будет рассматриваться как подмножество прямой, расположенное указанным образом.

Пусть H — замкнутое подмножество C. Обозначим $D_0(H) = \{x \in H\colon 2x \leqslant \inf H + \sup H\}$ и соответственно $D_1(H) = \{x \in H\colon 2x \geqslant \inf H + \sup H\}$. В силу сделанного выше замечания, очевидно, $D_0(H) \cap D_1(H) = \phi$.

Лемма 3. *В метрике Хаусдорфа* соотношение $D_i(H)$ непрерывно, $i = 0, 1$, т. е. при $\rho_h(H_1, H_2) \to 0$ всегда $\rho_h(D_i(H_1), D_i(H_2)) \to 0$.*

Обозначим через AC множество всех совершенных подмножеств C и будем рассматривать AC как подмножество $\exp C$.

Лемма 4. *Существует непрерывное отображение f произведения $C \times AC$ на C такое, что: 1) $f(C \times \{\hat{H}\}) = H$, где $\hat{H} \in AC$, и 2) ограничение отображения f на множестве $C \times \{\hat{H}\}$ есть гомеоморфизм.*

Здесь мы проведем построение отображения f и, вследствие простоты, опускаем доказательство свойств, требуемых леммой. Если H — совершенное подмножество C, то, очевидно, $D_i(H)$ также совершенно, и для каждого набора нулей и единиц $\{i(1), \ldots, i(n)\}$ можно однозначно определить $D_{i(1)\ldots i(n)}(H)$ по правилу $D_{i(1)\ldots i(n)}(H) = D_{i(n)}(D_{i(1)\ldots i(n-1)}(H))$. Нетрудно показать, что все множества такого вида образуют базу H и каждая точка $x \in H$ задает последовательность $I(x, H) = \{i(j)\}_{j=1}^{\infty}$ нулей и единиц, однозначно определенную соотношениями $D_{i(1)}(H) \supset D_{i(1)i(2)}(H) \supset \ldots \ldots \ni x$, и обратно, каждая последовательность $I = \{i(j)\}_{j=1}^{\infty}$ определяет точку $x(I, H)$, удовлетворяющую равенству $I(x(I, H)) = I$. Отображение f определяется следующим образом: $f(x, \hat{H}) = x(I(x, C), H)$. С помощью леммы 3 доказывается, что f удовлетворяет требуемым условиям.

Определение. Отображение φ бикомпакта X на бикомпакт Y называется *d-отображением*, если φ непрерывно и открыто и существует такое топологическое вложение X в $C \times Y$, что $\varphi = \pi_y | X$, где $\pi_y | X$ есть ограничение проекции произведения на множестве X.

Лемма 5. *Если φ есть d-отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, причем множества $\varphi^{-1}(y)$ совершенны для каждого $y \in Y$, то существует такой геоморфизм $g\colon C \times Y \to X$, что $\pi_y = \varphi g$.*

Доказательство. По определению d-отображения существует такое топологическое вложение X в $C \times Y$, что $\varphi = \pi_y | X$. Определим тогда g следующим образом: $g(c, y) = f(c, \pi_c\varphi^{-1}(y)), y)$, где f — отображение, удовлетворяющее условиям предыдущей леммы. Нетрудно видеть, что g взаимно однозначно, и, кроме того, поскольку $g(c, y) \in X$, то $\varphi g(c, y) = \pi_y | X(g(c, y)) = y = \pi_y(c, y)$. Докажем теперь непрерывность отображения g. Обозначим $H = \pi_c\varphi^{-1}(y)$. Пусть $V_\varepsilon \times W$ — некоторая базисная

* Напомним определение метрики Хаусдорфа ρ_h, если H_1 и H_2 — замкнутые подмножества метрического компакта X, то $\rho_h(H_1, H_2) = \max\limits_{x_1 \in H_1} \min\limits_{x_2 \in H_2} \rho(x_1, x_2) + \max\limits_{x_2 \in H_2} \min\limits_{x_1 \in H_1} \rho(x_1, x_2)$. Топология, индуцируемая метрикой Хаусдорфа в $\exp X$, для компактного X совпадает с топологией Вьеториса ([2]).

окрестность точки $g(c, y)$. Тогда, по лемме 4, можно выбрать такую окрестность $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ точки $\hat{H}$ в $\exp C$ и окрестность U точки c в C, что как только $\hat{H}_1 \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ и $c_1 \in U$, то $\rho(f(c, \hat{H}), f(c_1, \hat{H}_1)) < \varepsilon$. Из определения окрестности $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ следует, что $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $H \cap \cap U_i = \phi$, $i = 1, \ldots, n$. Но тогда $C \times U_i \cap \varphi^{-1}(y) \neq \phi$ и открыто и $O_i = \varphi(S \times U_i \cap \varphi^{-1}(y)) \ni y$ и также открыто в силу открытости отображения φ. С другой стороны, $O_0 = Y \setminus \varphi(X \setminus (C \times \bigcup_{i=1}^{n} U_i))$ тоже открыто и содержит y. Рассмотрим теперь окрестность $U \times (O \cap W)$, точки (c, y), где $O = \bigcap_{i=0}^{n} O_i$. Тогда, если $(c_1, y_1) \in U \times (O \cap W)$, то $\pi_c\varphi^{-1}\varphi(c_1, y_1) = \pi_c\varphi^{-1}(y_1) \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, $c_1 \in U$, и по выбору окрестностей $\langle U_1, \ldots \ldots, U_n\rangle$ и U будет $\rho(f(c, \widehat{\pi_c\varphi^{-1}(y)}), f(c_1, \widehat{\pi_c\varphi^{-1}(y_1)})) < \varepsilon$, т. е. $f(c_1, \widehat{\pi_c\varphi^{-1}(y_1)}) \in V_\varepsilon$, $y_1 \in W$, и $g(c_1, y_1) = (f(c_1, \widehat{\pi_c\varphi^{-1}(y_1)}) y_1) \in V_\varepsilon \times W$, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Если φ — d-отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, то существует непрерывное отображение ψ произведения $C \times Y$ на X, причем $\pi_y = \varphi\psi$ и ψ открыто.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что суперпозиция двух d-отображений снова есть d-отображение. Обозначая через π_x проекцию произведения $C \times X$ на сомножитель X, имеем $\varphi\pi_x$ — d-отображение, причем для каждого y из Y множество $\pi_x^{-1}\varphi^{-1}(y)$ совершенно. Тогда по лемме 5, существует гомеоморфизм, а значит, открытое отображение $g\colon C \times Y \to C \times X$, причем $\pi_y = \varphi\pi_x g$. Но тогда $\psi = \pi_x g$ есть искомое отображение, ибо $\pi_y = \varphi\psi$, и ψ открыто как суперпозиция двух открытых отображений. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если φ — d-отображение бикомпакта X на бикомпакт Y и ψ — непрерывное отображение бикомпакта Z на Y, то существует отображение g произведения $C \times Z$ на X, так что $\psi\pi_z = \varphi g$, причем если ψ — открытое отображение, то и g может быть сделано открытым, а если φ — d-отображение с совершенными прообразами для каждого $y \in Y$ и ψ — гомеоморфизм, то и g может быть сделано гомеоморфизмом.*

Доказательство следует непосредственно из двух предыдущих лемм.

Теорема 2. *Если $\{\alpha\}$ — вполне упорядоченное множество индексов и $\{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$ — обратный спектр такой, что:* 1) *X_1 — диадический бикомпакт*; 2) *для всякого предельного α будет $X_\alpha = \varprojlim \{X_\beta; \pi_\gamma^\beta\}_{\beta<\alpha}$*; 3) *$\pi_\alpha^{\alpha+1}$ есть d-отображение при всех α, то $X = \varprojlim \{X_\alpha; \pi_\beta^\alpha\}$ есть диадический бикомпакт.*

Доказательство. Сопоставим каждому индексу α свой экземпляр C_α канторова дисконтинуума. Далее, положив $Y_\alpha = X_1 \times \prod_{\beta<\alpha} C_\beta$ и ω_β^α как естественную проекцию произведения на подпроизведение, мы можем рассмотреть трансфинитный спектр $\{Y_\alpha; \omega_\beta^\alpha\}$. Очевидно, $\omega_\gamma^\beta\omega_\beta^\alpha = \omega_\gamma^\alpha$, и для предельных α выполняется $Y_\alpha = \varprojlim \{Y_\beta; \omega_\gamma^\beta\}_{\beta<\alpha}$. Для доказательства диадичности X достаточно построить непрерывное отображение $Y = \varprojlim \{Y_\alpha; \omega_\beta^\alpha\}$, являющегося диадическим бикомпактом, на X, для чего в свою очередь достаточно найти семейство непрерывных отображений, коммутирующих со спектральными, которое, по известным теоремам ([3]), породит непрерывное отображение предела на предел. Мы построим искомое семейство методом трансфинитной индукции. В качестве $\varphi_1\colon Y_1 \to X_1$ положим тождественное отображение. Пусть теперь для всех $\beta < \alpha$ построены отображения φ_β, причем для каждого $\gamma < \beta < \alpha$ выполнено $\pi_\gamma^\beta\varphi_\beta = \varphi_\gamma\omega_\gamma^\beta$. Тогда в случае, если α — предельный трансфинит, то ранее построенные отображения индуцируют непрерывное отображение предела, и, так как, по условию теоремы, $X_\alpha = \varprojlim \{X_\beta; \pi_\gamma{}^\beta\}_{\beta<\alpha}$ и по построению $Y_\alpha = \varprojlim \{Y_\beta; \omega_\gamma{}^\beta\}_{\beta<\alpha}$, то тем самым мы получили искомое отображение φ_α. Если же α — непредельный трансфинит, то $\alpha = (\alpha - 1) + 1$, и по лемме 7 найдется отображение φ_α такое, что $\pi_{\alpha-1}^{\alpha}\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha-1}\omega_{\alpha-1}^{\alpha}$ и, следовательно, φ_α является искомым. Итак, найдено семейство отображений, порождающее отображение непрерывное предела на предел. Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 с помощью леммы 7 доказываются

Теорема 3. *Если в предположениях теоремы 2 бикомпакт X_1 есть сверх того открытый образ D^τ, то обратный предел спектра $\{X_\alpha; \pi_\beta{}^\alpha\}$ есть открытый образ обобщенного канторова дисконтинуума.*

Теорема 4. *Если в предположениях теоремы 2 для каждого α отображение $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ есть, сверх того, отображение с совершенными прообразами точек, то предел спектра $\{X_\alpha; \pi_\beta{}^\alpha\}$ гомеоморфен топологическому произведению X_1 на D^τ.*

Очевидно, если выполнены предположения теоремы 4 и X_1 есть нульмерный компакт или обобщенный канторов дисконтинуум, то и предел спектра $\{X_\alpha; \pi_\beta{}^\alpha\}$ гомеоморфен D^τ.

Следствие 1. *Если X есть предел трансфинитного спектра из нульмерных компактов с открытыми отображениями, то X есть открытый образ D^τ.*

Теорема 5. *Если X — диадический бикомпакт веса, не превосходящего $\aleph_1$, то бикомпакт* $\exp X$ *диадичен.*

Доказательство. Как легко видеть, что доказательства теоремы достаточно показать, что $\exp D^{\aleph_1}$ гомеоморфно $D^{\aleph_1}$. Действительно, в силу диадичности X существует непрерывное отображение $D^{\aleph_1}$ на X. Тогда, по лемме 1, существует непрерывное отображение $\exp D^{\aleph_1}$ на $\exp X$, и если $\exp D^{\aleph_1}$ — диадический бикомпакт, то теорема будет доказана. Пусть $\{\alpha\}$ — множество трансфинитов, меньших ω_1. Сопоставим каждому α экземпляр C_α канторова дисконтинуума и положим $X_\alpha = \prod_{\beta<} C_\beta$. Обозначая $\pi_\beta{}^\alpha$ естественную проекцию произведения на подпроизведение, имеем $\pi_\gamma{}^\beta\pi_\beta{}^\alpha = \pi_\gamma{}^\alpha$, и тогда $\{X_\alpha; \pi_\beta{}^\alpha\}$ есть обратный трасфинитный спектр, предел которого, очевидно, есть $D^{\aleph_1}$. Но пространство замкнутых подмножеств метрического компакта снова есть метрический компакт, и, по теореме 1, $\exp D^{\aleph_1}$ есть обратный предел трансфинитного спектра из компактов с открытыми по лемме 1 отображениями. Более того, нетрудно видеть, что экспоненциальное продолжение отображения $\pi_\beta{}^\alpha$ есть отображение с совершенными прообразами точек, и, по теореме 4, в силу следствия 1, вытекает гомеоморфизм $\exp D^{\aleph_1}$ и $D^{\aleph_1}$. Теорема доказана.

С применением леммы 1 доказывается также

Следствие 2. *Если X есть открытый образ $D^{\aleph_1}$, то и* $\exp X$ *есть открытый образ $D^{\aleph_1}$.*

Автор выражает благодарность П. С. Александрову за проявленное внимание, Б. А. Ефимову за ценные указания.

Московский геологоразведочный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
17 XI 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Введение в теорию множеств и функций, М.— Л., 1948.
[2] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966.
[3] Н. Стинрод, С. Эйленберг, Основы алгебраической топологии, М., 1958.