Н. В. Проскурин, Теорема о распределении квадратичных вычетов, имеющая приложения в эргодическом методе Ю. В. Линника, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1975, том 50, 169–178

Н.В.Проскурин

ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ, ИМЕЮЩАЯ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭРГОДИЧЕСКОМ МЕТОДЕ Ю.В.ЛИННИКА

В работе предлагается доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть m – целое положительное число; γ – вещественное число, $0<\gamma<\frac{1}{8}$; x – вещественное число, для которого
$$x \geqslant m^{\frac{3}{8}+\gamma}.$$

Обозначим через $t(-m; x, \frac{1}{2}x)$ число целых чисел q, удовлетворяющих следующим условиям:

1^0. $\frac{1}{2}x < q \leqslant x$;

2^0. q – бесквадратно;

3^0. если p – простой делитель числа q, то $p > \log m$;

4^0. $(-m)$ квадратичный вычет $(\mathrm{mod}\, q)$

Тогда при $m \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$
$$t(-m; x, \tfrac{1}{2}x) \gg x^{1-\varepsilon},$$
где постоянная, входящая в $\gg$, зависит только от γ и ε.

Эта теорема, по-существу, сформулированная (без доказательства) Ю.В.Линником [2], имеет применения при построении нового варианта эргодического метода в теории чисел (см.[3]). При доказательстве теоремы мы в значительной степени следуем рассуждениям работы [1]. Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма I. Пусть $\mathfrak{D} > 0$ – целое число; χ – неглавный характер $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{D})$. Обозначим:
$$U(y, \chi) = \sum_{k \leqslant y} \chi(k).$$
Тогда если
$$y \geqslant \mathfrak{D}^{\frac{3}{8}+\theta}, \quad \theta > 0,$$
то для любого $\varepsilon > 0$
$$|U(y, \chi)| \ll y^{1-\frac{4\theta}{3+8\theta}+\varepsilon},$$
где постоянная, входящая в $\ll$, зависит только от θ и ε.

Доказательство. Лемма непосредственно следует из оценки Берджесса [5]:

$$|U(y,\chi)| \ll y^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}^{\frac{3}{16}+\varepsilon'} \ll y^{1-\frac{4\theta}{3+8\theta}+\varepsilon} .$$

<u>**Лемма 2**</u>. **Пусть** $\mathcal{D}>0$ **– целое число;** χ **– неглавный характер** $(\mathrm{mod}\,\mathcal{D})$ **;** s **– комплексное число,** $\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}$,

$$x \geqslant \mathcal{D}^{\frac{3}{8}+\gamma}, \quad \gamma>0 .$$

Тогда

$$\sum_{k\leqslant x} \frac{\chi(k)}{k} = L(1,\chi) + O(x^{-\eta_1(\gamma)+\varepsilon}),$$

$$\Big|\sum_{k\leqslant x} \frac{\chi(k)}{k^s}\Big| \ll |s| \cdot x^{\frac{1}{2}-\eta_2(\gamma)+\varepsilon} ,$$

где
$$\eta_1(\gamma)=\frac{4\gamma}{3+8\gamma}>0, \quad \eta_2(\gamma)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3+8\gamma}}>0 ;$$

постоянные, входящие в символы $\ll$ **и** O **, зависят только от** γ **и произвольного** $\varepsilon>0$ **.**

<u>**Доказательство**</u>. **Используя суммирование по Абелю, получаем:**

$$\Big|L(1,\chi)-\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{k}\Big| = \Big|\sum_{k>x}\frac{\chi(k)}{k}\Big| = \Big|\int_{[x]}^{\infty}\frac{U(y,\chi)}{y^2}dy - \frac{U([x],\chi)}{[x]}\Big| \ll$$

$$\ll \int_x^{\infty} \frac{y^{1-\frac{4\gamma}{3+8\gamma}+\varepsilon}}{y^2}dy + x^{-\frac{4\gamma}{3+8\gamma}+\varepsilon} \ll x^{-\eta_1(\gamma)+\varepsilon} .$$

Пусть теперь

$$\xi = \mathcal{D}^{\frac{3}{8}+\theta}, \quad 0<\theta<\gamma ,$$

так что

$$\xi \leqslant x^{\frac{3+8\theta}{3+8\gamma}} .$$

Тогда:
$$\Big|\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{k^s}\Big| \leqslant \sum_{k\leqslant \xi}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + \Big|\sum_{\xi<k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{k^s}\Big| \ll$$

$$\ll \xi^{\frac{1}{2}} + \Big|s\int_{[\xi]}^{[x]}\frac{U(y,\chi)}{y^{s+1}}dy + \frac{U([x],\chi)}{[x]^s} - \frac{U([\xi],\chi)}{[\xi]^s}\Big| \ll$$

$$\ll \xi^{\frac{1}{2}} + |s|\int_{\xi}^{x}\frac{y^{1-\frac{4\theta}{3+8\theta}+\varepsilon}}{y^{\frac{3}{2}}}dy + x^{\frac{1}{2}-\frac{4\gamma}{3+8\gamma}+\varepsilon} + \xi^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll |s|\left\{x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3+8\theta}{3+8\gamma}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{4\theta}{3+8\theta}+\varepsilon} + x^{\frac{1}{2}-\frac{4\gamma}{3+8\gamma}+\varepsilon}\right\} .$$

Положив
$$\theta = \frac{-3+\sqrt{3(3+8\gamma)}}{8} ,$$

получим необходимую оценку.

Лемма 3. Пусть $q_1<q_2<\ldots<q_z$ - простые числа; $z\log z<c\log x$, где постоянная $c>0$ произвольна. Тогда[*] в предположениях леммы 2:

$$\sum_{\substack{k\leq x\\ \text{бескв.}\\ (k,q_1\ldots q_z)=1}} \frac{\chi(k)}{k}=L(1,\chi)\cdot\prod_{i=1}^{z}\left(1-\frac{\chi(q_i)}{q_i}\right)\cdot\prod_{\substack{p\\ \neq q_1,\ldots,q_z}}\left(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\right)+O\left(x^{-\delta_1(\gamma)+\varepsilon}\right),$$

$$\Big|\sum_{\substack{k\leq x\\ \text{бескв.}\\ (k,q_1\ldots q_z)=1}} \frac{\chi(k)}{k^s}\Big| \ll |s|\cdot x^{\frac{1}{2}-\delta_2(\gamma)+\varepsilon};$$

здесь

$$\delta_i(\gamma)=\frac{1}{3}\rho_i \quad (i=1,2),$$

где ρ_i - корень уравнения

$$\frac{\rho}{3}=\eta_i\left(\gamma-\frac{3}{8}\rho-\gamma\rho\right),$$

удовлетворяющий условию

$$0<\rho<\frac{8\gamma}{3+8\gamma}$$

постоянные, входящие в символы $\ll$ и O, зависят только от γ, c и произвольного $\varepsilon>0$.

Доказательство. Положим

$$\omega_p=\begin{cases}1, & \text{если } p=q_1,\ldots,q_z\\ 2, & \text{если } p\neq q_1,\ldots,q_z.\end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{k\leq x\\ \text{бескв.}\\ (k,q_1\ldots q_z)=1}} \frac{\chi(k)}{k}=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\sum_{p_1<\ldots<p_t}\frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}}\cdot\sum_{k\leq\frac{x}{p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}}}\frac{\chi(k)}{k}. \tag{I}$$

Сумму (I) разобьем на две: в первую отнесем слагаемые с условием: $p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}<x^{\rho_1}$; во вторую - с условием $p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}\geq x^{\rho_1}$.

Абсолютная величина второй суммы

$$\ll\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_1<\ldots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}\geq x^{\rho_1}}}\frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}}\cdot\sum_{k\leq\frac{x}{p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}}}\frac{1}{k}\ll\log x\cdot\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_1<\ldots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}\geq x^{\rho_1}}}\frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}}\ldots p_t^{\omega_{p_t}}}=$$

---

[*] Здесь и далее p пробегает все простые числа, удовлетворяющие дополнительно указываемым условиям.

$$=\log x\Big\{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}\geq x^{p_1}\\ \prod\limits_{\omega_{p_i}=1}p_i\geq x^{\frac{p_1}{3}}}}\frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}+\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}\geq x^{p_1}\\ \prod\limits_{\omega_{p_i}=1}p_i< x^{\frac{p_1}{3}}}}\frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}\Big\}\leq$$

$$\leq\log x\Big\{2^{z}x^{-\frac{p_1}{3}}\cdot\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau^2}+2^{z}\sum_{\tau>x^{\frac{p_1}{3}}}\frac{1}{\tau^2}\Big\}\ll x^{-\frac{p_1}{3}+\varepsilon},$$

для любого $\varepsilon>0$; постоянная, входящая в $\ll$, зависит только от c и ε .

К первой сумме применим лемму 2 (заменяя x на $x/(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})$). Получаем, что она равна

$$\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}<x^{p_1}}}\frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}\cdot\Big\{L(1,\chi)+O\Big(\Big(\frac{x}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}\Big)^{-z_1(\gamma-\frac{3}{8}p_1-\gamma p_1)+\varepsilon'}\Big)\Big\}=$$

$$=L(1,\chi)\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}<x^{p_1}}}\frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}+O\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}<x^{p_1}}}\frac{x^{-\frac{p_1}{3}+\varepsilon'}}{(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})^{1-\frac{p_1}{3}+\varepsilon'}}\Big).$$

Остаточный член этой формулы

$$\ll x^{-\frac{p_1}{3}+\varepsilon'}\cdot 2^{z}\cdot\sum_{\tau<x^{\frac{p_1}{2}}}\frac{1}{\tau^{2(1-\frac{p_1}{3}+\varepsilon')}}\ll x^{-\frac{p_1}{3}+\varepsilon}\cdot\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau^{\frac{4}{3}}}\ll x^{-\frac{p_1}{3}+\varepsilon},$$

где $\varepsilon>0$ произвольно и постоянная, входящая в символ $\ll$, зависит только от γ , c , ε . Главный член отличается от

$$L(1,\chi)\cdot\prod_{p}\Big(1-\frac{\chi(p^{\omega_p})}{p^{\omega_p}}\Big)$$

на

$$L(1,\chi)\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}\geq x^{p_1}}}\frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}\ll L(1,\chi)\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}\geq x^{p_1}}}\frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}\ll$$

$$\ll 2^{z}L(1,\chi)\cdot x^{-\frac{p_1}{3}}\ll x^{-\frac{p_1}{3}+\varepsilon};$$

постоянная, входящая в $\ll$, зависит только от c и произвольного $\varepsilon>0$. Здесь и далее мы пользуемся оценкой Зигеля (Прахар [4]):

$$\mathfrak{D}^{-\varepsilon}\ll L(1,\chi)\ll\mathfrak{D}^{\varepsilon},$$

где постоянные, входящие в $\ll$, зависят только от произвольного $\varepsilon>0$; в оценке снизу χ предполагается вещественным.

Аналогичным образом:

$$\Big|\sum_{\substack{k\leqslant x\\ \text{бескв.}\\ (k,q_1,\dots q_z)=1}} \frac{\chi(k)}{k^s}\Big| \leqslant \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}<x^{\rho_2}}} \frac{1}{(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})^{\frac12}} \Big|\sum_{k\leqslant \frac{x}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}} \frac{\chi(k)}{k^s}\Big| +$$

$$+\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}\geqslant x^{\rho_2}}} \frac{1}{(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})^{\frac12}} \cdot \sum_{k\leqslant \frac{x}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}}} \frac{1}{k^{\frac12}} \ll$$

$$\ll |s|\cdot x^{\frac12-\eta_2(\gamma-\frac38\rho_2-\gamma\rho_2)+\varepsilon'} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}<x^{\rho_2}}} \frac{1}{(p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}})^{1-\eta_2(\gamma-\frac38\rho_2-\gamma\rho_2)}} +$$

$$+x^{\frac12}\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1<\dots<p_t\\ p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}\geqslant x^{\rho_2}}} \frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}}\dots p_t^{\omega_{p_t}}} \ll |s|\cdot x^{\frac12-\frac{\rho_2}{3}+\varepsilon};$$

постоянная, входящая в $\ll$, зависит только от γ, c и произвольного $\varepsilon>0$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть

$$a_k=\sum_{\substack{d|k\\ d\ \text{бескв.},\ \frac{k}{d}\ \text{бескв.}}} \chi(d).$$

Тогда в предположениях леммы 3

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\ (k,q_1,\dots q_z)=1}} a_k\Big(1-\frac{k}{x}\Big)=\frac{3x}{\pi^2}\cdot L(1,\chi)\prod_p\Big(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\Big)\prod_{i=1}^{z}\Big\{\Big(1+\frac{1}{q_i}\Big)\Big(1+\frac{\chi(q_i)}{q_i}\Big)\Big\}^{-1}+O\big(x^{1-\nu(\gamma)+\varepsilon}\big),$$

где

$$\nu(\gamma)=\min\Big\{\delta_1(\gamma),\ \frac23\delta_2(\gamma)\Big\};$$

постоянная, входящая в O, зависит только от γ, c и произвольного $\varepsilon>0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\alpha>1$, $T\geqslant 2$. Известно, что

$$\mathcal{J}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{y^s}{s(s+1)}\,ds=\begin{cases}1-\frac1y, & \text{если } y\geqslant 1,\\ 0, & \text{если } y\leqslant 1.\end{cases}$$

Заметим еще, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\frac{y^s}{s(s+1)}\,ds=\mathcal{J}(y)+O\Big(\frac{y^\alpha}{T}\Big),$$

с абсолютной постоянной в O. Поэтому:

$$\sum_{\substack{k\le x\\(k,q_1\dots q_z)=1}} a_k\left(1-\frac{k}{x}\right)=\sum_{\substack{d\le x\\ \text{бескв.}\\(d,q_1\dots q_z)=1}}\chi(d)\sum_{\substack{n\le \frac{x}{d}\\ \text{бескв.}\\(n,q_1\dots q_z)=1}}\left(1-\frac{nd}{x}\right)=\sum_{\substack{d\le x\\ \text{бескв.}\\(d,q_1\dots q_z)=1}}\chi(d)\sum_{\substack{n=1\\(n,q_1\dots q_z)=1\\ n \text{ бескв., если } p|n\Rightarrow p\le x}}^{\infty} J\left(\frac{x}{dn}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\sum_{\substack{d\le x\\ \text{бескв.}\\(d,q_1\dots d_z)=1}}\chi(d)\sum_{\substack{n=1\\(n,q_1\dots q_z)=1\\ n \text{ бескв., если } p|n\Rightarrow p\le x}}^{\infty}\frac{1}{s(s+1)}\cdot\frac{x^s}{d^s n^s}ds+O\left(\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^\alpha}{Td^\alpha n^\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\frac{x^s}{s(s+1)}\left(\sum_{\substack{d\le x\\ \text{бескв.}\\(d,q_1\dots q_z)=1}}\frac{\chi(d)}{d^s}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\(n,q_1\dots q_z)=1\\ n \text{ бескв., если } p|n\Rightarrow p\le x}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)ds+O\left(\frac{x^\alpha}{T}(\zeta(\alpha))^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\frac{x^s}{s(s+1)}\left(\sum_{\substack{d\le x\\ \text{бескв.}\\(d,q_1\dots q_z)=1}}\frac{\chi(d)}{d^s}\right)\cdot\zeta(s)\prod_{i=1}^{z}\left(1-\frac{1}{q_i^s}\right)\prod_{\substack{p\le x\\ \ne q_1,\dots,q_z}}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)ds+O\left(\frac{x^\alpha}{T}\right),$$

с постоянной в O , зависящей только от α .

Функция

$$F(s)=\frac{x^s}{s(s+1)}\cdot\left(\sum_{\substack{d\le x\\ \text{бескв.}\\(d,q_1\dots q_z)}}\frac{\chi(d)}{d^s}\right)\cdot\zeta(s)\cdot\prod_{i=1}^{z}\left(1-\frac{1}{q_i^s}\right)\prod_{\substack{p\le x\\ \ne q_1,\dots,q_z}}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)$$

имеет в прямоугольнике с вершинами $\frac12-iT$, $\alpha-iT$, $\alpha+iT$, $\frac12+iT$ единственный полюс в точке I. Поэтому наш интеграл равен

$$\operatorname*{Res}_{s=1}F(s)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-iT}^{\frac12+iT}F(s)ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12+iT}^{\alpha+iT}F(s)ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-iT}^{\alpha-iT}F(s)ds.$$

Оценим последние три интеграла. Имеем при $\operatorname{Re}s\geqslant\frac12$

$$\left|\prod_{\substack{p\le x\\ \ne q_1,\dots,q_z}}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)\right|\ll\prod_{p\le x}\left(1+\frac1p\right)\ll\log x,$$

$$\left|\prod_{i=1}^{z}\left(1-\frac{1}{q_i^s}\right)\right|\ll\prod_{i=1}^{z}\left(1+\frac{1}{q_i^{\frac12}}\right)\ll 2^z.$$

Известно (Прахар [4])

$$|\zeta(\sigma+it)|\ll|t|^{\frac12},\ \text{если } \sigma\geqslant\tfrac12, |t|\geqslant 2;$$

постоянная в $\ll$ - абсолютная. Поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\alpha+iT}F(s)ds\right|\ll 2^{z}\log x\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha}x^{\sigma}\left|\frac{\zeta(\sigma+iT)}{(\sigma+iT)(\sigma+1+iT)}\right|\left(\sum_{k\leq x}\frac{1}{k^{\sigma}}\right)d\sigma\ll$$

$$\ll\frac{2^{z}\log x}{T^{\frac{3}{2}}}\sum_{k\leq x}\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha}\left(\frac{x}{k}\right)^{\sigma}d\sigma\ll\frac{x}{T}^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}},$$

где постоянная, входящая в $\ll$, зависит только от α, C и произвольного $\varepsilon>0$. Аналогично:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\alpha+iT}F(s)ds\right|\ll\frac{x}{T}^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Оценим оставшийся интеграл:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}F(s)ds\right|\ll 2^{z}\log x\int_{-T}^{T}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left|(\frac{1}{2}+it)(\frac{3}{2}+it)\right|}\cdot|t|^{\frac{1}{2}}\cdot\left|\frac{1}{2}+it\right|\cdot x^{\frac{1}{2}-\delta_2(\gamma)+\varepsilon'}dt\ll x^{1-\delta_2(\gamma)+\frac{\varepsilon}{2}}\cdot T^{\frac{1}{2}},$$

с постоянной в $\ll$, зависящей только от γ, C и произвольного $\varepsilon>0$.

По лемме 3

$$\operatorname*{Res}_{s=1}F(s)=\frac{x}{2}\left\{L(1,\chi)\prod_{i=1}^{z}\left(1-\frac{\chi(q_i)}{q_i}\right)\prod_{\substack{p\\ \neq q_1,\dots,q_z}}\left(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\right)+O\left(x^{-\delta_1(\gamma)+\varepsilon}\right)\right\}\cdot\prod_{i=1}^{z}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\cdot\prod_{\substack{p\leq x\\ \neq q_1,\dots,q_z}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

Так как

$$\left|\frac{6}{\pi^2}-\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right|=\left|\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)-\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right|\leq\sum_{\tau>x}\frac{1}{\tau^2}\ll x^{-1},$$

то учитывая, что

$$L(1,\chi)\ll x^{\frac{2}{3}}\ll x^{1-\delta_1(\gamma)},$$

получим:

$$\operatorname*{Res}_{s=1}F(s)=\frac{3x}{\pi^2}L(1,\chi)\prod_{i=1}^{z}\left\{\left(1+\frac{1}{q_i}\right)\left(1+\frac{\chi(q_i)}{q_i}\right)\right\}^{-1}\cdot\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\right)+O\left(x^{1-\delta_1(\gamma)+\varepsilon}\right);$$

постоянная в символе O зависит только от γ, C и произвольного $\varepsilon>0$. Собрав все оценки и положив

$$T=x^{\lambda},\quad\lambda=\frac{2}{3}(\alpha-1+\delta_2(\gamma)),\quad\alpha=1+\frac{3\varepsilon}{2},$$

получим утверждение леммы.

Лемма 5. Пусть $P=\prod\limits_{p\leq \log D} p$. Тогда в предположениях леммы 4:

$$\sum_{\substack{k\leq x\\ \text{беск.}\\ (k,P)=1}} a_k\left(1-\frac{k}{x}\right)=\frac{3x}{\pi^2}\cdot L(1,\chi)\cdot\prod_{p\leq\log D}\left\{\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{\chi(p)}{p}\right)\right\}^{-1}\cdot\prod_p\left(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\right)\cdot\prod_{p>\log D}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^2\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{\chi(p)}{p}\right)}\right)+$$

$$+\,O\left(x^{1-\mu(\gamma)+\varepsilon}\right).$$

Здесь $\mu(\gamma)=\frac{1}{2}\rho$, где ρ корень уравнения

$$\frac{\rho}{2}=\nu\left(\gamma-\frac{3}{8}\rho-\gamma\rho\right)$$

удовлетворяющий условию

$$0<\rho<\frac{8\gamma}{3+8\gamma};$$

постоянная, входящая в O, зависит только от γ и произвольного $\varepsilon>0$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3:

$$\sum_{\substack{k\leq x\\ \text{беск.}\\ (k,P)=1}} a_k\left(1-\frac{k}{x}\right)=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\sum_{\log D<p_1<\ldots<p_t}\ \sum_{\substack{k\leq x\\ (k,P)=1\\ p_1^2\ldots p_t^2\mid k}} a_k\left(1-\frac{k}{x}\right). \tag{2}$$

Сумму (2) разобьем на две: в первую отнесем слагаемые с условием: $p_1^2\ldots p_t^2<x^\rho$; во вторую – с условием $p_1^2\ldots p_t^2\geq x^\rho$.

Так как $|a_k|$ не превосходит числа делителей k, то для любого $\varepsilon>0$

$$\max_{k\leq x}|a_k|\ll x^\varepsilon$$

с постоянной в $\ll$, зависящей только от ε. Поэтому абсолютная величина второй суммы

$$\ll x^\varepsilon\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{\log D<p_1<\ldots<p_t\\ p_1^2\ldots p_t^2\geq x^\rho}}\frac{x}{p_1^2\ldots p_t^2}\ll x^{1+\varepsilon}\sum_{\tau\geq x^{\frac{\rho}{2}}}\frac{1}{\tau^2}\ll x^{1-\frac{\rho}{2}+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon>0$; постоянная, входящая в $\ll$, зависит только от ε.

Прежде чем рассматривать первую сумму, заметим, что

$$\sum_{\substack{k\leq x\\ (k,P)=1\\ p_1^2\ldots p_t^2\mid k}} a_k\left(1-\frac{k}{x}\right)=\chi(p_1\ldots p_t)\sum_{\substack{k\leq\frac{x}{p_1^2\ldots p_t^2}\\ (k,P)=1\ (k,p_1\ldots p_t)=1}} a_k\left(1-\frac{k}{\frac{x}{p_1^2\ldots p_t^2}}\right),$$

при условии $\log D<p_1<\ldots<p_t$. Это равенство легко установить, если учесть, что: I) $a_k=0$ для k не свободного от кубов; 2) $a_{n_0n_1^2}=\chi(n_1)a_{n_0}$, если $(n_0,n_1)=1$ и n_1 бесквадратно. Заметим еще, что при $p_1^2\ldots p_t^2<x^\rho$, $p_1<\ldots<p_t$ выполняется нера-

венство:
$$(\pi(\log\mathcal{D})+t)\log(\pi(\log\mathcal{D})+t)\leqslant c\log x, \qquad (3)$$
где c зависит только от γ . Действительно:
$$\pi(\log\mathcal{D})\leqslant c_1\frac{\log\mathcal{D}}{\log\log\mathcal{D}}\leqslant c_2\frac{\log x}{\log\log x}; \qquad (4)$$
так как $p_1\ldots p_t<x^{\frac{\rho}{2}}$, то $p_1'\ldots p_t'<x^{\frac{\rho}{2}}$, где $p_1',\ldots,p_t'$ суть первые t простых чисел; поэтому
$$\frac{\rho}{2}\log x\geqslant\sum_{p\leqslant p_t'}\log p>c_3p_t'>c_4t\log t. \qquad (5)$$
Неравенство (3) непосредственно выводится из (4) и (5).

Поэтому, вычисляя первую сумму, мы можем воспользоваться леммой 4, беря в качестве $q_1,\ldots,q_z$ все простые числа $\leqslant\log\mathcal{D}$ и числа $p_1,\ldots,p_t$. Согласно (3)
$$z\log z<c\log x.$$
Получаем, что первая сумма равна
$$\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\sum_{\substack{\log\mathcal{D}<p_1<\ldots<p_t\\ p_1^2\ldots p_t^2<x^\rho}}\chi(p_1\ldots p_t)\Big\{\frac{3x}{\pi^2p_1^2\ldots p_t^2}L(1,\chi)\prod_p\Big(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\Big)\cdot\prod_{p\leqslant\log\mathcal{D}}\Big\{\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big\}^{-1}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{t}\Big\{\Big(1+\frac{1}{p_i}\Big)\Big(1+\frac{\chi(p_i)}{p_i}\Big)\Big\}^{-1}+O\Big(\Big(\frac{x}{p_1^2\ldots p_t^2}\Big)^{1-\nu(\gamma-\frac{3}{8}\rho-\gamma\rho)+\varepsilon}\Big)\Big\}=$$
$$=\frac{3x}{\pi^2}L(1,\chi)\prod_p\Big(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\Big)\cdot\prod_{p\leqslant\log\mathcal{D}}\Big\{\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big\}^{-1}\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\sum_{\substack{\log\mathcal{D}<p_1<\ldots<p_t\\ p_1^2\ldots p_t^2<x^\rho}}\prod_{i=1}^{z}\frac{\chi(p_i)}{p_i^2\Big(1+\frac{1}{p_i}\Big)\Big(1+\frac{\chi(p_i)}{p_i}\Big)}+$$
$$+O\Big(x^{1-\frac{\rho}{2}+\varepsilon}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{\log\mathcal{D}<p_1<\ldots<p_t\\ p_1^2\ldots p_t^2<x^\rho}}\frac{1}{(p_1^2\ldots p_t^2)^{1-\frac{\rho}{2}+\varepsilon}}\Big).$$
Так как $\rho<1$, то остаточный член
$$\ll x^{1-\frac{\rho}{2}+\varepsilon}\sum_{\tau<x^{\frac{\rho}{2}}}\frac{1}{\tau^{2(1-\rho/2+\varepsilon)}}\ll x^{1-\frac{\rho}{2}+\varepsilon}.$$
Постоянная, входящая в $\ll$, зависит только от γ и произвольного $\varepsilon>0$. Главный член отличается от приведенного в формулировке леммы наличием условия $p_1^2\ldots p_t^2<x^\rho$. Их разность
$$\ll xL(1,\chi)\cdot\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\substack{\log\mathcal{D}<p_1<\ldots<p_t\\ p_1^2\ldots p_t^2\geqslant x^\rho}}\frac{1}{p_1^2\ldots p_t^2}\ll xL(1,\chi)\sum_{\tau\geqslant x^{\frac{\rho}{2}}}\frac{1}{\tau^2}\ll x^{1-\frac{\rho}{2}+\varepsilon},$$
где постоянная в $\ll$ зависит только от произвольного $\varepsilon>0$. Собрав все оценки, получим утверждение леммы.

<u>Доказательство теоремы.</u> Пусть $\mathcal{D}=4m$, χ – характер

$(\mathrm{mod}\, \mathcal{D})$ для которого:

$$\chi(k)=\begin{cases}\left(\frac{-\mathcal{D}}{k}\right), & \text{если } (k,\mathcal{D})=1\\ 0, & \text{если } (k,\mathcal{D})>1\,.\end{cases}$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно, $\log m \geqslant 2$. Заметим, что число решений сравнения $b^2\equiv -m(\mathrm{mod}\, k)$ для бесквадратного нечетного k есть

$$\prod_{p|k}\left(1+\left(\frac{-m}{p}\right)\right)=a_k\,.$$

Получаем:

$$t(-m;x,\tfrac{1}{2}x)=\sum_{\substack{\frac{1}{2}x<k\leqslant x\\ k \text{ бескв.}\\ p\nmid k \text{ если } p\leqslant \log m}}\begin{cases}1 & \text{если сравнение } b^2\equiv -m(\mathrm{mod}\, k) \text{ разрешимо}\\ 0 & \text{если сравнение } b^2\equiv -m(\mathrm{mod}\, k) \text{ не разрешимо}\end{cases}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\max_{k\leqslant x}|a_k|\right)^{-1}\cdot\sum_{\substack{\frac{1}{2}x<k\leqslant x\\ k \text{ бескв.},\, p\nmid k \text{ если } p\leqslant\log m}} a_k \gg x^{-\frac{\varepsilon}{2}}\sum_{\substack{\frac{1}{2}x<k\leqslant x\\ k \text{ бескв.},\, p\nmid k \text{ если } p\leqslant\log \mathcal{D}}} a_k\left(1-\frac{k}{x}\right)\quad. \qquad (6)$$

Для последней суммы нам известна асимптотика (см.лемму 5), из которой выводим, учитывая оценку Зигеля,

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}x<k\leqslant x\\ k \text{ бескв.}\\ p\nmid k \text{ если } p\leqslant\log\mathcal{D}}} a_k\left(1-\frac{k}{x}\right)\gg x L(1,\chi)\prod_{p\leqslant\log\mathcal{D}}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-2}+x^{1-\mu(\chi)+\varepsilon'}\gg x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \qquad (7)$$

Теперь теорема непосредственно следует из оценок (6) и (7).

Приношу благодарность А.В.Малышеву за постановку задачи и внимание к работе и Д.Н.Андрееву за помощь в разборе статьи А.И. Виноградова и Ю.В.Линника.

Цитированная литература

[1] Виноградов А.И., Линник Ю.В. Гиперэллиптические кривые и наименьший простой квадратичный вычет. Докл.АН СССР, 1966, 168, 259-261.

[2] Линник Ю.В.(Yu.V.Linnik) Application of the method of D.Burgess to the investigation of integer points on large spheres. Symposia math.,1970,4, 99-112.

[3] Малышев А.В. Новый вариант эргодического метода Ю.В.Линника в теории чисел. Этот Сборник, стр. 179-186.

[4] Прахар К. Распределение простых чисел, М., 1967.

[5] Burgess D.A. On character sums and L-series, II. Proc.London Math.Soc.(3), 1963, 13, 524-536.