Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. П. Киселев, Тонконогий цилиндрический излучатель в неоднородной упругой среде, *ЖТФ*, 1984, том 54, выпуск 2, 209–215

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.80
22 января 2025 г., 04:46:29

1984 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 54, в. 2
1984 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 54, № 2

УДК 53 : 51

ТОНКИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

А. П. Киселев

Исследуется возбуждение неоднородной упругой среды осесимметрическим напряжением вида $\varepsilon^{-2}p(z)\,\mathbf{n}$, приложенным к поверхности цилиндрической полости малого радиуса ε ($\mathbf{n}$ — нормаль к цилиндру, $p(z)$ — гладкая финитная функция, z — координата вдоль оси цилиндра). При $\varepsilon \to 0$ строится предельная задача с сосредоточенным на оси цилиндра источником. Используется техника совместного рассмотрения двух асимптотических разложений — внутреннего и внешнего, — сращиваемых в промежуточной области.

1. Предмет работы принадлежит, с математической точки зрения, к интенсивно развивающейся сейчас теории задач для эллиптических уравнений во внешности тонкого тела [1-9]. К подобным задачам приходят в связи с рэлеевской асимптотикой в дифракции [2-5], гидромеханике и геофизике [2, 5] и из чисто математических побуждений [6-8]. В этой проблематике резко разграничиваются два направления деятельности. Одних исследователей решение прикладных вопросов стимулирует к явному вычислению нескольких старших членов асимптотики. Других привлекает изучение общей структуры полных асимптотических разложений решения (и в этой области достигнуты заметные успехи). Настоящая работа принадлежит к первому направлению. Автор стремился использовать лишь ту минимальную информацию о структуре коэффициентов асимптотики, которая необходима для построения искомого предела.

Поле стационарных перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r};\varepsilon)$ упругой среды вне цилиндра радиуса ε описывается уравнением

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) = 0, \quad r > \varepsilon, \tag{1}$$

$$l_k(\mathbf{u}) = \partial/\partial r_m \sigma_{km}(\mathbf{u}) + \omega^2 \rho(\mathbf{r})\, u_k, \tag{2}$$

$$\sigma_{km}(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{r})\,(\partial u_m/\partial r_k + \partial u_k/\partial r_m) + \delta_{km}\lambda(\mathbf{r})\,\operatorname{div}\mathbf{u}, \tag{3}$$

где r_1, r_2, r_3 — декартовы компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r}$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$; по повторяющимся нижним латинским значкам подразумевается суммирование от 1 до 3; δ_{km} — символ Кронекера. Функции $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ предполагаются гладкими во всем трехмерном пространстве E^3; $\lambda(\mathbf{r}) + 2\mu(\mathbf{r}) > \mu(\mathbf{r}) > 0$; $\rho(\mathbf{r})\,\omega^2 > 0$.

На поверхности излучателя — полости $r < \varepsilon$ — задается граничное условие

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})\,|_{r=\varepsilon} = \varepsilon^{-2} p(z)\,\mathbf{n}. \tag{4}$$

Здесь $z \equiv r_3$; $p(z)$ — гладкая функция, обращающаяся в нуль при достаточно больших $|z|$; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$ — единичный вектор нормали к цилиндру, а $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ — напряжение

$$t_k(\mathbf{u}) = \sigma_{km}(\mathbf{u})\, n_m. \tag{5}$$

Условие (4) описывает неравномерное по длине полости осесимметрическое нормальное давление. Множитель ε^{-2} в (4) обеспечивает постоянство приложенной к полости мощности при $\varepsilon \to 0$.

Предполагая, что $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ быстро стабилизируются на бесконечности к ненулевым константам, единственное решение (1), (4) можно выделить

© Издательство «Наука», «Журнал технической физики», 1984

принципом предельного поглощения (соответствующим временной зависимости $e^{-i\omega t}$)

$$|\mathbf{u}(\mathbf{r};\ \varepsilon)| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad \text{если} \ \operatorname{Im} \omega > 0, \tag{6}$$

$$|\mathbf{u}(\mathbf{r}; \varepsilon)| \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{7}$$

Эта задача, принятая в сейсмике как модель взрыва протяженного заряда в скважине, неоднократно рассматривалась для однородной среды [10, 11].

Если среда однородна, а давление постоянно вдоль полости, $p = \text{const}$, то задача (1), (4), (6) имеет решение

$$u_\alpha(\mathbf{r};\ \varepsilon) = pA(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial r_\alpha} H_0^{(1)}(kr), \quad u_3 \equiv 0, \tag{8}$$

где

$$A(\varepsilon) = -k^2 \varepsilon^{-2} \{(\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(k\varepsilon) + 2\mu (k\varepsilon)^{-1} H_0^{(1)\prime}(k\varepsilon)\}^{-1}, \quad k = \omega \rho^{1/2} (\lambda + 2\mu)^{-1/2},$$

$H_0^{(1)}$ и $H_0^{(1)\prime}$ — функция Ганкеля и ее производная. Вследствие введения множителя ε^{-2} в правую часть (4) существует конечный предел

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{u}(\mathbf{r};\ \varepsilon), \tag{9}$$

удовлетворяющий, как легко показать, уравнению во всем пространстве $\mathbf{E}^3$

$$\mathbf{l}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbf{E}^3, \tag{10}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — сосредоточенная на оси z обобщенная функция

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\pi p \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta(\mathbf{r}_\perp), \tag{11}$$

$$\delta(\mathbf{r}_\perp) \equiv \delta(r_1)\,\delta(r_2), \tag{12}$$

причем $\mathbf{e}_j$ — орт оси r_j; $\delta(r_\beta)$ — одномерная дельта-функция, а по повторяющимся греческим индексам, принимающим значения 1 и 2, подразумевается суммирование.

Целью работы является построение предельной при $\varepsilon \to 0$ задачи[1] с распределенным по оси источником для неоднородной среды и переменного $p(z)$. Исходя из (11), естественно предполагать, что $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ имеет в общем случае вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\pi p(z) \left.\frac{\lambda(\mathbf{r}) + 2\mu(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r})}\right|_{r=0} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta(\mathbf{r}_\perp) + \mathbf{a}(z)\,\delta(\mathbf{r}_\perp), \tag{13}$$

где $\mathbf{a}(z)$ — гладкий вектор.

В подобных задачах естественно использовать технику сращивания внутреннего и внешнего разложений [1-4, 6-8]. Уравнения для членов внутреннего разложения строятся по обычной схеме метода пограничного слоя путем разложения коэффициентов в ряды и перехода к растянутым переменным. Постановка условий на бесконечности для этих уравнений требует привлечения внешнего разложения.

Задача определения вектора $\mathbf{a}(z)$, которой мы занимаемся, локальна — $\mathbf{a}$ должен зависеть только от $p(z)$, $p'(z)$, функций $\lambda(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ и их первых производных по $\mathbf{r}$ при $r=0$. Задача же построения полного асимптотического разложения $\mathbf{u}(\mathbf{r};\ \varepsilon)$ заведомо нелокальна. В настоящей работе, как и в [12], где решена аналогичная задача для малого сферического излучателя, гипотеза локальность играет существенную роль.

2. Для исследования поля вблизи излучателя естественно ввести координаты пограничного слоя [1-4, 6, 8].

$$\mathbf{R} = (X_1,\ X_2,\ z), \quad X_\alpha = r_\alpha/\varepsilon \tag{14}$$

---

[1] Безразмерным малым параметром задачи является ε/h, где h — характерный масштаб неоднородности среды.

и разложить коэффициенты по степеням X_1 и X_2

$$\lambda(\mathbf{r}) = \Lambda(z) + \varepsilon\lambda^1(\mathbf{R}) + \ldots, \quad \mu(\mathbf{r}) = \mathrm{M}(z) + \varepsilon\mu^1(\mathbf{R}) + \ldots, \tag{15}$$

где $\Lambda(z)$ и $\mathrm{M}(z)$ — значения $\lambda(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ на оси z, а $\lambda^1(\mathbf{R})$ и $\mu^1(\mathbf{R})$ — линейные по X_1 и X_2 функции с коэффициентами, зависящими от z.

Будем обозначать

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial r_\alpha}, \quad \partial^2_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial_\beta, \quad \partial^3_{\alpha\beta\gamma} = \partial^2_{\alpha\beta}\partial_\gamma, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Перейдем в (1)—(5) к переменным (14) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями ε

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) = \varepsilon^{-2}\{\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \varepsilon\mathbf{l}^1(\mathbf{u}) + \ldots\},$$
$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \varepsilon^{-1}\{\mathbf{T}(\mathbf{u}) + \varepsilon\mathbf{t}^1(\mathbf{u}) + \ldots\}.$$

Здесь $\mathbf{L}$ и $\mathbf{T}$ — операторы с коэффициентами, зависящими только от z

$$L_\alpha(\mathbf{u}) = \mathrm{M}(z)\Delta_\perp u_\alpha + (\Lambda(z) + \mathrm{M}(z))\,\partial^2_{\alpha\beta}u_\beta,$$
$$L_3(\mathbf{u}) = \mathrm{M}(z)\Delta_\perp u_3, \quad \Delta_\perp = \partial^2_{11} + \partial^2_{22};$$
$$T_\alpha(\mathbf{u}) = \mathrm{M}(z)\,n_\beta(\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) + \Lambda(z)\,n_\alpha\partial_\gamma u_\gamma,$$
$$T_3(\mathbf{u}) = \mathrm{M}(z)\,n_\gamma\partial_\gamma u_3 = \mathrm{M}(z)\,(\partial u_3/\partial\mathbf{n}).$$

Коэффициенты $\mathbf{l}^1$ и $\mathbf{t}^1$ линейны по X_1 и X_2, причем

$$l^1_\alpha(\mathbf{u}) = \partial_\beta\mu^1(\mathbf{R})(\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) + \partial_\alpha\lambda^1(\mathbf{R})\,\partial_\gamma u_\gamma + (\Lambda(z)\,\partial + \partial\mathrm{M}(z))\,\partial_\alpha u_3,$$
$$l^1_3(\mathbf{u}) = \partial_\beta\mu^1(\mathbf{R})\,\partial_\beta u_3 + (\mathrm{M}(z)\,\partial + \partial\Lambda(z))\,\partial_\gamma u_\gamma,$$
$$t^1_\alpha(\mathbf{u}) = \mu^1(\mathbf{R})\,n_\beta(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) + \lambda^1(\mathbf{R})\,n_\alpha\partial_\gamma u_\gamma + \Lambda(z)\,\partial u_3,$$
$$t^1_3(\mathbf{u}) = \mu^1(\mathbf{R})\,n_\gamma\partial_\gamma u_3 + \mathrm{M}(z)\,n_\alpha\partial u_\alpha$$

(каждый оператор дифференцирования действует на все функции, стоящие справа от него, например $\partial\Lambda\partial_\gamma u_\gamma \equiv \partial(\Lambda\partial_\gamma u_\gamma)$.

Обозначим через S операцию ограничения функций на границу полости $\rho \equiv (X_1^2 + X_2^2) = 1$, например $S\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{u})|_{\rho=1}$.

Естественно попробовать искать асимптотику поля вблизи излучателя в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r};\ \varepsilon) = \varepsilon^{-1}\{\mathbf{V}^0(\mathbf{R}) + \varepsilon\mathbf{V}^1(\mathbf{R}) + \ldots\}. \tag{16}$$

Подставив (16) в (1) и (4), получим

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^0) = 0, \quad \rho > 1, \tag{17}$$

$$S\mathbf{T}(\mathbf{V}^0) = p(z)\,\mathbf{n}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{V}^1) = -\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^0), \quad \rho > 1, \qquad (18), (19)$$

$$S\mathbf{T}(\mathbf{V}^1) = -S\mathbf{t}^1(\mathbf{V}^0), \tag{20}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \varepsilon^{-1}r.$$

Нетрудно видеть, что каждая из задач (17)—(18), (19)—(20) представляет собой прямую сумму плоской задачи статической теории упругости (с заданными при $\rho=1$ напряжениями) и внешней задачи Неймана для двумерного уравнения Лапласа. Переменная z входит в левые части (17)—(20) как параметр.

Чтобы добиться единственности в возникших задачах, следует задать поведение $\mathbf{V}^\circ(\mathbf{R})$, $\mathbf{V}^1(\mathbf{R})$, . . . при больших ρ. Это делается путем исследования условий совпадения при $\rho \to \infty$, $r \to 0$ внутреннего разложения с внешним.

3. Поле вне малой окрестности полости естественно искать в виде аналога мультипольного разложения, т. е. в виде суммы с коэффициентами, зависящими от ε, решений неоднородных уравнений вида (10) с функциями $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, сосредоточенными на оси z. Детальное выяснение структуры этих коэффициен-

тов в задаче о тонком теле довольно сложно (в случае сферической полости — это целые степени ε [12]), и мы ограничимся главным членом, что достаточно для целей работы.

Итак, вне малой окрестности излучателя пусть

$$\mathbf{u}(r;\ \varepsilon) \sim \mathbf{U}(\mathbf{r}) + \varphi(\varepsilon)\,\tilde{\mathbf{U}}^1(\mathbf{r}) + \ldots, \tag{21}$$

$\varphi(\varepsilon) \to 0$; при $\varepsilon \to 0$; $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ есть удовлетворяющее (6) и (7) решение уравнения (10), (11). Формула (13) означает, что справедливо асимптотическое разложение

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) \sim \sum_{j=-1}^{\infty} r^j \mathbf{U}^j(z,\ \vartheta) + \ln r \sum_{k=0} r^k \mathbf{U}^{0k}(z,\ \vartheta), \quad r \to 0, \tag{22}$$

где $\mathbf{U}^j$ и $\mathbf{U}^{0k}$ гладки по z и ϑ (ϑ — полярный угол), а $\mathbf{U}^0$ и $\mathbf{U}^{00}$ не зависят от ϑ.

Перейдя к погранслойным координатам (14), получим

$$\mathbf{u}(r;\ \varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}\{\rho^{-1}\mathbf{U}^{-1} + \varepsilon(\mathbf{U}^0 + \ln \rho\, \mathbf{U}^{00}) + \varepsilon \ln \varepsilon\, \mathbf{U}^{00} + \ldots\}, \quad r \to 0. \tag{23}$$

Сравнение (23) с (16) при $r \to 0$, $\rho \to \infty$ показывает, что

$$\mathbf{V}^0(\mathbf{R}) \to 0, \quad \rho \to \infty, \tag{24}$$

а $\mathbf{V}^1$ допускает оценку

$$|\mathbf{V}^1(\mathbf{R})| \leqslant \Phi(z) \ln \rho, \quad \rho \to \infty \tag{25}$$

с некоторой (неизвестной) функцией $\Phi(z)$.

Условие (24) делает задачу (17), (18) однозначно разрешимой, условие же (25) определяет $\mathbf{V}^1$ с точностью до прибавления слагаемого вида $\mathbf{W}(z)$. Это слагаемое не может быть найдено из локальных рассмотрений вблизи полости, но, к счастью, оно но влияет на интересующие нас сингулярности $\mathbf{V}^1$ при $\rho \to 0$.

Присутствие члена $\mathbf{U}^{00}\varepsilon \ln \varepsilon$ в (23) заставляет добавить в (16) слагаемое вида $\varepsilon \ln \varepsilon \mathbf{V}^{00}$, также несигулярное при $\rho = 0$.

4. Решение задачи (17), (18), (24) можно найти в виде

$$V^0_\alpha = C(z)\,\partial_\alpha \ln \rho, \quad V^0_3 \equiv 0, \tag{26}$$

где $C(z)$ — функция, подлежащая определению из граничного условия.

Нетрудно проверить, что $ST_3(\mathbf{V}^0) = 0$. Далее, используя тождества

$$S\partial^2_{\alpha\beta} \ln \rho = \delta_{\alpha\beta} - 2n_\alpha n_\beta, \quad \Delta_\perp \ln \rho = 2\pi\delta(\mathbf{R}_\perp), \tag{27), (28}$$

где $\delta(\mathbf{R}_\perp) = \delta(X_1)\,\delta(X_2) = \varepsilon^2\delta(\mathbf{r}_\perp)$, находим

$$\begin{aligned} ST_\alpha(\mathbf{V}^0) &= C(z)\,S\{\mathrm{M}(z)\,n_\beta(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha) + \Lambda(z)\,n_\alpha \partial_\gamma V_\gamma\} = \\ &= C(z)\,S\{2\mathrm{M}(z)\,n_\beta \partial^2_{\alpha\beta} + \Lambda(z)\,\Delta_\perp\} \ln \rho = -2C(z)\,\mathrm{M}(z)\,n_\alpha. \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с (18), получаем

$$C(z) = -p(z)/2\mathrm{M}(z). \tag{29}$$

Полезно отметить, что решение задачи (17), (18), (24), доопределенное по аналитичности внутри полости, удовлетворяет во всем пространстве следующему уравнению с правой частью, сосредоточенной на оси z:

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^0) = 2\pi \mathrm{N}(z)\,C(z)\,\mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \delta(\mathbf{R}_\perp), \quad \mathbf{R} \in \mathbf{E}^3, \tag{30}$$

$$\mathrm{N}(z) = \Lambda(z) + 2\mathrm{M}(z) = (\lambda + 2\mu)|_{r=0}.$$

5. Рассмотрим во всем пространстве выражение для $\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^0)$. Пользуясь тождеством $X_\alpha\delta(\mathbf{R}_\perp) \equiv 0$, получим что

$$l^1_\alpha(\mathbf{V}^0) = C(z)\,\{\partial_\beta 2\mu^1(\mathbf{R})\partial^2_{\alpha\beta} + \lambda^1(\mathbf{R})\,\partial_\alpha \Delta_\perp\} \ln \rho = C(z)\,\{2m_\beta(z)\,\partial^2_{\alpha\beta} \ln \rho + 4\pi m_\alpha(z)\,\delta(\mathbf{R}_\perp)\},$$

где

$$m_\beta(z) = \left.\frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_\beta}\right|_{r=0}, \quad \mu^1(\mathbf{R}) = m_\beta(z)\,X_\beta. \tag{31}$$

Далее легко проверяется, что

$$l_3^1(\mathbf{V}^0) = (\mathrm{M}(z)\,\partial + \partial\Lambda(z))\,C(z)\cdot 2\pi\delta(\mathbf{R}_\perp). \tag{32}$$

Итак, аналитически продолженное на все пространство выражение для правой части (19) имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^0) = 2C(z)\,\mathbf{e}_\alpha m_\beta(z)\,\partial^2_{\alpha\beta}\ln\rho + 4\pi C(z)\,m_\alpha(z)\,\mathbf{e}_\alpha\delta(\mathbf{R}_\perp) + \\ + \{(\Lambda(z) + \mathrm{M}(z))\,C'(z) + \Lambda'(z)\,C(z)\}\,2\pi\delta(\mathbf{R}_\perp)\,\mathbf{e}_3;\quad \mathbf{R}\in\mathbf{E}^3\end{gathered} \tag{33}$$

(штрих обозначает производную по z).

Заметим, что лишь первое слагаемое в правой части (33) отлично от нуля вне полости.

Обратимся к граничному условию (20)

$$\begin{gathered}St^1_\alpha(\mathbf{V}^0) = C(z)\,S\,\{2m_\gamma n_\gamma n_\beta\partial^2_{\alpha\beta} + n_\alpha\lambda^1(\mathbf{R})\,\Delta_\perp\}\ln\rho = \\ = 2Cm_\gamma n_\gamma n_\beta(\delta_{\alpha\beta} - 2n_\alpha n_\beta) = -2C(z)\,m_\gamma(z)\,n_\gamma n_\alpha, \\ St^1_3(\mathbf{V}^0) = \mathrm{M}C'Sn_\alpha\partial_\alpha\ln\rho = \mathrm{M}(z)\,C'(z).\end{gathered}$$

Отсюда

$$S\mathbf{T}(\mathbf{V}^1) = 2C(z)\,m_\gamma(z)\,n_\gamma\mathbf{n} - \mathrm{M}(z)\,C'(z)\,\mathbf{e}_3. \tag{34}$$

Введем несколько вспомогательных функций, необходимых нам для решения задачи (19), (25), (34).

Пусть $\mathbf{h}$ — следующее частное решение уравнения (19) вне полости (см. (33))

$$\begin{gathered}h_\alpha(\mathbf{R}) = H_\beta(z)\,\partial^2_{\alpha\beta}\Delta_\perp^{-1}\ln\rho,\quad h_3\equiv 0, \\ H_\beta(z) = -2C(z)\,m_\beta(z)/\mathrm{N}(z),\end{gathered} \tag{35}$$

где через $\Delta_\perp^{-1}\ln\rho = \rho^2(\ln\rho - 1)/4$ обозначено аксиально-симметричное решение уравнения $\Delta_\perp\psi = \ln\rho$.

Нетрудно проверить, что $\mathbf{h}(\mathbf{R})$ удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$\mathbf{L}(\mathbf{h}) = -2C(z)\,m_\beta(z)\,\mathbf{e}_\alpha\partial^2_{\alpha\beta}\ln\rho,\quad \mathbf{R}\in\mathbf{E}^3. \tag{36}$$

Рассмотрим также решения двух задач с источниками, сосредоточенными на оси z. Пусть

$$\begin{gathered}f_\alpha = 2Cm_\beta\left\{\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\mathrm{M}} + \left(\frac{1}{\mathrm{N}} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right)\partial^2_{\alpha\beta}\Delta_\perp^{-1}\right\}\ln\rho,\quad f_3\equiv 0, \\ g_\alpha\equiv 0,\quad g_3 = -C'(z)\ln\rho.\end{gathered}$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{L}(\mathbf{f}) = 4\pi C(z)\,m_\alpha(z)\,\mathbf{e}_\alpha\delta(\mathbf{R}_\perp),\quad \mathbf{R}\in\mathbf{E}^3, \tag{37}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{g}) = -2\pi\mathrm{M}(z)\,C'(z)\,\mathbf{e}_3\delta(\mathbf{R}_\perp),\quad \mathbf{R}\in\mathbf{E}^3. \tag{38}$$

Ниже будет показано, что решение задачи (19), (20), (24) имеет вид

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{R}) = \mathbf{f}(\mathbf{R}) + \mathbf{g}(\mathbf{R}) + \mathbf{h}(\mathbf{R}). \tag{39}$$

Из (33), (36)—(39) следует, что аналитически продолженное на все пространство решение этой задачи удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^1) = -\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^0) + 2\pi(\Lambda(z)\,C(z))'\,\mathbf{e}_3\delta(\mathbf{R}_\perp),\quad \mathbf{R}\in\mathbf{E}^3. \tag{40}$$

6. Проверка формулы (39) требует вычисления функций $S\mathbf{T}(\mathbf{f})$, $S\mathbf{T}(\mathbf{g})$ и $S\mathbf{T}(\mathbf{h})$. При этом полезны следующие тождества:

$$S\partial_\alpha\ln\rho = n_\alpha, \tag{41}$$

$$S\partial^3_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\perp^{-1}\ln\rho = 1/2\cdot(\delta_{\alpha\beta}n_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}n_\beta + \delta_{\beta\gamma}n_\alpha) - n_\alpha n_\beta n_\gamma. \tag{42}$$

Рассмотрим $S\mathbf{T}(\mathbf{f})$. Как легко проверить,

$$ST_3(\mathbf{f}) = 0. \tag{43}$$

Далее, замечая, что $\partial_\gamma f_\gamma = \mathrm{N}^{-1}(z)\, m_\beta(z)\, \partial_\beta \ln \rho$, находим

$$ST_\alpha(\mathbf{f}) = \mathrm{M} n_\beta (\partial_\alpha f_\beta + \partial_\beta f_\alpha) + \Lambda n_\alpha \partial_\gamma f_\gamma = 2C\,\{n_\beta (m_\beta \partial_\alpha + m_\alpha \partial_\beta) + 2 n_\beta m_\gamma (\mathrm{N}^{-1} - \mathrm{M}^{-1})\, \mathrm{M} \partial^3_{\alpha\beta\gamma} \Delta_\perp^{-1} + \Lambda \mathrm{N}^{-1} n_\alpha m_\gamma \partial_\gamma\} \ln \rho.$$

Используя (41), (42), получаем

$$ST_\alpha(\mathbf{f}) = C\left\{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\, m_\alpha + 2\,\frac{\Lambda + \mathrm{M}}{\mathrm{N}}\, m_\gamma n_\gamma n_\alpha\right\}. \tag{44}$$

Легко проверить, что

$$S\mathbf{T}(\mathbf{g}) = -\mathrm{M}(z)\, C'(z)\, \mathbf{e}_3. \tag{45}$$

Рассмотрим теперь $S\mathbf{T}(\mathbf{h})$. Очевидно,

$$ST_3(\mathbf{h}) = 0, \tag{46}$$

$$S\partial_\gamma h_\gamma = H_\beta S \partial_\beta \ln \rho = H_\beta(z)\, n_\beta.$$

Далее

$$ST_\alpha(\mathbf{h}) = S\,\{\mathrm{M} n_\beta (\partial_\alpha h_\beta + \partial_\beta h_\alpha) + \Lambda n_\alpha \partial_\gamma h_\gamma\} = 2\mathrm{M} n_\beta H_\alpha S \partial^3_{\alpha\beta\gamma} \Delta_\perp^{-1} \ln \rho + \Lambda n_\alpha H_\beta n_\beta = -2C\left\{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\, m_\alpha + \frac{\Lambda}{\mathrm{N}}\, m_\gamma n_\gamma n_\alpha\right\}. \tag{47}$$

Из формул (43)—(47) вытекает, что функция (39) удовлетворяет граничному условию (34). Выполнение уравнения (19) при $\rho > 1$ следует из (36)—(38), а оценка (25) очевидна.

7. Вид обобщенной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в (10) определяется особенностями $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} \to 0$, которые однозначно задаются сингулярностями $\mathbf{V}^0(\mathbf{R})$ и $\mathbf{V}^1(\mathbf{R})$ при $\rho \to 0$ (см. п. 3).

Удобно вычислить $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ с помощью следующего приема [12]. Продолжив $\mathbf{V}^0$ и $\mathbf{V}^1$ аналитически внутрь полости, применим к (16) оператор $\mathbf{l}$

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) \sim \varepsilon^{-2}\{\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{l}^1(\mathbf{u})\} = \varepsilon^{-2}\{\mathbf{L}(\mathbf{V}^0) + \varepsilon(\mathbf{L}(\mathbf{V}^1) + \mathbf{l}^1(\mathbf{V}_0))\}.$$

Воспользовавшись (30) и (40), получим

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) \sim \varepsilon^{-3} 2\pi\,\{\mathrm{N}(z)\, C(z)\, \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha + \varepsilon\,(\Lambda(z)\, C(z))'\, \mathbf{e}_3\}\, \delta(\mathbf{R}_\perp) = 2\pi\left\{\mathrm{N}(z)\, C(z)\, \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} + (\Lambda(z)\, C(z))'\, \mathbf{e}_3\right\} \delta(\mathbf{r}_\perp). \tag{48}$$

Сравнив (48) с (13), найдем, что гипотеза о виде наиболее сингулярной части $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ оказалась справедливой, а

$$\mathbf{a}(z) = 2\pi \frac{\partial}{\partial z}(\Lambda(z)\, C(z))\, \mathbf{e}_3 = -2\pi \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\lambda(\mathbf{r})}{2\mu(\mathbf{r})}\, p(z)\right\}\bigg|_{r=0} \mathbf{e}_3. \tag{49}$$

Заметим, что не только главная сингулярность функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, но и более гладкое слагаемое $\mathbf{a}(z)\, \delta(\mathbf{r}_\perp)$ в (13) сохраняет осевую симметрию граничного условия (4). Аналогичное обстоятельство имеет место и для простейших сферических излучателей [12].

Для вывода формулы (49) гладкость функции $p(z)$, по-видимому, несущественна. Рассмотрение же негладких по z параметров $\lambda(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ требует модификации проведенных вычислений.

В заключение представим функцию $\mathbf{F}$ в виде суммы распределенной по оси z силы, направленной вдоль $\mathbf{e}_3$, и интеграла от точечного центра давления. Пусть

$$\Phi(\mathbf{r}_\perp, z) = \mathrm{grad}\,\{\delta(\mathbf{r}_\perp)\, \delta(z)\}. \tag{50}$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Lambda(\zeta) + 2\mathrm{M}(\zeta)}{\mathrm{M}(\zeta)}\, p(\zeta)\, \Phi(\mathbf{r}_\perp, \zeta - z)\, d\zeta + 2\pi\, \frac{\Lambda(z) + \mathrm{M}(z)}{\mathrm{M}(z)}\, p(z)\, \mathbf{e}_3. \tag{51}$$

Применив результаты [13] по возбуждению поперечных волн центром давления, отсюда нетрудно найти поперечную волну, излучаемую в неоднородной среде тонким высокочастотным цилиндрическим излучателем.

Литература

[1] *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

[2] *Datta S. K.* Scattering of elastic waves. — В кн.: Mechanics today, ed. Nemet-Nasser, v. 4, N. Y., 1978, p. 149—205.

[3] *Готлиб В. Ю.* О рэлеевской асимптотике дифракционных задач. — Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 1976, т. 62, с. 52—59.

[4] *Geer J.* Electromagnetic scattering by a slender body of revolution. — SIAM J. Appl. Math., 1980, v. 38, № 1, p. 93—102.

[5] *Мясников В. П., Федорюк М. В.* Рэлеевское приближение в теории упругости. — ДАН СССР, 1980, т. 254, № 3, с. 589—592.

[6] *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения в области с узкой щелью. — Матем. сб., 1976, т. 103, № 2, с. 265—284; 1982, т. 118, № 2, с. 184—202.

[7] *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 1, с. 167—186.

[8] *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решения задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой. — Матем. сб., 1981, т. 116, № 2, с. 187—217.

[9] *Зильберглейт А. С., Тропп Э. А.* О ближнем поле проводов, токонесущих пластин и оболочек. — ЖТФ, 1982, т. 52, № 2, с. 209—216.

[10] *Somers E. V.* Propagation of acoustic waves in a liquid — filled cylindrical hole surrounded by an elastic solid. — J. Appl. Phys., 1953, v. 24, N 5, p. 515—521.

[11] *Васильев Ю. И.* Частотные характеристики цилиндрического излучателя конечной длины. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1968, т. 3, № 1, с. 25—43.

[12] *Киселев А. П.* Малый сферический излучатель в неоднородной упругой среде. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1982, т. 16, № 4, с. 119—126.

[13] *Киселев А. П.* О начальных данных для лучевых формул, описывающих поля точечных источников в неоднородных изотропных упругих средах. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 4, с. 829—831; Вопр. динамич. теории распростр. сейсмич. волн, 1975, т. 15, с. 6—2

Научно-производственное объединение
«Рудгеофизика»
Ленинград

Поступило в Редакцию
6 апреля 1983 г.